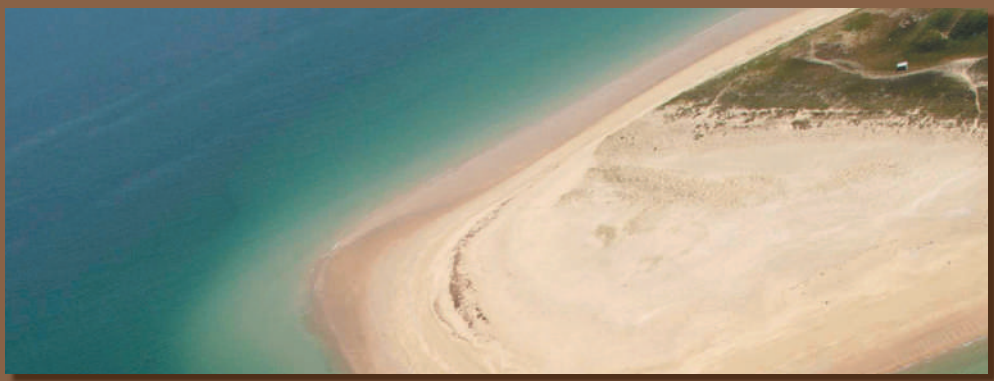
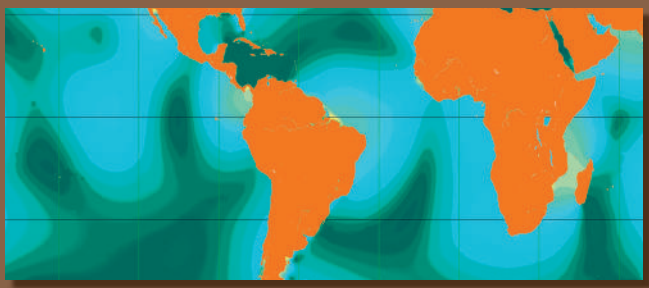


Bernard Simon



LA MARÉE

LA MARÉE OCÉANIQUE CÔTIÈRE

Institut océanographique
éditeur
Paris • Monaco

942-MOG

La marée océanique côtière

ISBN 978-2-903581-32-9

© Institut océanographique, Fondation Albert I, prince de Monaco

Dépôt légal : Janvier 2007

Bernard Simon

avec la participation de Joseph Gonella
professeur au Muséum national d'histoire naturelle

LA MARÉE OCÉANIQUE CÔTIÈRE

Collection « Synthèses »

Sommaire

Chapitre I. Généralités 9
1. Introduction 9
2. Description du phénomène 10
3. Rappel historique 16
4. Divers aspects de la marée, définitions 23

Chapitre II. La marégraphie 35
1. Buts de la mesure du niveau marin 35
2. Le puits de tranquillisation 41
3. Les systèmes de mesure traditionnels 45
4. Les systèmes de mesure modernes 56

Chapitre III. Force et potentiel générateurs de la marée 69
1. La force génératrice 69
2. Le potentiel générateur 79
3. Décomposition du potentiel en « espèces »de Laplace 83

Chapitre IV. Théorie dynamique de la marée : Laplace 89
1. Les équations de Laplace 89
2. La formule de Laplace 91
3. Heure de la pleine mer ; coefficient de marée 97
4. Conclusion 103

Chapitre V. Formule harmonique de la marée 105
1. Introduction 105
2. Le développement du potentiel de Darwin 106
3. Le développement de Doodson 110
4. La classification de Doodson 117

5. Nombres de Doodson, nombres et lettres arguments 119
6. Formule harmonique de la marée 123

Chapitre VI. Analyse harmonique 131
1. Analyse spectrale 132
2. La méthode des hauteurs réduites 141
3. Le bruit dans l'analyse de la marée 148
4. Analyse par la méthode des moindres carrés 153
5. Analyse par la TFR 159
6. Conditions de séparation 161
7. Le conditionnement du système 164
8. Calcul des facteurs nodaux 166
9. Calcul des ondes d'interactions non linéaires 168

Chapitre VII. Méthodes non harmoniques 171
1. Introduction 171
2. Méthode des concordances 172
3. Méthode de la réponse 178
4. Concordance par espèce 180

Chapitre VIII. Valeurs caractéristiques et composantes de marée . . 191
1. Étude des caractéristiques de la marée d'un port 191
2. Niveaux caractéristiques extrêmes 206
3. Niveaux extrêmes 220
4. Les différents « niveaux moyens » 225
5. Les variations du « niveau moyen »à long terme 230

Chapitre IX. Références de hauteur et sondages hydrographiques . . 237
1. Définitions 238
2. Précision 245
3. Accessibilité 246
4. Stabilité 253
5. Conclusion, recommandations pour l'utilisation des modèles 256
6. Méthodes 257
7. Modèles numériques et techniques spatiales 265

Chapitre X. Les courants de marée côtiers 271
1. Généralités 271
2. Courants de marée : définitions et caractéristiques 280
3. Courants de marée : approche analytique 284
4. Roses de courant, constantes harmoniques 288

Annexe A. Éléments d'astronomie 295
1. Les systèmes de coordonnées sphériques 295
2. Les astres, mouvements et temps caractéristiques 304
3. Le temps pour les besoins de l'étude de la marée 311

Annexe B. Champs de forces et potentiels 319
1. Champs de forces : terminologie et définitions 319
2. Champs plans 321
3. Champs méridiens 325
4. Exemples de champs méridiens 331

Annexe C. Le puits de tranquillisation 341
1. L'équation du puits de tranquillisation 341
2. Modélisation numérique du système 346

Annexe D. Développement du potentiel, composantes harmoniques 357
1. Potentiel lunaire 358
2. Potentiel solaire 361
3. Analyse harmonique du potentiel, séparation des espèces . . 362
4. Interactions non linéaires 363
5. Développements harmoniques 364

Annexe E. Transformées et séries de Fourier 383
1. Définitions et généralités 384
2. Distributions et leurs transformées 386
3. Fonctions périodiques réelles 393
4. Fonction réelle échantillonnée 395
5. Application au cas de la marée 401
6. Composantes séparées selon la durée 407

Bibliographie 417

Glossaire 423

Index 431

I
Généralités

1 • Introduction

La marée[1] est la variation du niveau de la mer due à l'action gravitationnelle de la Lune et du Soleil, astres dont les mouvements peuvent être calculés avec précision sur des périodes de plusieurs centaines, voire de plusieurs milliers d'années. L'un des buts principaux de l'étude des marées est la recherche des relations existant entre le mouvement des astres et la réponse des océans à l'action de ces forces gravitationnelles afin d'établir des formules de prédiction. À ces mouvements d'allure régulière se superposent des variations de hauteur d'eau d'origine météorologique, appelées surcotes-décotes dont l'étude relève essentiellement de méthodes statistiques. Une difficulté vient du fait que l'influence météorologique n'est pas purement aléatoire. On peut, par exemple y détecter des cycles saisonniers dus aux variations annuelles des champs de pression atmosphérique ou des cycles diurnes provenant des vents thermiques. Ces signaux sont souvent difficiles à distinguer des signaux d'origine gravitationnelle car leurs périodes peuvent être identiques. En pratique, on appellera marée, la partie pouvant être prédite des variations de hauteur, en y incluant la partie pouvant être prédite de ces variations d'origine atmosphérique, appelée, selon un anglicisme, « marée radiationelle ».

Les surcotes-décotes, différence entre les hauteurs d'eau observées et la marée prédite, ne font pas partie de la marée à proprement parler. Il est

1. Bien que le terme de « marée » ait pour origine le mot « mer », ce phénomène est considéré, dans son acception actuelle, comme la manifestation des mouvements de faibles amplitudes de tout élément fluide ou solide de notre géosphère (noyau, magma, lithosphère, océan et atmosphère), liés aux lois de l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil. Le présent ouvrage se limite à l'étude de la marée océanique.

cependant légitime de s'y intéresser car leur étude permet d'obtenir des résultats importants dans de nombreux domaines (navigation, hydrographie, aménagements portuaires, études climatiques).

Les courants de marée constituent un autre aspect, parfois méconnu de la marée dont l'intérêt est évident, non seulement pour la navigation, mais également pour l'étude de paramètres biologiques, sédimentologiques ou écologiques.

2 • Description du phénomène

L'incessant va-et-vient de la mer le long de la plupart des rivages maritimes, la marée, est un phénomène familier pour quiconque séjourne près du littoral. Il impose souvent son rythme aux populations côtières vivant des activités liées à la mer. Qu'un phénomène aussi important ait pu échapper si longtemps à toute explication rationnelle satisfaisante peut paraître étonnant et plus surprenant encore qu'il soit actuellement toujours l'objet d'études actives.

Au-delà de la curiosité scientifique, la nécessité d'une explication rationnelle a émané en premier lieu des besoins de prédictions précises pour la navigation côtière. Les hydrographes, dont le rôle est de satisfaire les besoins des marins en documents nautiques, ont probablement été parmi les premiers concernés par ce problème en apportant une contribution non négligeable à sa solution. La navigation maritime n'est cependant pas le seul domaine concerné. À titre d'exemples, nous pouvons citer les aménagements portuaires, la protection contre les inondations, l'exploitation de l'énergie marémotrice, les opérations amphibies militaires, l'offshore pétrolier, et plus récemment, la géodésie et l'altimétrie spatiales ainsi que l'étude de l'évolution du climat. Ces dernières applications expliquent en grande partie le regain d'intérêt de la communauté scientifique pour l'étude de la marée sur l'ensemble de l'océan mondial.

Pour Laplace, ce problème était le « plus épineux de toute la mécanique céleste ». La complexité de ce phénomène se manifeste en premier lieu dans sa description même. Plus on veut l'affiner, plus on s'aperçoit que certaines règles empiriques de prédiction, que l'on croit pouvoir établir à partir d'observations, ne peuvent être que grossièrement généralisées. Malgré ces inconvénients et bien avant l'avènement des techniques modernes, ces règles ont permis d'établir des « tables de marée » très utiles à la navigation. Elles s'appuyaient sur les simples relations observées, d'une part, entre le mouvement apparent de la Lune (jour lunaire) et la succession des maximums

et minimums de hauteur (pleines et basses mers), et d'autre part, entre les lunaisons et l'amplitude du phénomène. Les maximums d'amplitude, au voisinage des équinoxes sur les côtes atlantiques ou des solstices en certaines régions d'Asie, ont été également remarqués, mais sans possibilité d'établir des lois empiriques permettant de réaliser des prédictions précises. Il est très difficile, en effet, de mettre en évidence un rythme du phénomène. C'est même théoriquement impossible car, contrairement à une idée reçue, la marée, qui est la somme de composantes périodiques dont la plupart ont des fréquences incommensurables entre elles, n'est pas périodique : il n'existe donc pas de période au bout de laquelle les variations de hauteur se reproduisent à l'identique. Cependant, il a été mis en évidence des laps de temps au bout desquels ces conditions sont à peu près remplies. Le plus connu est le saros, ou période chaldéenne, qui règle le retour des éclipses, et correspond approximativement à 6 585 jours, soit 18 ans et 11 jours (voir annexe A). Au terme de cette durée, la Lune, le Soleil ainsi que les éléments de leur orbite apparente se retrouvent à peu près dans les mêmes situations relatives. Il en résulte que la force génératrice de la marée reprend approximativement les mêmes valeurs. Cela ne signifie pas, cependant, que le saros soit une période de la marée, car après plusieurs saros, la ressemblance avec la marée de départ se dégrade de plus en plus.

À cette difficulté d'une description temporelle s'ajoute celle, tout aussi importante, de la description spatiale de la marée. En termes de hauteur tout d'abord, la répartition géographique des amplitudes dans les océans (figure 1.1) ne semble suivre, *a priori*, aucune règle évidente.

Cependant nous pouvons noter que les valeurs les plus fortes se situent principalement sur le plateau continental, aux abords des continents, ou dans les mers peu profondes comme la Manche. Ces amplitudes sont très faibles dans les mers semi-fermées aux dimensions modestes (mer du Japon, mer des Antilles, Baltique, Méditerranée). Mis à part ces constatations essentiellement qualitatives sur l'effet de la profondeur et de la dimension des bassins, aucune règle de portée plus générale ne peut être établie.

Nous verrons que la marée résulte principalement de la superposition d'une composante diurne (un maximum et un minimum par jour) et d'une composante semi-diurne (deux maximums et deux minimums par jour). L'importance relative de ces deux composantes, très variables géographiquement, définit différents types de marée dont la classification, plus ou moins arbitraire, varie selon les pays. En France, la classification suivante a été adoptée (critères définis au chapitre VIII) :

— type semi-diurne : deux pleines mers et deux basses mers par jour, respectivement de hauteurs sensiblement égales,

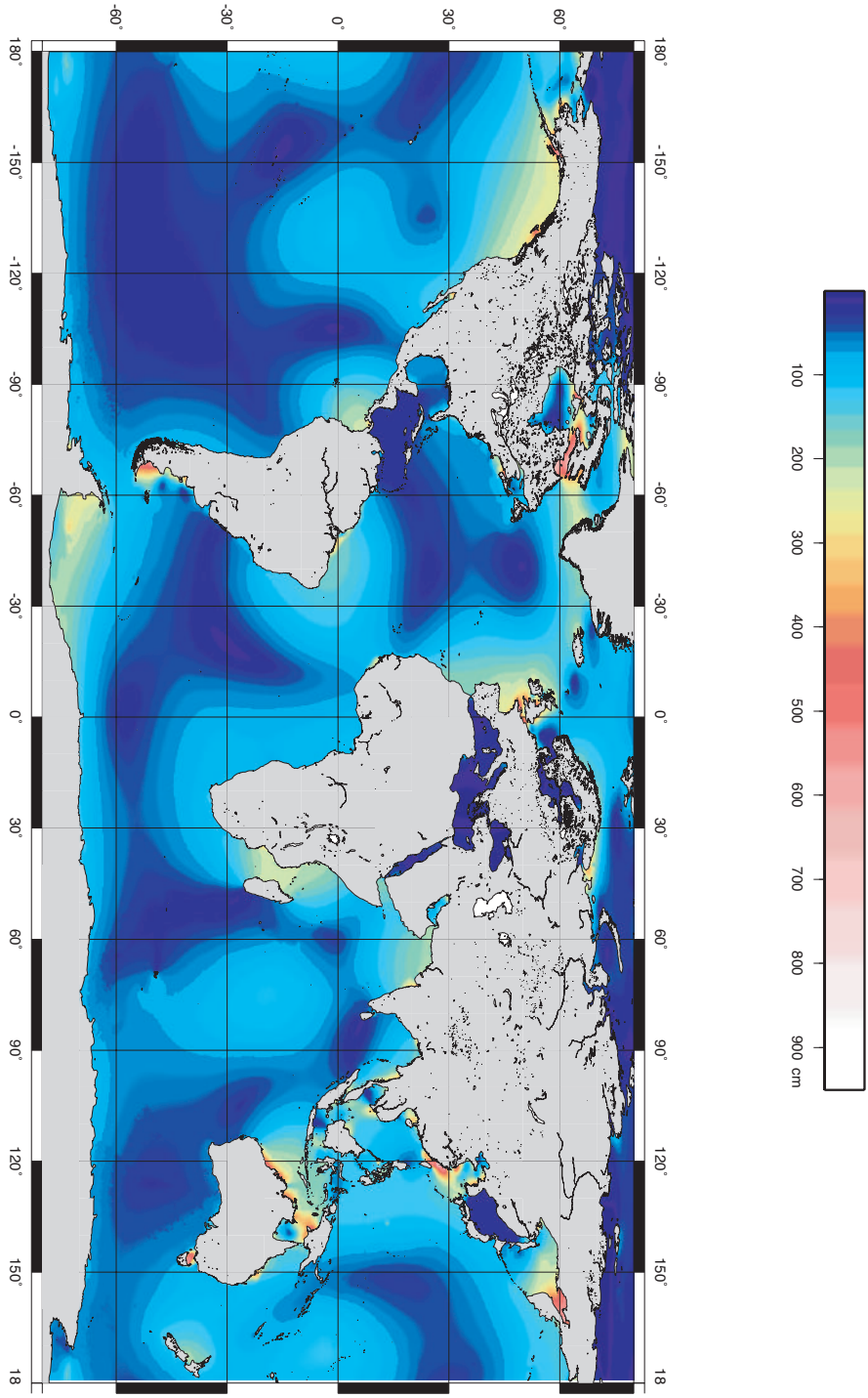


Figure 1.1 — Amplitude de la marée dans les trois océans.

— type semi-diurne à inégalité diurne : deux pleines mers et deux basses mers par jour, mais les pleines mers et les basses mers sont de hauteur très différentes,

— type mixte : tantôt deux pleines mers et deux basses mers par jour, tantôt une seule,

— type diurne : toujours une pleine mer et une basse mer par jour.

La répartition de ces 4 types de marée dans l'océan mondial (figure 1.2) montre également qu'aucune règle générale ne peut être mise en évidence, à part le fait que le type semi-diurne soit dominant en Atlantique, les autres types n'y apparaissant que lorsque l'amplitude semi-diurne est faible. La répartition sectorielle du terme semi-diurne du potentiel générateur de la marée (voir chapitre III) n'est sans doute pas étrangère à la dominance de cette composante dans l'Atlantique, seul océan qui s'étend pratiquement entre le Bassin polaire nord et l'océan Austral.

Une autre caractéristique de la marée, en tant qu'onde océanique, est son mode de propagation. Les crêtes de chaque onde composante se propagent en tournant autour de points appelés points amphidromiques où l'amplitude est nulle.

Dans l'exemple du schéma de propagation de l'onde semi-diurne moyenne en Atlantique (figure 1.3), chaque ligne, appelée ligne cotidale, représente la position de la crête de l'onde à un instant donné. Les phases indiquées sont référencées par rapport à l'heure de passage de la Lune dans le plan méridien de Greenwich. Nous pouvons noter, par exemple, que la ligne tournant dans le sens direct autour du point amphidromique, situé vers 50° N, se propage ainsi du sud vers le nord le long des côtes africaines et européennes, mais du nord vers le sud le long des côtes groenlandaises et américaines. En Atlantique sud, les deux réseaux principaux possèdent des lignes cotidales communes ; les sens de giration autour des deux points amphidromiques sont obligatoirement inverses. Il n'y a pas de règle systématique déterminant ce sens de rotation qui n'est régi que par les lois de l'hydrodynamique.

Ces lignes cotidales, représentatives de la marée moyenne semi-diurne, ne correspondent pas exactement à la réalité. En effet, les points amphidromiques correspondant à la marée réelle ne sont pas absolument immobiles, et il serait plus exact de parler de zone amphidromique. En outre, la composante diurne se propage très différemment ; ses points amphidromiques n'ont pas la même position et sont approximativement deux fois moins nombreux que ceux de la composante semi-diurne qui sont de l'ordre d'une vingtaine dans tout l'océan mondial.

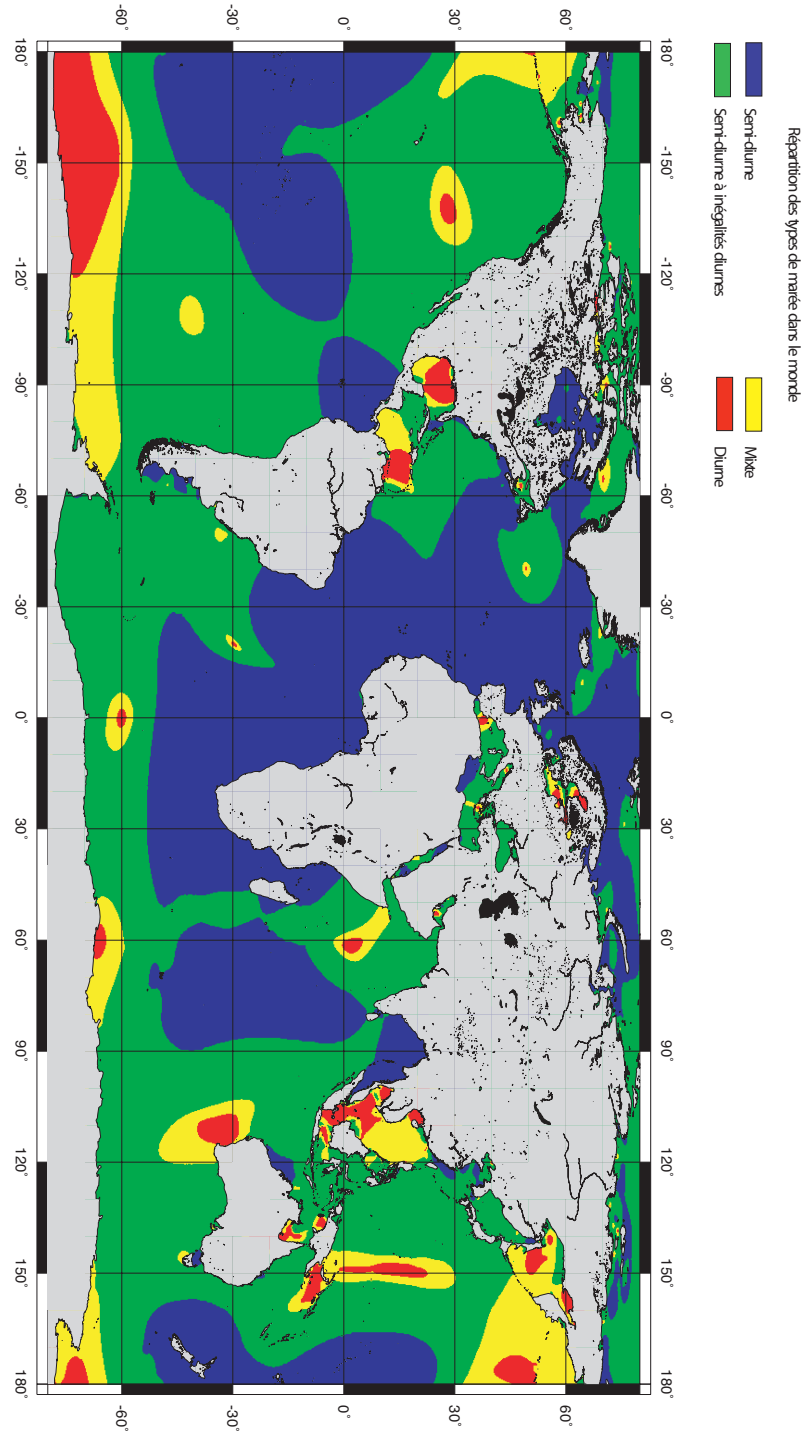


Figure 1.2 — Répartition des quatre types de marée dans les trois océans. Noter la dominance du type semi-diurne en Atlantique.

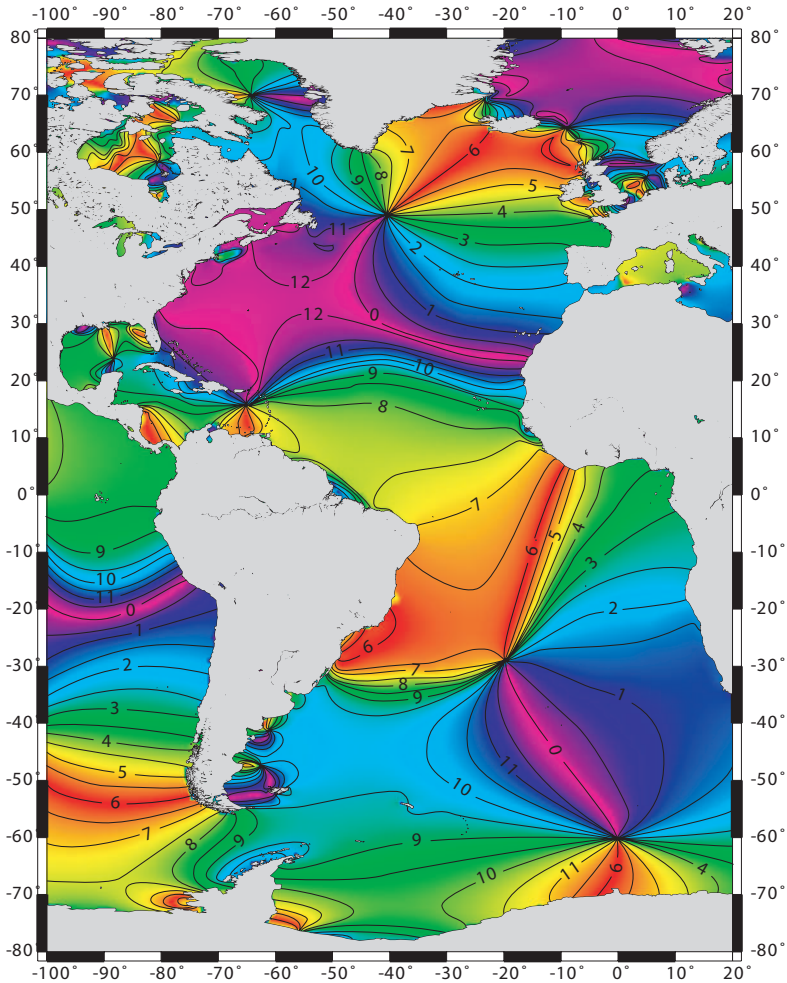


FIGURE 1.3 — Lignes cotidales de la marée semi-diurne moyenne en Atlantique : lignes de crêtes de l'onde, tournant autour des points amphidromiques, avec phase exprimée en heures par rapport à l'heure de passage de la Lune dans le plan du méridien de Greenwich.

Tous ces aspects de la marée, découverts au fur et à mesure des observations de plus en plus précises et géographiquement de plus en plus étendues ont, au cours des siècles, fait l'objet tour à tour d'interrogations, d'hypothèses plus ou moins pertinentes, de développements théoriques et d'études scientifiques menées avec l'aide de techniques de plus en plus perfectionnées, jusqu'aux plus modernes, offertes par les satellites et les ordinateurs.

3 • Rappel historique

Le survol historique exposé ci-dessous n'a pas la prétention d'être exhaustif. L'histoire du progrès dans la connaissance de la marée a été traitée par plusieurs auteurs. L'ouvrage le plus complet et le dernier en date est celui de David E. Cartwright (1999). Seules seront présentées ici les principales étapes de l'observation et de la mesure ayant conduit aux développements théoriques successifs qui ont permis la mise au point des méthodes de prédiction actuelles de la marée.

3.1 • D'Aristote à Newton

Aristote, à la fin de sa vie, s'est intéressé à la marée en observant les renverses de courant dans le canal d'Euripe, entre l'île d'Eubée et la côte béotienne, sans pouvoir donner d'explication au phénomène. Son dépit fut tel qu'il se serait noyé en se jetant dans le canal.

Aux environs de 330 avant J.-C., Pythéas, géographe et astronome grec, partit de Marseille, alors colonie hellénique, pour un long voyage vers les îles Britanniques. Il observa alors des marées d'amplitude insoupçonnée dans le monde méditerranéen et fit une découverte fondamentale : la marée était, d'une manière ou d'une autre, liée au mouvement de la Lune. Non seulement il constata qu'il y avait deux pleines et basses mers par jour lunaire, mais également que l'amplitude de la marée dépendait des phases de la Lune. La mise en évidence de ces relations peut être considérée comme le point de départ des recherches sur la théorie des marées.

Vers la même époque, Sélerrens de Babylone observait les marées du golfe Persique et signalait les effets de la déclinaison des astres sur l'amplitude de la marée.

Quelque 150 ans plus tard, l'astronome grec Selukos, observant la marée de la mer Rouge, découvrit les inégalités diurnes et relia leur amplitude à la déclinaison de la Lune.

Au premier siècle avant J.-C., Posidonius de Rhodes, philosophe et physicien, établit pour les marées des côtes d'Espagne, un tableau donnant la concordance de leurs variations diurnes, semi-diurnes et mensuelles avec les mouvements de la Lune et du Soleil. Le géographe grec Strabon, au début de l'ère chrétienne, décrit les marées du Portugal, d'Angleterre, du Danemark, d'Italie et du golfe Persique. Vers la même époque, le naturaliste romain Pline l'Ancien mentionne « l'établissement », l'« âge de la marée » et les variations annuelles de l'amplitude des « vives-eaux ».

Ainsi, il y a plus de deux millénaires, les caractéristiques les plus importantes de la marée étaient connues, grâce en particulier aux observations des

Grecs dans les îles Britanniques et en mer Rouge. Mais ce n'est qu'à partir de la fin du XVIIe siècle que se dégage une première explication rationnelle satisfaisante à ce phénomène.

Entre-temps, les hypothèses les plus étranges ont été avancées, parfois même par des esprits scientifiques éminents.

Bède le Vénérable (673-735), érudit et moine britannique, pensait que le jusant était dû au souffle de la Lune sur l'eau et que le flot intervenait lorsque l'astre s'éloignait.

Un savant arabe, Zakariya al-Qwazwini (1203-1283), tenta la première explication scientifique. Selon lui, la marée montante était due à l'expansion thermique de l'eau échauffée par la Lune et le Soleil. Son hypothèse cependant ne pouvait à l'évidence pas expliquer pourquoi la Lune jouait le rôle le plus important.

L'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630), entrevoyant l'origine du phénomène, était convaincu que l'explication devait se trouver dans l'action d'une force attractive de la Lune et du Soleil, force qui devait être une sorte de magnétisme. Il était probablement inspiré par la récente découverte du magnétisme terrestre par le médecin et physicien anglais William Gilbert (1540-1603).

Le physicien et astronome italien Galilée (1564-1642) se dit surpris que Kepler s'intéressât à l'action de la Lune sur l'eau et à des phénomènes occultes et autres enfantillages. Lui-même croyait, soutenant la théorie de Copernic (1473-1543) de la rotation de la terre autour de son axe, que les marées étaient engendrées par l'effet combiné de cette rotation et de son mouvement orbital autour du Soleil. Ces mouvements étaient censés provoquer les oscillations des masses océaniques se manifestant par la marée.

Descartes (1596-1650), quant à lui, défendit l'idée de l'origine lunaire des marées. Selon lui, la Lune et la terre seraient chacune entourées d'un grand tourbillon. La pression, exercée par le tourbillon de la Lune sur celui de la terre, provoquerait la marée à la surface du globe.

Le mathématicien anglais Wallis (1642-1727) proposa en 1666 une version amendée de la théorie de Galilée en cherchant à y inclure l'influence de la Lune. Il proposa d'expliquer les oscillations de la marée, non seulement par le mouvement de la terre autour du Soleil, mais également par son mouvement autour du centre de gravité du système Terre-Lune.

3.2 • Newton, la théorie statique

En 1687, Isaac Newton (1642-1727) publia la théorie de la gravitation dans son *Philisophiae naturalis principia mathematica*, donnant ainsi la première explication réellement plausible de l'origine des marées.

Il montre que celle-ci réside dans l'attraction exercée sur les molécules des océans, d'une part par la Lune en raison de sa proximité, d'autre part par le Soleil en raison de sa masse, les planètes ayant une influence parfaitement négligeable. Un calcul simple de mécanique céleste montre que, pour un astre déterminé (Lune ou Soleil), la force génératrice de la marée est la différence entre la force d'attraction exercée sur un corps isolé de la surface du globe et celle que subirait ce corps s'il était situé au centre de la terre.

Avec cette théorie, Newton pouvait expliquer trois des propriétés fondamentales de la marée : la période principale de 12 heures lunaires, la relation entre les amplitudes et les phases de la Lune et enfin l'inégalité diurne. Il détermina également les valeurs des forces génératrices exercées respectivement par le Soleil et la Lune. En utilisant la perturbation de l'orbite lunaire par le Soleil, il évalua la distance moyenne Terre-Lune à 60,5 rayons terrestres. Cette estimation lui permit de calculer ensuite la force génératrice due au Soleil lorsque celui-ci était au zénith ou au nadir et à sa distance moyenne. Il évalua ainsi cette composante égale à « $0{,}259 \cdot 10^{-7} g$ », c'est-à-dire 38,604 9 millions de fois inférieure à la gravité g. Cette valeur est remarquablement proche (erreur inférieure à 2 %) de celle qui est admise actuellement. Mais, en analysant le rapport des amplitudes de vives-eaux et de mortes-eaux d'après les observations effectuées sur les côtes anglaises, il trouva que la force exercée par la Lune était 4,5 fois celle du Soleil, alors que la valeur réelle est voisine de 2,2. Ainsi, il surestima l'influence de la Lune approximativement d'un facteur 2.

En fait la mécanique des fluides était trop peu avancée à cette époque pour donner une théorie plus approchée de la marée. La théorie statique de Newton repose sur l'idée qu'à chaque instant, la surface des mers prend la figure d'équilibre correspondant à la position de l'astre attirant. Cette hypothèse ne peut concilier l'inertie des masses océaniques avec la rapidité du mouvement des astres. Elle est inapte à expliquer en particulier l'âge de la marée, retard des vives-eaux sur les syzygies (pleine Lune ou nouvelle Lune) ou l'importance des amplitudes observées le long des côtes. Bernoulli (1700-1782) publia en 1740 une étude basée sur la théorie de Newton, mais sans résultat réellement intéressant, si ce n'est qu'en analysant les observations de marées faites à Brest entre 1714 et 1717, il trouva un rapport de 2,5, proche de la valeur théorique (2,18), entre les deux forces génératrices, lunaire et solaire.

Les découvertes fondamentales de Newton, bien que décevantes pour la prédiction de la marée, avaient néanmoins posé les bases pour les développements théoriques ultérieurs.

3.3 • Laplace, la théorie dynamique

Il fallut attendre près d'un siècle pour qu'un nouveau progrès fût réalisé dans l'explication du phénomène. Dans une théorie présentée à l'Académie Royale des sciences en 1775, Laplace (1749-1827) introduisit le potentiel générateur de la marée. Plus tard, il développa considérablement cette théorie en l'incluant en 1799 dans son traité de mécanique céleste. Il fut le premier à traiter la marée comme un problème de dynamique de masses d'eau et non pas comme un problème de statique.

Selon cette théorie dynamique, jamais remise en cause depuis, la réponse du niveau marin à la force génératrice de la marée prend la forme d'ondes diffuses se propageant à travers les océans avec une célérité dépendant de la profondeur. De plus, comme tout phénomène ondulatoire, ces ondes sont réfléchies, réfractées et dissipées en fonction de la nature du milieu de propagation et de la forme des bassins océaniques. Il s'ensuit que la marée observée en un point est le résultat de la superposition de toutes ces ondes élémentaires, arrivant de tous les points de l'océan en ayant rencontré, chacune sur son trajet, des conditions de propagation différentes. Toutes ces composantes peuvent évidemment interférer entre elles, renforçant ainsi les amplitudes à certaines fréquences ou au contraire les atténuant.

Les équations d'hydrodynamique posées par Laplace ne pouvaient se résoudre avec les moyens de calcul de l'époque. Cependant elles n'ont jamais été remises en question. Elles permirent ainsi d'établir la formule de Laplace, applicable aux prédictions, en s'appuyant sur deux principes essentiels :

— celui des oscillations forcées : les masses d'eau soumises à une force périodique exécutent des oscillations de même période,

— celui de la superposition des petits mouvements : le mouvement total d'un système soumis à de petites forces est égal à la somme des mouvements élémentaires.

Ces deux principes traduisent en fait l'hypothèse de la linéarité de la réponse des océans à la sollicitation de la force génératrice de la marée. Il se trouve que cette hypothèse soit assez bien vérifiée pour Brest dont les observations de marée furent utilisées par Laplace pour tester sa théorie. La force génératrice de la marée étant une somme de forces périodiques élémentaires, la formule de Laplace implique donc que la marée peut, elle-même, être décomposée en oscillations de mêmes périodes. L'hypothèse de linéarité n'est pas incompatible avec le fait que deux paramètres, le facteur de proportionnalité et le déphasage entre composante de marée et force génératrice correspondante, peuvent dépendre de la fréquence. Ces deux paramètres, qui dépendent aussi des conditions hydrauliques du lieu (la propagation de

l'onde de marée varie avec la profondeur), doivent en pratique être déterminés expérimentalement par l'analyse des observations disponibles de hauteur d'eau.

Un des aspects fondamentaux de la formule de Laplace est la mise en évidence, pour la marée engendrée par chacun des astres (Lune ou Soleil), de trois termes distincts correspondant chacun à des groupes de périodes d'oscillations, dénommés « espèces » par Laplace. Les premières espèces, dites « longues périodes », correspondent à la tranche de périodes allant de 7 jours à plus de 18 ans ; les secondes sont dites « diurnes » avec des fréquences centrées approximativement sur un cycle par jour lunaire (cpjl) et les troisièmes, dites « semi-diurnes » avec des fréquences autour de 2 cpjl.

Cette séparation est restée le fondement de la théorie dynamique de la marée. En utilisant notamment les observations de Brest effectuées de 1771 à 1776 et publiées par J.-J. de Lalande, il calcule les coefficients dépendants du site d'observation qui lui permettent de mettre au point une méthode de prédiction des heures des pleines et basses mers avec les hauteurs correspondantes de la marée au port d'observation. L'intérêt principal de la formule de Laplace a résidé surtout dans son aptitude à fournir une méthode pratique de prédiction des pleines et basses mers, dite Méthode de Laplace. C'est l'ingénieur hydrographe Chazallon qui, en 1839, publia le premier annuaire de marée calculé de manière scientifique. Les heures et hauteurs des pleines et basses mers à Brest étaient déterminées à l'aide de cette méthode. Pour les autres ports, elles étaient obtenues à l'aide des « concordances » avec la marée de Brest. Après quelques réticences initiales, dues au poids des habitudes, cet annuaire s'imposa rapidement auprès des navigateurs en remplacement des tables, établies empiriquement et diffusées dans différents almanachs, mais dont la précision laissait probablement beaucoup à désirer.

La formule de Laplace est restée à la base du calcul de l'Annuaire des marées des côtes de France pendant plus de 150 ans. Avant l'avènement des ordinateurs, aucune méthode concurrente n'a pu, en effet se prévaloir de fournir une meilleure précision pour le calcul de la marée de Brest. Pourtant, en raison de l'hypothèse de linéarité qui en est la base, cette formule ne pouvait prétendre être applicable universellement. En fait, elle n'a jamais été utilisée que pour le calcul de la marée de Brest. Bien que cette hypothèse de linéarité soit assez bien vérifiée pour ce port, il a fallu lui apporter quelques retouches pour corriger certains écarts systématiques, notamment ceux qui sont liés à la marée radiationnelle.

Par la suite, il faut noter les travaux des Anglais, Whewell et Airy, qui s'intéressèrent particulièrement à la propagation de l'onde marée, le premier dans les océans, le second dans les canaux et les rivières en tenant compte des frottements.

Mais il faudra attendre la fin du XIXe siècle, avec notamment les travaux de Sir William Thomson (Lord Kelvin), pour qu'un progrès décisif soit apporté au calcul des prédictions de marée.

3.4 • Kelvin, Darwin, Doodson : la méthode harmonique

Déjà Thomas Young (1773-1829) avait souligné l'importance de l'analyse de la totalité des observations du niveau de la mer et non seulement de celles des pleines et basses mers comme le faisait Laplace. Pour sa part, Airy apporta sa contribution en établissant les bases de l'analyse harmonique. Mais il revient à Kelvin le mérite d'avoir développé une méthode pratique d'analyse des observations de marée. En 1867, la « British Association for the Advancement of Science » (BAAS) mit en place un comité destiné à promouvoir l'amélioration et la généralisation de l'analyse harmonique des marées. Le premier rapport de ce comité fut rédigé par Kelvin lui-même et publié l'année suivante. D'autres rapports complémentaires parurent sur ce sujet. Cependant la contribution majeure fut le rapport publié en 1883 par G. H. Darwin. Ce dernier document présente, pour le potentiel générateur de la marée, un développement en composantes harmoniques, universellement utilisé et à la base de tous les travaux sur la marée depuis cette date.

Aujourd'hui encore, ces composantes harmoniques sont désignées sous les noms attribués par Darwin. En outre, ses méthodes de calcul, mises au point et adaptées aux moyens de l'époque, ont souvent été transposées telles quelles sur les ordinateurs. Pourtant son développement, qui repose sur une ancienne théorie lunaire dans laquelle tous les éléments sont rapportés à l'orbite, n'est pas entièrement satisfaisant car il n'est pas purement harmonique. En effet, l'introduction de facteurs correctifs a été nécessaire pour tenir compte de lentes variations des composantes du développement. Ces variations à long terme permettent de considérer les facteurs correctifs comme constants sur des durées de l'ordre de l'année. Calculés pour de nombreuses années, ces facteurs sont ainsi disponibles sous forme de tables. Le recours à ces tables n'est pas une solution satisfaisante pour la prédiction faite par ordinateur, mais ne constitue pas une gêne pour le calcul manuel.

C'est probablement la raison pour laquelle la méthode de Darwin a continué à être utilisée si longtemps, alors que dès 1921, un développement purement harmonique, donc plus satisfaisant, était disponible. C'est encore à un Anglais, A. T. Doodson que l'on doit ce progrès. Il publia dans les *Proceedings* de la Royal Society, un développement plus précis pour la longitude et la latitude de la Lune, coordonnées rapportées ici à l'écliptique et déterminées par Brown dans une nouvelle théorie lunaire (1905). Ce nouveau développement, purement numérique et harmonique, donne un bien plus

grand nombre de termes que celui de Darwin et, surtout, il ne nécessite pas de facteurs correctifs. Ainsi le recours à des tables n'est plus nécessaire et le traitement automatique en est considérablement amélioré.

D'autres développements, plus complets ou plus précis, ont été proposés depuis. Cependant, pour les applications pratiques en calculs de marée, ces derniers n'apportent pas de progrès significatif et le développement de Doodson reste la référence internationale.

3.5 • Les modèles

En matière de prédiction de marée, grâce aux travaux de Darwin et de Doodson, la méthode harmonique a été développée et poussée jusque dans ses derniers retranchements pour fournir une méthode pratique, précise et potentiellement de portée universelle. Cette dernière procédure n'est pas fondamentalement différente de la Méthode de Laplace en ce sens qu'elle s'appuie aussi sur une formulation théorique dont un certain nombre de paramètres sont à déterminer expérimentalement par l'analyse des observations disponibles. Pour obtenir une bonne précision, celles-ci doivent être de durée suffisante. À titre d'exemple, pour des variations de hauteur d'eau du même ordre de grandeur que celles observées sur les côtes françaises, Manche ou Atlantique, une année de mesures de bonne qualité est nécessaire à l'obtention de la précision requise pour les besoins de la navigation. Les résultats ne sont alors utilisables que pour le site où les observations ont été réalisées.

Une approche plus ambitieuse, consistant à résoudre directement le problème physique de la formation et de la propagation de l'onde de marée dans son milieu, a été envisagée depuis longtemps. Les pionniers en sont Bernoulli, Whewell, Poincaré et Harris. Mais compte tenu de la complexité de la bathymétrie et du trait de côte des bassins océaniques, il n'était pas envisageable d'obtenir une solution exacte à ce problème sans de puissants moyens de calcul. Des solutions analytiques ont néanmoins permis d'expliquer qualitativement les grands traits de la propagation de la marée dans des bassins océaniques comme celui de l'Atlantique. En particulier, l'existence de points amphidromiques, où l'amplitude de la marée est nulle et autour desquels tournent les lignes cotidales (figure 1.3), a pu être établie analytiquement.

Mais le développement de nouvelles méthodes numériques, avec l'avènement des ordinateurs, a véritablement permis de progresser dans cette direction. En particulier, les travaux de l'Allemand Hansen (1949) ont été à l'origine de nouvelles tentatives de résolution des équations de Laplace pour

l'océan réel. Les écarts et certaines incohérences dans les résultats de différents modèles (Bogdanov et Magarik, 1967 ; Pekeris et Accad, 1969 ; Hendershott, 1972 ; Zahel, 1977 ; Schwiderski, 1981) ont montré la nécessité d'améliorer, non seulement la connaissance du milieu, la forme et la bathymétrie des bassins océaniques, mais également d'affiner la mise en équation. En effet, des problèmes physiques et mathématiques majeurs, associés d'une part à la dissipation de l'énergie des marées (frottement sur le fond et création d'ondes internes de marée) et d'autre part aux méthodes numériques adoptées pour les modèles, restent toujours d'actualité.

Il convient de signaler enfin que l'altimétrie, la trajectographie et la géodésie satellitales ont suscité des besoins nouveaux de connaissance précise de la marée au large et provoqué un regain d'intérêt pour sa modélisation à l'échelle du globe. En particulier, l'altimétrie satellitale, qui fournit des mesures du niveau de l'océan mondial avec une précision quasi centimétrique, a permis la mise au point de modèles de marées plus réalistes par assimilation de cette abondante source de données.

4 • Divers aspects de la marée, définitions

4.1 • Courbe de marée

La représentation graphique en fonction du temps, soit de la mesure du niveau marin, soit de la prédiction de hauteur de la marée elle-même, est appelée courbe de marée. À titre d'exemple, la courbe de la figure 1.4 est déduite d'une prédiction sur 24 heures de la marée à Brest, qui est du type semi-diurne.

Ce graphe présente quatre extremums (deux minimums et deux maximums). Chaque minimum de la courbe s'appelle « basse mer » (BM) et chaque maximum « pleine mer » (PM). On appelle « étale » de pleine ou basse mer, le court laps de temps pendant lequel les variations de hauteurs demeurent insignifiantes. Il va de soi que cette définition est essentiellement subjective car il n'existe pas généralement de pallier au voisinage des pleines et des basses mers. De la basse mer à la pleine mer, le niveau s'élève pendant la phase appelée « flux » ou « montant » et il s'abaisse de la pleine à la basse mer pendant le « reflux » ou « perdant ».

La différence de hauteurs entre deux extremums consécutifs s'appelle le « marnage », à ne pas confondre avec « amplitude », qui désigne le module d'une fonction sinusoïdale telle que celle d'une composante de marée. Si le terme d'« amplitude » est parfois employé pour la marée, il désigne alors la moitié du marnage.

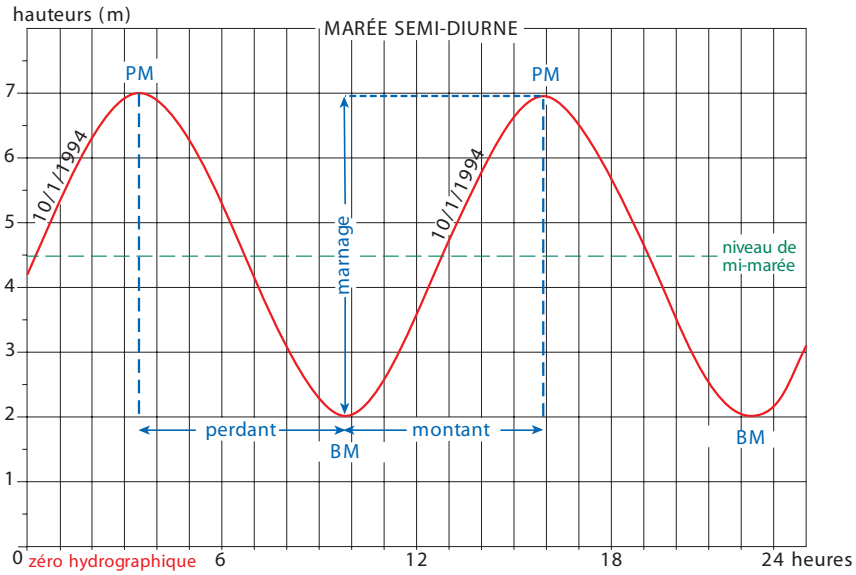


Figure 1.4 — Courbe de marée (prédiction) de type semi-diurne, deux pleines mers (PM) et deux basses mers (BM) par jour aux marnages quasi identiques : prédiction sur 24 heures à Brest, France.

Les hauteurs sont rapportées à un niveau de référence qui est généralement le « zéro hydrographique », encore appelé « zéro des cartes ».

La figure 1.5 représente un autre exemple type de courbe de marée semi-diurne déduite d'une prédiction sur la durée d'une lunaison, proche de 30 jours. Les variations du marnage sont très caractéristiques ; elles passent d'un minimum appelé « morte-eau » (ME) à un maximum appelé « vive-eau » (VE). Le « revif » correspond à la phase d'augmentation du marnage et le déchet à la phase de diminution.

L'intervalle de temps qui sépare une des phases de la Lune de l'extremum de marnage qui la suit immédiatement s'appelle âge de la marée. Les pleines et les nouvelles Lunes (PL et NL) sont suivies par les vives-eaux, les premiers et derniers quartiers (PQ et DQ) par les mortes-eaux.

4.2 • Types de marée

Au début du chapitre nous avons vu la distinction entre les différents types de marée qui est en partie arbitraire (figure 1.2). Une classification en trois types est souvent proposée, notamment par les Anglo-saxons. En France, c'est une classification en quatre types qui est retenue. Les exemples

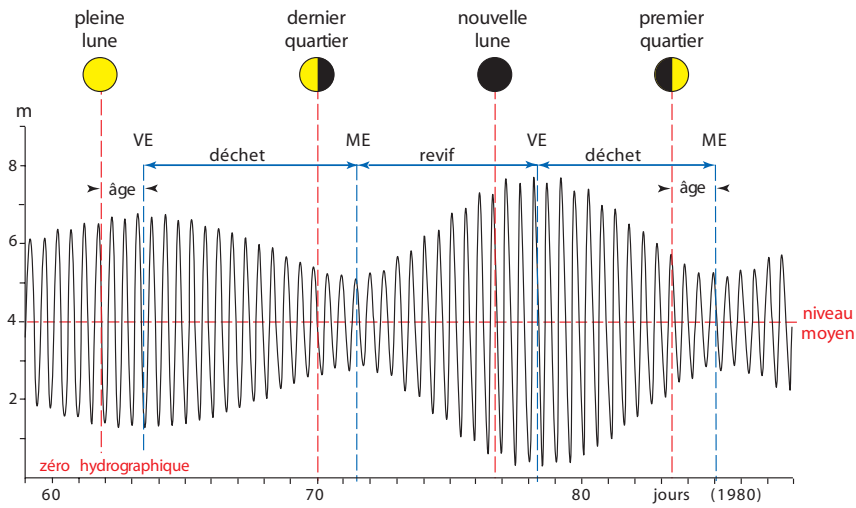


FIGURE 1.5 — Courbe de prédiction de marée de type semi-diurne sur une lunaison (29 jours) montrant les variations du marnage avec les phases de la Lune (Brest, France).

présentés ci-dessous en donnent une illustration :

a. Marée de type semi-diurne. — Brest, France, figure 1.4 et 1.5 ; Casablanca, Maroc, figure 1.6A. Les courbes de ce type de marée, déjà commentées pour Brest, montrent clairement chaque jour, deux pleines et deux basses mers ayant des hauteurs respectives sensiblement de même valeur, correspondant à des marnages quasi identiques. Ce type de marée est dominant dans l'Atlantique, en particulier sur les côtes africaines et européennes.

b. Marée de type semi-diurne à inégalité diurne. — Mui-Vung-Tau, Vietnam (côte sud), figure 1.6B. Sur la durée d'un jour lunaire, le marnage varie très sensiblement. L'écart entre grands et petits marnages, appelé inégalité diurne, est maximal lorsque la déclinaison des astres est voisine de leur maximum.

L'inégalité diurne est également observée sur les côtes d'Europe, bien que la marée soit qualifiée de semi-diurne, car cette inégalité reste faible. En revanche, elle est très forte en de nombreux ports du Pacifique et dans l'Océan Indien.

c. Marée de type mixte. — Qui-Nhon, Vietnam (côte est), figure 1.6C. Dans les ports à marée de type mixte, on observe successivement au cours d'une lunaison, une période où la marée est semi-diurne et une période où la marée est diurne. Ce type de marée se rencontre aussi sur les côtes

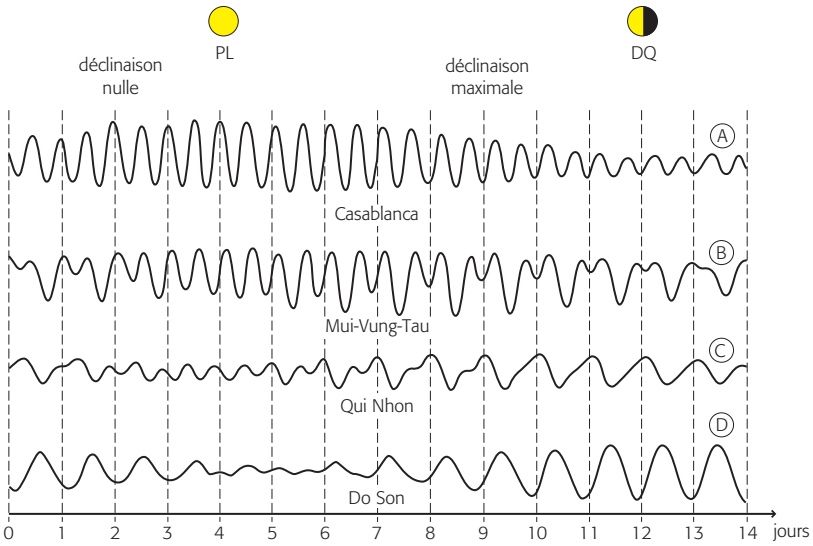


Figure 1.6 — Les quatre différents types de marée selon la classification française : courbes de marée issues d'une prédiction sur une demi-lunaison (14 jours). A : marée semi-diurne, B : marée à inégalité diurne, C : marée mixte, D : marée diurne.

d'Indonésie, de Sibérie et d'Alaska. Il se manifeste également en Atlantique, aux Antilles (Fort-de-France).

d. Marée de type diurne. — Do Son, Vietnam (côte nord), figure 1.6D. Sur les côtes où la marée est de type diurne, il n'existe qu'une seule pleine mer et une seule basse mer par jour lunaire. Le marnage associé varie avec la déclinaison des astres. Ce type de marée, assez rare, est observé surtout dans l'océan Pacifique, sur les côtes de Sibérie où son marnage est très important, en Alaska et aussi en Asie du Sud-Est.

Il est intéressant de constater la présence des trois derniers types de marée en des points relativement proches.

4.3 • Marée en eaux peu profondes

D'allure sinusoïdale au large en mer profonde, l'onde de marée se propageant atteint le plateau continental. Ensuite, en arrivant près des côtes et dans les estuaires, par faibles profondeurs, l'onde voit sa forme se modifier notablement. Ceci s'explique par le fait que les composantes périodiques de la marée, issues de la force génératrice, se combinent entre elles sur ces petits fonds, en créant des harmoniques qui peuvent se propager indépendamment. Les courbes de marée observée sur les côtes de la Manche (Portsmouth, Grande-Bretagne, figure 1.7A) et de la mer du Nord (Hoek

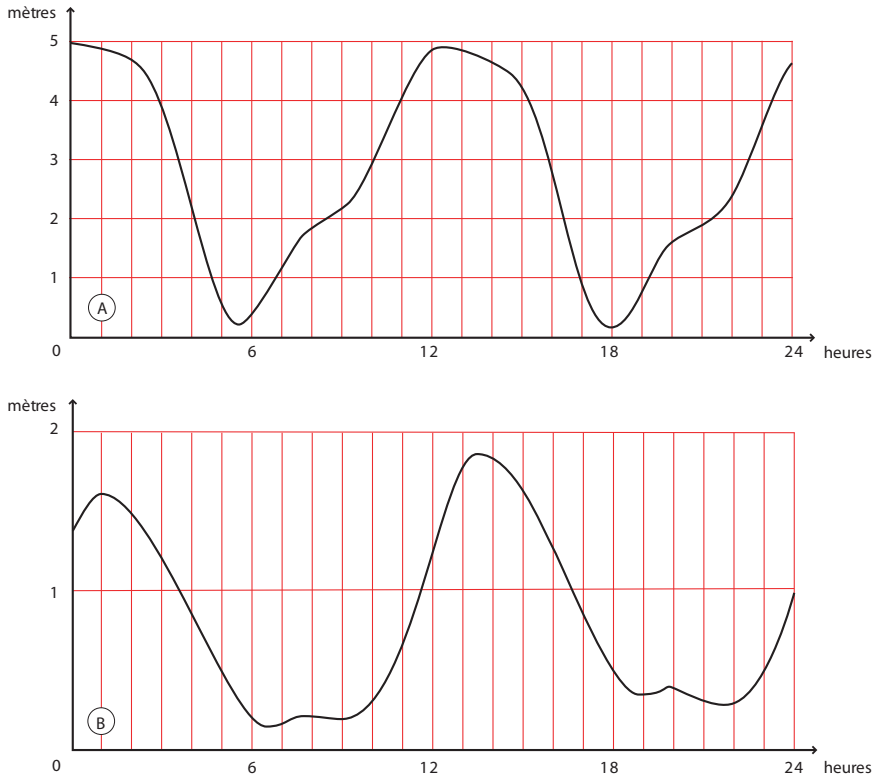


FIGURE 1.7 — Courbes de marée (prédiction) de petits fonds sur 24 heures. A : Portsmouth, Grande-Bretagne ; B : Hoek Van Holland, Pays-Bas. Les courbes de marées, qui au large présentent une allure sinusoïdale, sont déformées par la progression des ondes par faibles fonds.

van Holland, Pays-Bas, figure 1.7B) sont des exemples types pour des points atteints par l'onde, après une longue progression de celle-ci sur un plateau continental de faible profondeur.

Un autre exemple type de déformation par faibles fonds est celui de la marée lors de sa progression dans l'estuaire de la Gironde (figure 1.8). Cette modification est liée aux lois de l'hydrodynamique qui impliquent que la célérité c d'une onde hydraulique est fonction de la racine carrée de la profondeur, soit :

$$c = \sqrt{g(\mathrm{H} + h)}$$

où H est la profondeur moyenne du lieu, et h la hauteur de l'onde fonction du temps et de moyenne nulle.

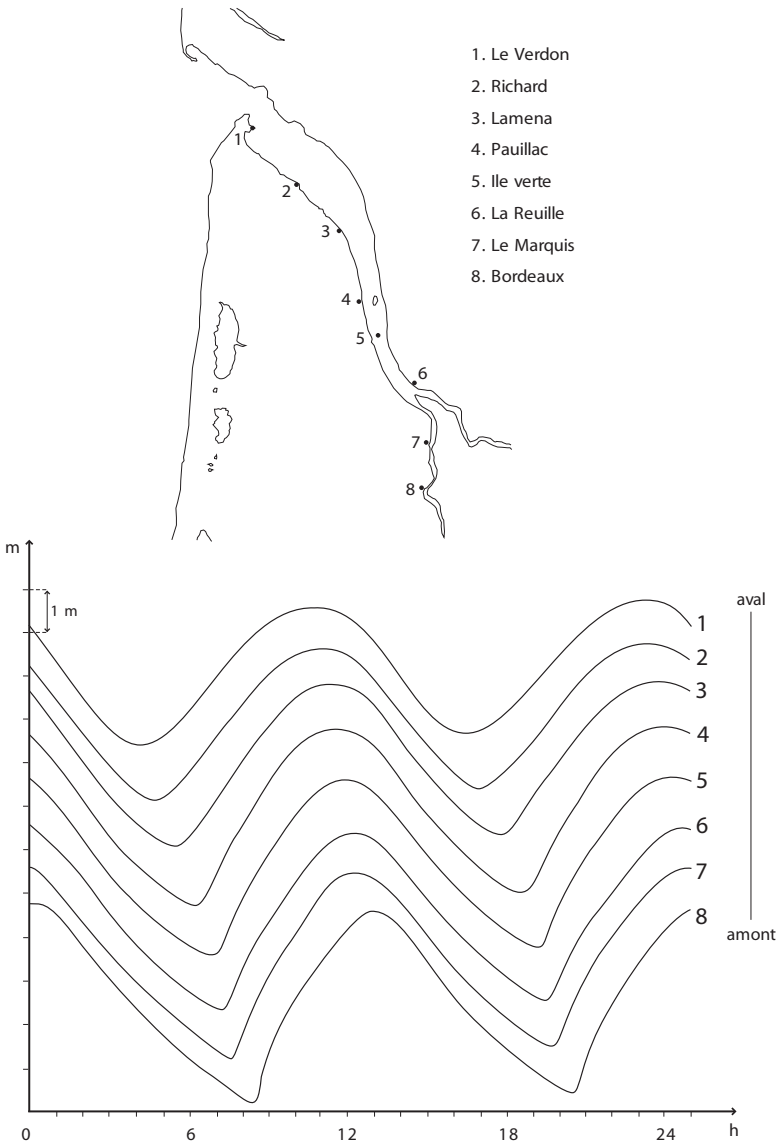


Figure 1.8 — Courbes de marée (prédiction) sur 24 heures en 8 points situés le long de l'estuaire de la Gironde (France) ; noter la déformation de la courbe lors de la propagation de la marée vers l'amont, du Verdon à Bordeaux.

Lorsque la profondeur H est grande, la différence d'amplitude $\delta h = h_{max} - h_{min}$ ne modifie pas de façon appréciable la vitesse de propagation. Au contraire, cette dénivellation n'est plus négligeable par profondeur H faible. Ainsi le sommet de l'onde avance plus vite que le creux. En d'autres termes, la crête de l'onde a tendance à rattraper le creux qui la précède. Comme le montre l'exemple de la Gironde (France, figure 1.8), ce phénomène est particulièrement net dans les estuaires. Dans les cas extrêmes, se forme un mascaret, grosse vague déferlante se présentant comme une « barre d'eau ». Ce phénomène est présent dans de nombreux estuaires de grands fleuves. Les hauteurs peuvent atteindre plusieurs mètres, notamment dans les estuaires du Qiantang-Jian (Chine ; près de 9 mètres aux équinoxes) et de l'Amazone (Brésil).

4.4 • Caractéristiques spectrales de la marée

Le spectre de la marée, bien qu'il résulte d'un calcul, n'est en réalité qu'un mode de représentation objectif du phénomène, indépendant de toute théorie relative à ce dernier. Compte tenu de la nature du signal étudié (les variations du niveau marin), c'est un mode de représentation particulièrement bien adapté auquel il sera fait sans cesse référence et avec lequel il importe de se familiariser. Nous ne nous attacherons pas ici à une définition exacte du spectre. Il importe seulement de savoir qu'il représente l'amplitude, ou l'énergie, en fonction de la fréquence ou de la période du signal analysé. Ce type de représentation spectrale à faible résolution (séparation imparfaite de fréquences voisines) montre l'évolution de la structure de la marée en passant de l'embouchure à l'amont d'un grand fleuve (la Seine, France : figures 1.9A et 1.9B). Ce changement de structure est lié à la progression de l'onde de marée par faibles fonds. Ces exemples montrent que la principale caractéristique des spectres de marée est la répartition de raies en groupes bien distincts et séparés par des intervalles de fréquences assez larges mais réguliers. Le groupe le plus important est le semi-diurne, celui qui correspond à deux cycles par jour lunaire (cpjl). Il paraît plus large que les autres, mais il s'agit en réalité d'un artefact dû au fait que la série analysée est de relativement courte durée.

Dans ces deux exemples, il convient de remarquer l'importance de l'énergie vers les basses fréquences, notamment pour celles qui sont inférieures à 4 cpjl. Une partie de cette énergie provient de la contribution des variations de hauteur d'eau induites par les perturbations atmosphériques.

Ces deux spectres (figures 1.9A et 1.9B) mettent clairement en évidence l'augmentation du nombre d'harmoniques lorsque l'onde de marée

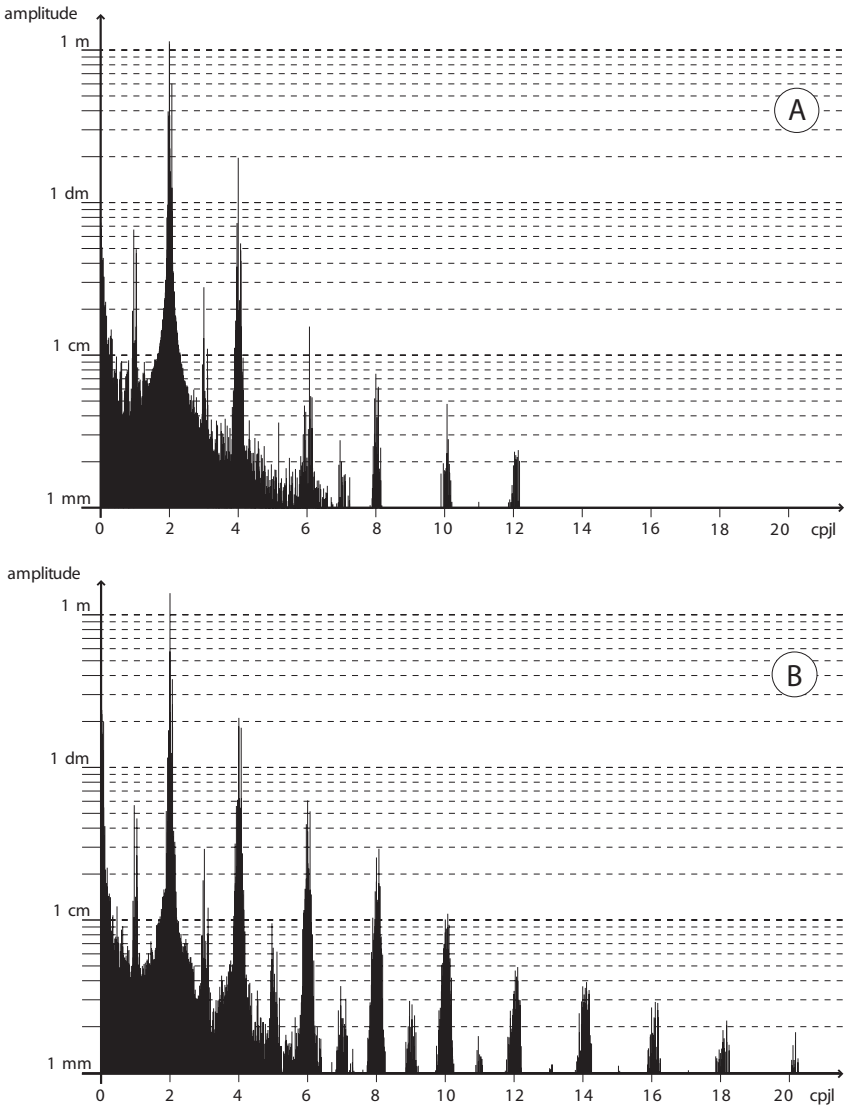


Figure 1.9 — Spectres de marée à faible résolution en eaux peu profondes (la Seine, France). A : balise A à l'embouchure, B : à Rouen, 100 km en amont environ. Ce type de représentation met en évidence la répartition de l'énergie autour des fréquences voisines d'un nombre entier de cycles par jour lunaire (cpjl).

progresse de l'embouchure vers l'amont. Le spectre amont donne une répartition de l'énergie jusque dans les fréquences très élevées. En fait, comme il s'agit d'un spectre de niveaux observés dans un fleuve (faibles fonds), des composantes harmoniques d'interaction se sont formées. En effet, seuls les trois premiers groupes (diurne, semi-diurne et tiers-diurne) appelés « espèces » représentent la majeure partie de la marée astronomique directement issue des actions de la Lune et du Soleil. Les autres groupes (ondes dites hydrauliques) sont engendrés, lors de la propagation de la marée vers l'amont du fleuve, par l'augmentation du nombre d'interactions des ondes entre elles.

Issue de l'analyse de plus de 120 années d'observations quasi continues, la signature spectrale à haute résolution du groupe semi-diurne à Brest donne un spectre de raies (figure 1.10). Il apparaît dans ce dernier spectre un grand nombre de composantes bien identifiées (pour la signification des caractères alphanumériques de chaque raie du graphique, il convient de se reporter au chapitre V et à l'annexe D). Ce résultat justifie tout l'intérêt de la représentation de la marée en série harmonique.

L'agrandissement de la partie du spectre voisine de la raie « M2 », onde lunaire principale, donne une meilleure illustration de la finesse de cette

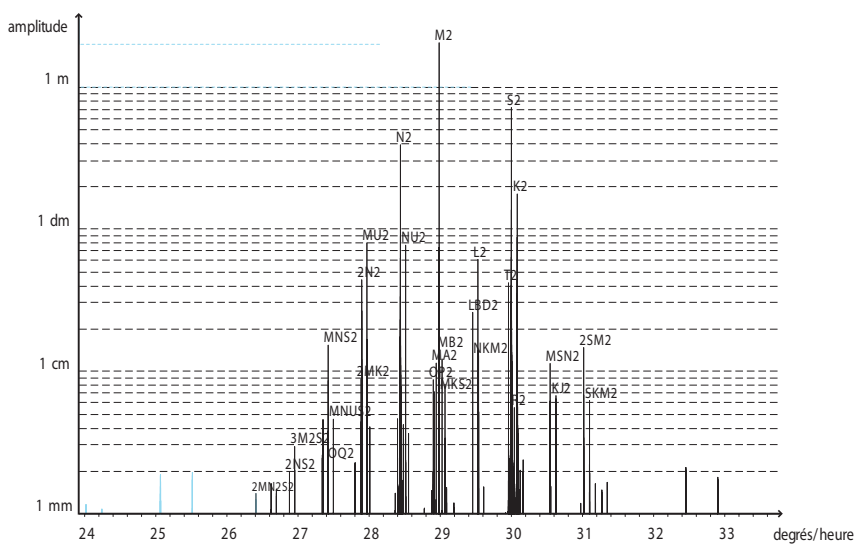


Figure 1.10 — Spectre « haute résolution » du « groupe semi-diurne » à Brest mettant en évidence les raies caractéristiques de la marée astronomique.

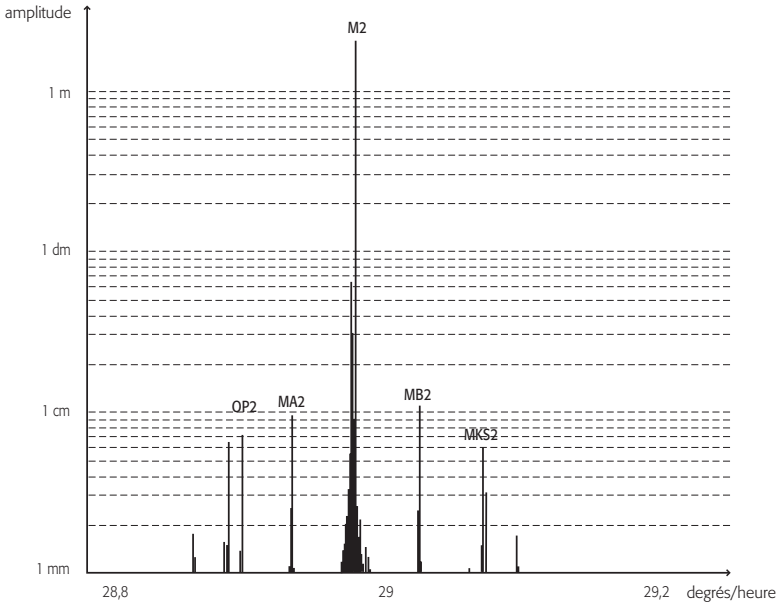


Figure 1.11 — Spectre au voisinage de la composante principale semi-diurne M2 à Brest, mettant en évidence une structure très fine, responsable de modulations à longue période.

structure (figure 1.11). Il est vrai que la plupart de ces composantes sont de faible amplitude. On imagine sans peine qu'il serait possible d'en négliger quelques-unes. En réalité, il faut se garder d'éliminer toutes ces petites composantes, sous prétexte qu'elles auraient toutes les chances de se compenser lorsqu'on les combine pour reconstituer la marée. En effet, le système des trois corps, constitué par le Soleil, la Terre et la Lune, ne possède que six degrés de liberté. Il en résulte que toutes ces petites composantes sont issues de ce système et ne sont pas indépendantes entre elles. Chacune prise individuellement pourrait être négligée, mais par leur nombre, elles cumulent une énergie non négligeable.

4.5 • Courants de marée

La marée est un mouvement oscillatoire comparable à la houle dans les couches superficielles de l'océan. Dans les deux cas et en première approximation, les molécules d'eau décrivent dans un plan vertical des trajectoires fermées, caractérisées par des fréquences et des longueurs d'onde qui leur sont spécifiques. Mais, à la différence de la houle, la marée a toujours une longueur d'onde bien supérieure à la profondeur. Dans un océan homogène

et profond, le mouvement dû à la marée intéresse toute la hauteur d'eau. Toutes les molécules d'une même verticale décrivent des orbites sensiblement égales et extrêmement aplaties. Le mouvement vertical constitue la marée proprement dite ; les mouvements horizontaux, incomparablement plus importants forment les courants de marée. Ces courants sont généralement plus intenses sur le plateau continental (faibles fonds) qu'au large (grands fonds).

Dans un océan stratifié en densité, des ondes internes de marée apparaissent, notamment près des talus continentaux, et modifient la structure verticale des courants. Dans les cas extrêmes, comme par exemple le détroit de Gibraltar, les courants provoqués par ces ondes internes, essentiellement semi-diurnes, sont parfois de sens opposé entre la surface et le fond. Ces ondes internes contribuent, tout comme le frottement sur le fond, à la dissipation de l'énergie de la marée.

L'étude des courants de marée est réalisée en partie avec les mêmes outils que ceux de la marée, mais elle présente plus de difficultés au moins pour deux raisons : d'une part, la grande variabilité spatiale de leurs caractéristiques et, d'autre part, leur moins grande régularité dans le temps sous l'influence de facteurs météorologiques. La très forte intensité des courants de marée en certains endroits (près des côtes ou dans les détroits) justifie leur étude pour l'élaboration de documents d'aide à la navigation, tâche importante des services hydrographiques.

Les moyens de calcul actuels permettent une modélisation fine des courants de marée. Cette méthode est de plus en plus utilisée pour élaborer les cartes de courant en fonction de l'heure de la marée. L'exemple de la figure 1.12, représentant les courants autour de l'île de Batz trois heures après la pleine mer à Roscoff (Bretagne, France), est tiré d'un document d'aide à la navigation, particulièrement précieux en ces zones où les courants de marée sont parfois violents.

Le dernier chapitre de cet ouvrage sera consacré spécialement à ces courants de marées et à leur modélisation.

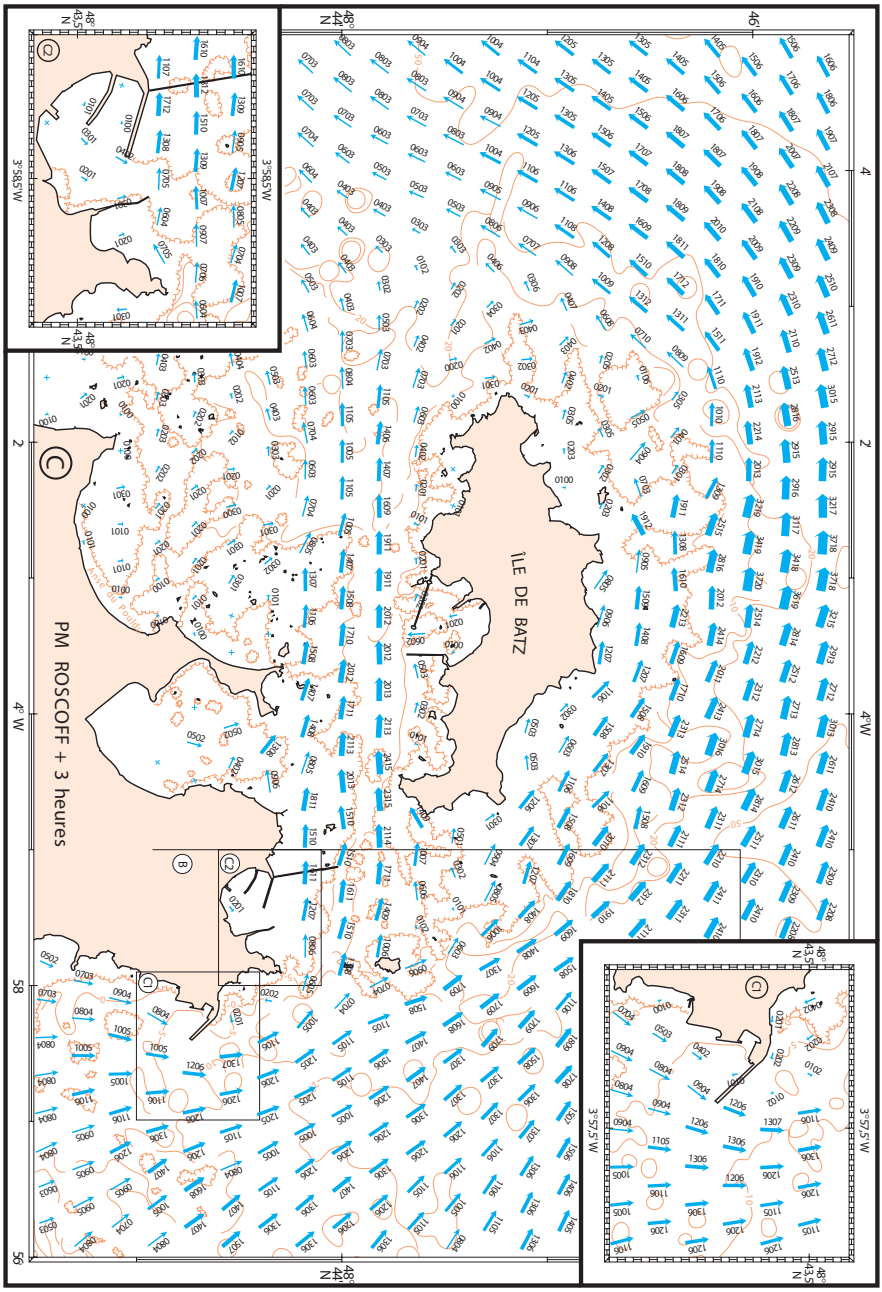


Figure 1.12 — Exemple de résultats issus de la modélisation des courants de marée autour de l'île de Batz, Bretagne, France trois heures après la pleine mer à Roscoff : les flèches matérialisent par leur longueur et leur épaisseur la vitesse des courants. Les nombres surmontant les flèches indiquent les vitesses des courants en dixièmes de nœuds, en vives eaux moyennes (deux premiers chiffres) et en mortes eaux moyennes (deux derniers chiffres).

II
La marégraphie

Par son étymologie, le terme « marégraphie » se rapporte à la description du phénomène de marée et aux instruments qui, par leurs mesures, en ont permis une meilleure connaissance. Ainsi dans cette partie, après une revue des besoins de cette discipline, une attention particulière sera d'abord donnée au « puits de tranquillisation », dispositif contraignant mais nécessaire à l'obtention de mesures de qualité avec les capteurs usuels. Les principaux systèmes d'étalonnage et d'observation seront décrits ensuite, depuis la classique échelle de marée qui reste toujours la référence jusqu'au radar altimétrique issu des techniques spatiales.

1 • Buts de la mesure du niveau marin

La connaissance précise des variations du niveau de la mer, tout particulièrement près des côtes, constitue un objectif important pour la détermination de la marée, tant pour la navigation que pour les études de l'environnement océanique. Les informations utilisées à ces diverses finalités se distinguent par la précision requise, l'échantillonnage des mesures dans le temps et les modalités d'exploitation.

Le besoin nouveau de mesures très précises émane surtout de la communauté scientifique, alors que le réseau d'observatoires existants résulte essentiellement des besoins de la navigation maritime.

De ce réseau mis en place, découle la source presque exclusive de mesures marégraphiques nécessaires à la prédiction de la marée et à la correction des sondages hydrographiques.

L'utilisation de ces observations à d'autres fins, scientifiques ou appliquées (étude d'ouvrages côtiers, offshore ou autres), se heurte à des difficultés

liées aux diverses modalités de mesures et d'exploitation. Les problèmes d'harmonisation des systèmes de mesure pour satisfaire tous les besoins sont de ce fait non seulement techniques mais également structurels et financiers.

1.1 • Navigation maritime côtière

Les premières demandes d'information sur la hauteur de la mer sont venues des besoins de la navigation près des côtes et de l'accès dans les ports à marnages conséquents. Il faut souligner que la caractéristique principale de cette demande est l'accessibilité à la mesure en temps réel ou très peu différé.

Pour satisfaire ce besoin, traditionnellement l'utilisateur obtient l'information par vision directe :

— soit de l'échelle de marée, disposée à l'entrée des ports ou le long des chenaux dans la partie maritime des fleuves ;

— soit, dans les ports importants, de signaux effectués de jour, par un jeu de cônes et de cylindres, et de nuit, par un jeu de feux verts, rouges et blancs.

Des réalisations plus modernes ont été développées dans certains estuaires où les hauteurs d'eau à différents observatoires sont transmises aux navires par voie hertzienne, en phonie VHF notamment.

Il faut avoir présent à l'esprit que l'incertitude sur les hauteurs d'eau se répercute intégralement sur les pieds de pilote, marges de sécurité entre le fond de la mer et celui du navire. Par ailleurs, en raison d'une part des coûts d'exploitation des gros navires (l'attente sur rade étant très onéreuse) et d'autre part, de la nécessité de rentabiliser les infrastructures portuaires, les Services Maritimes et les pilotes sont de plus en plus exigeants sur la qualité des mesures marégraphiques. Actuellement, la précision requise est de l'ordre de cinq centimètres (± 5 cm).

1.2 • Bathymétrie des cartes marines

L'élaboration de la bathymétrie des cartes marines nécessite la correction de la marée sur les sondages hydrographiques ; cette opération, appelée réduction des sondages, sera traitée plus loin au chapitre IX.

Pour établir cette réduction, les mesures nécessaires ont longtemps été fournies par des marégraphes à flotteur portatifs, placés en vue de côte. Ils présentent l'inconvénient d'exiger une structure fixe verticale, installation souvent incompatible avec la proximité de la zone de sondage. Par ailleurs, les mesures ainsi acquises s'avèrent trop souvent de qualité médiocre.

Des marégraphes pneumatiques à échappement continu sont parfois utilisés pour cet objectif ; le choix du site est alors moins contraignant.

Cependant la mise en œuvre, au cours des missions hydrographiques, n'est pas toujours effectuée avec tout le soin voulu pour obtenir des mesures de qualité.

Pour cette application, des systèmes à capteur de pression (immergés et posés sur fond) dits « marégraphes de fond », sont de plus en plus adoptés. Leur rattachement au réseau de nivellement est obtenu par quelques lectures d'une échelle de maréeervation seront décrits ensuite, depuis la classique échelle de marée, disposée si possible à proximité. Pour les sondages éloignés de la côte, ces marégraphes servent également à mesurer la marée sur zone. Cependant pour obtenir la hauteur d'eau, l'exploitation des mesures issues de ces capteurs nécessite des corrections de pression atmosphérique et de densité d'eau de mer. Par ailleurs, ces appareils interdisent l'accès à la mesure en temps réel, commodité qui pourrait parfois être utile à l'exploitation des sondages tout en permettant le contrôle du bon fonctionnement des capteurs. Malgré l'existence de certains prototypes permettant la transmission des données sur interrogation ponctuelle, le besoin se fait sentir d'un instrument dont les caractéristiques principales seraient, outre la qualité du capteur, la robustesse (facilitées de transport et de mise en œuvre) et l'accès à la mesure en temps réel avec possibilité de télétransmission.

1.3 • Prédiction de la marée

Pour établir les annuaires de marée, les calculs de prédiction nécessitent des séries de mesures marégraphiques de qualité. Des erreurs systématiques dans les observations, résultant par exemple de mauvais calages (en temps ou en hauteur) des systèmes d'enregistrement, peuvent affecter gravement la précision de la prédiction.

Le plus fréquemment, une année de mesures horaires suffit au calcul d'une prédiction de bonne qualité pour les besoins de la navigation.

Par contre, lorsque l'onde de marée a progressé par faibles fonds sur de grandes distances (plateau continental ou estuaires), le calcul de certaines composantes harmoniques, provenant d'interactions non linéaires, exige plus de quatre années d'observations.

Dans tous les cas de figure, 19 années de mesures permettent une analyse optimale, mais il est très rare de disposer de données marégraphiques de qualité sur une aussi longue période.

Pour certains sites, il est parfois possible de se contenter de durées inférieures à une année, par exemple lorsque l'amplitude de la marée est si faible qu'une prédiction même imprécise est suffisante, ou lorsque l'utilisation de constantes de rattachement est possible par la présence d'un port très proche

où une prédiction précise est facilement réalisable. Un mois d'observations peut alors s'avérer suffisant à condition que les mesures soient de très bonne qualité. Il est alors préférable de les effectuer au cours de l'été, car elles sont moins perturbées par les phénomènes météorologiques qui affectent le niveau marin.

Les séries de mesures horaires permettent d'explorer le spectre de fréquences jusqu'aux douzièmes diurnes, ce qui est suffisant dans la grande majorité des cas. Cependant, pour certaines marées fluviales, des cadences d'échantillonnage plus rapides peuvent être nécessaires, car dans certains estuaires, de l'énergie est détectable au-delà des 30e diurnes (voir par exemple le spectre du niveau de la Seine à Rouen, figure 1.9B).

1.4 • Études diverses

Les données marégraphiques sont également utilisées à d'autres fins que l'hydrographie. Les mesures nécessaires aux autres applications se distinguent essentiellement par les exigences requises en matière de précision, cadence d'acquisition et durée.

1.4.1 • Études météo-océaniques et climatiques

En chaque point de l'océan, au large comme à la côte, le niveau marin est affecté par des processus physiques étroitement interdépendants comme, par exemple, la densité de l'eau (fonction de la température et de la salinité), les courants locaux autres que la marée, les fluctuations de la circulation océanique, les vagues, la pression atmosphérique ou le vent. La mesure du niveau marin comporte donc la signature de chacun de ces phénomènes et peut de ce fait apporter une contribution à leur étude.

1.4.2 • Niveaux extrêmes

Les études de projets (infrastructures portuaires, ouvrages côtiers ou plates-formes pétrolières) ont en commun le besoin de connaître le niveau maximum ou minimum susceptible d'être atteint par la mer sur de très longues durées (le siècle si possible). Les hauteurs atteintes par la marée étant considérées comme connues, il convient d'étudier dans ce cas la probabilité d'apparition de surcotes et de décotes. De telles études exigent également de longues séries de mesures de bonne qualité.

1.4.3 • Modèles de propagation des ondes le long des côtes

Le calage et la validation des modèles de propagation de la marée et des ondes de tempête, le long des côtes et sur le plateau continental, requièrent des mesures marégraphiques pour définir les conditions aux limites du modèle. Pour les limites ouvertes du large, se pose alors le problème de

l'accès à des mesures de niveau marin sur des fonds de plusieurs centaines de mètres.

Nous avons vu ci-dessus que, pour les besoins de la bathymétrie, cette technique de mesure est maîtrisée pour le plateau continental avec des profondeurs inférieures à 200 m. Mais pour la modélisation à l'échelle des bassins océaniques, la maîtrise de l'observation marégraphique par très grandes profondeurs, de l'ordre de plusieurs milliers de mètres, requiert une compétence et des moyens financiers nécessitant en général une coopération entre plusieurs organismes.

1.4.4 • Niveau moyen des mers

L'évolution, à plus ou moins long terme, du « niveau moyen » des mers peut par exemple fournir des informations fondamentales sur le rôle climatique des océans et leur circulation générale. Mais le réseau mondial traditionnel d'observatoires de marée présente pour ces études des défauts importants : il est inhomogène (concentration dans l'hémisphère boréal) et mal adapté au suivi de la dynamique générale des océans. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de recourir à l'implantation de marégraphes spécifiques pour ce type de mesures.

Il est généralement admis que le niveau global des océans s'élève d'environ 1 mm à 2 mm par an, mais les estimations du taux d'augmentation diffèrent sensiblement suivant les auteurs. Ce désaccord traduit en fait l'ignorance des causes exactes de cette hausse, et en particulier, la part à attribuer à l'effet de serre, dû à l'accroissement du taux de gaz carbonique d'origine industrielle dans l'atmosphère. Cependant, les mesures du satellite *Topex-Poséidon* donnent une élévation moyenne de l'ordre de 2 mm/an entre 1993 et 2000. Mais cette élévation n'est pas uniforme sur l'ensemble de l'océan mondial : il existe des différences régionales de ± 20 mm/an.

La réponse à cette question d'élévation de niveau nécessite le positionnement des marégraphes dans un repère unique, l'ellipsoïde de référence par exemple. Aussi de plus en plus d'observatoires marégraphiques sont dotés de systèmes de positionnement géodésique faisant appel aux techniques spatiales.

En 1984, le Comité de travail mixte COI/OMM pour le Système mondial intégré de surveillance des océans (SMISO) a lancé un projet pilote international en vue de l'échange opérationnel des données relatives au niveau moyen de l'océan Pacifique (ISLPP). Le centre exécutif de ce programme, basé à l'université d'Hawaï, assure la production et la diffusion rapides, dans un délai de quatre semaines, des cartes mensuelles de ce niveau.

Il faut signaler plus particulièrement le *Global Sea Level Observing System* (Gloss), programme international sous l'égide de la Commission technique conjointe d'Océanographie et de Météorologie marine (JCOMM) de l'Organisation météorologique mondiale et de la Commission océanographique intergouvernementale (COI). Gloss tend à pallier les défauts du réseau traditionnel d'observation marégraphique en promouvant la mise en place d'un réseau de qualité, à la fois global et régional pour les besoins de la recherche en océanographie et climatologie. La principale caractéristique de Gloss est *le Global Core Network* (GCN) de près de 300 stations marégraphiques réparties dans le monde pour le suivi des évolutions du climat et du niveau marin. Ces stations sont supposées fournir des observations de niveau avec une précision centimétrique, référencées dans un système géodésique global. Elles sont disponibles *via* internet auprès de l'université d'Hawaï *Sea Level Center,* ou le *Permanent Service for Mean Sea Level* (PSMSL), ou le *World Ocean Circulation Experiment* (WOCE).

1.4.5 • Amélioration des prédictions de marée par petits fonds

Les méthodes traditionnelles d'analyse et de prédiction sont mises en défaut dès que l'onde de marée est très déformée par des processus non linéaires comme, par exemple, le frottement sur le fond et l'advection qui deviennent notables lorsque les variations de hauteur de marée sont comparables à la profondeur moyenne de la mer.

Les méthodes de prédiction, adaptées et utilisées en zones d'estuaire, tiennent compte des variations de débit des cours d'eau. Elles nécessitent des séries d'observations du niveau marin de bonne qualité, échantillonnées toutes les dix minutes.

1.4.6 • Réseaux d'alerte

Certains réseaux d'observatoires du niveau de l'océan se coordonnent entre eux pour prévenir les populations demeurant près des rivages qui peuvent être soumis à des cataclysmes naturels comme les ondes de tempête et les tsunamis. Les deux réseaux les plus connus sont implantés, le premier, en Mer du Nord pour l'alerte des ondes de tempête particulièrement dangereuses sur les côtes orientales de Grande-Bretagne et les Pays-Bas, et le second, dans le Pacifique où l'Université d'Hawaï est responsable du « Tsunami Warning ».

1.4.7 • Étalonnage de l'altimétrie satellitale

Le développement des techniques spatiales a fait apparaître un besoin accru de données marégraphiques. Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre précédent, les radars altimétriques embarqués sur satellites atteignent

actuellement des précisions quasi centimétriques pour la mesure du niveau marin. Cependant, la nature de l'échantillonnage de l'altimètre et la mauvaise connaissance du géoïde près des côtes nécessitent le raccordement de la mesure satellitale à celle d'un marégraphe situé à la verticale de l'orbite. Dans ce cas, comme pour l'étude de l'évolution à long terme du niveau des mers, le positionnement géodésique des marégraphes est d'une absolue nécessité.

2 • Le puits de tranquillisation

La plupart des observatoires marégraphiques nécessitent l'implantation d'un puits, dit de tranquillisation, communiquant avec la mer extérieure par un orifice situé au-dessous du niveau des mers les plus basses, éventuellement prolongé par un conduit dont la longueur est fonction de la topographie du site. C'est un dispositif contraignant mais nécessaire à plusieurs titres. Sa finalité première est de filtrer les fluctuations de niveau liées aux vagues, à la houle ou aux seiches (oscillations de niveaux des bassins portuaires ou des baies), afin d'y obtenir une surface horizontale dont l'altitude soit identique à l'altitude du niveau extérieur, moyennée sur un laps de temps égal au temps d'échantillonnage de la mesure. Par ailleurs, la présence d'un puits de tranquillisation permet de mettre à l'abri des intempéries les systèmes de mesures. Même les instruments les plus robustes seraient rapidement mis hors d'usage sans cette protection, tout particulièrement dans les endroits très exposés.

Cependant, le système hydraulique constitué par le puits de tranquillisation présente l'inconvénient de ne pas être un filtre linéaire. Aussi convient-il d'examiner les erreurs liées à la réponse interne de ce système en fonction des variations externes du niveau de la mer. Cette question est développée dans l'annexe C.

2.1 • Autres erreurs liées au puits

Outre l'erreur intrinsèque (indépendante du système de mesure) liée à la nature de la réponse du système hydraulique que représente le puits de tranquillisation, d'autres causes d'erreurs (également indépendantes du système de mesure) ayant des origines diverses peuvent intervenir et introduire un biais dans la réponse.

Rappelons celles évoquées dans l'annexe C, qui ne dépendent pas du puits lui-même mais de la nature de milieu dans lequel il est immergé. L'envasement et les concrétions (liées au développement de la vie marine) sont particulièrement à surveiller au voisinage de l'orifice et dans le conduit. Une

obturation partielle, se traduisant initialement par un déphasage sans modification sensible de l'amplitude, est souvent indécelable *a priori*, mais elle compromet souvent gravement la qualité des mesures avec un rétrécissement progressif avec le temps. En raison de ces problèmes, une inspection et un nettoyage annuels du conduit de communication sont nécessaires.

2.1.1 • Erreurs dues aux différences de densité

La différence de densité de l'eau entre l'extérieur et l'intérieur du puits représente une autre cause d'erreur qui doit être prise en compte pour les mesures très précises. Au cours d'un cycle de marée, la température et la salinité des eaux côtières peuvent varier de façon importante particulièrement en période estivale et près de l'embouchure des cours d'eau. Le fait que la communication ne s'effectue que par un petit orifice, le complet renouvellement de l'eau du puits n'est jamais assuré. La communication se faisant au bas du puits, l'eau qui a pénétré à marée montante est souvent plus dense que celle qui est à l'extérieur à immersion égale. Dans le puits, il en résulte alors un niveau plus bas qu'à extérieur. Inversement, si l'eau de plus faible densité qui a pénétré dans le puits à marée basse et qui y est retenue (sans pouvoir se renouveler), l'effet contraire se produit : l'eau dans le puits est plus légère et le niveau plus élevé qu'à l'extérieur. Avec les notations de l'annexe C (figure C.1), posons $\delta h = h_p - h$ et $\delta\rho = \overline{\rho}_p - \overline{\rho}$ l'écart des masses volumiques (moyenne sur la hauteur d'eau à partir de l'orifice du puits) entre l'eau du puits et la mer extérieure. La différence de niveau dans l'hypothèse hydrostatique est

$$\delta h = (z_0 + h)\frac{\delta\rho}{\overline{\rho}_p} \approx (z_0 + h)\frac{\delta\rho}{\overline{\rho}}. \tag{2.1}$$

Avec un puits profond d'une dizaine de mètres (grands marnages), un écart relatif du millième sur la masse volumique induit une différence de hauteur du centimètre.

Une autre cause d'erreur, liée aux écarts de densité et souvent méconnue, provient de la condensation de la vapeur d'eau atmosphérique sur les parois de puits profonds et de grand diamètre. Le ruissellement qui s'ensuit crée dans le puits une couche d'eau douce superficielle qui a tendance à s'accroître avec le temps si l'évaporation n'est pas suffisante. L'écart relatif des masses volumiques entre l'eau de mer et l'eau douce étant de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$, l'accumulation d'une couche de 1 m dans un puits profond induirait une surcote de 3 cm par rapport au niveau de la mer externe.

Ce n'est pas une pratique courante de mesurer la répartition verticale des densités dans le puits d'un marégraphe d'une part et à l'extérieur du puits

d'autre part. Il existe cependant des techniques modernes permettant de le faire sans difficulté. Dans les installations destinées à fournir des mesures précises pour des applications scientifiques, cette pratique pourrait être utile, au moins à titre de vérification, en complément des lectures à l'échelle et à la sonde lumineuse.

Dans les estuaires également, des écarts de niveaux liés aux variations de densité se rencontrent d'une manière quasi systématique. Dans une rivière à marée, par exemple, la densité de l'eau du puits est inférieure à la densité externe et les écarts de niveau peuvent atteindre alors plus de 6 cm pour 2 m d'amplitude.

2.1.2 • Erreurs dues aux courants au voisinage de l'orifice

Les mouvements de l'eau au voisinage de l'orifice (courants permanents ou de marée, vitesses orbitales de la houle ou des vagues) provoquent, par effet Venturi (dépression créée par le resserrement des lignes de courants autour du puits), des variations de pression indésirables qui agissent sur la cote du niveau à l'intérieur du puits (annexe C). Cet effet Venturi aurait pu être pris en considération dans l'équation du puits, mais la formulation de cette dernière en aurait été beaucoup plus complexe.

Cette dépression, créée à l'entrée de l'orifice, est maximale lorsque le plan de ce dernier est parallèle à l'écoulement en amont du puits, provoquant ainsi un abaissement du niveau intérieur qui peut atteindre près de 20 cm avec un courant amont de 1,5 m/s $\approx$ 3 nœuds (figure 2.1). Les diverses courbes de cette figure montrent que des améliorations de plus en plus judicieuses peuvent réduire l'erreur de mesure. En agissant sur la forme et la disposition de l'orifice dont les caractéristiques sont visibles sur les figurines, il est ainsi possible de réduire de plus d'un ordre de grandeur l'erreur correspondante. La solution optimale pour un puits avec orifice (sans conduit) est représentée par la figurine et la courbe indexées par la lettre *g* de la figure 2.1. Cette configuration est celle qui a été adoptée notamment sur les puits australiens du réseau marégraphique du Pacifique (figure 2.2).

Signalons aussi que des écarts de pression atmosphérique entre l'extérieur et l'intérieur de l'observatoire (où est implanté le puits de tranquillisation) peuvent se produire : dépressions créées par vents forts (effet Venturi autour de l'abri) ou surpression due au réchauffement de l'air interne si l'abri est trop étanche. Ces écarts induisent en général des erreurs de l'ordre du centimètre. À notre connaissance, aucune étude systématique de cette erreur n'a été réalisée.

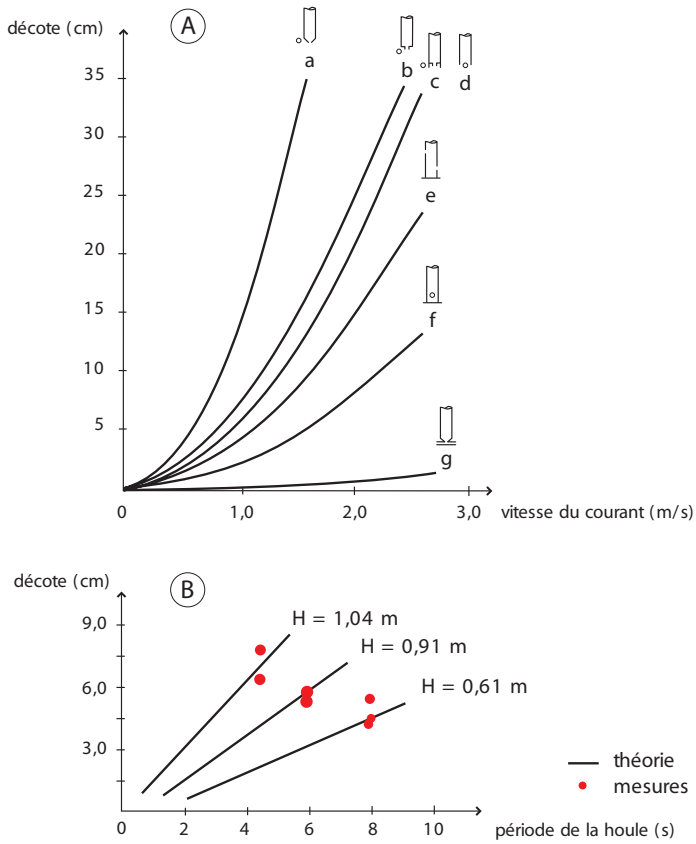


Figure 2.1 — Abaissement du niveau dans le puits de tranquillisation, dû aux courants (Source : G. W. Lennon, 1967).

Fort heureusement, tous les défauts signalés ci-dessus correspondent à des cas extrêmes. Ils sont généralement peu importants, voire négligeables pour les très forts marnages, dans les sites portuaires où les marégraphes sont protégés, tant de la houle que des courants et de l'envasement. S'il s'avère parfois que les écarts entre l'extérieur et l'intérieur du puits présentent un caractère systématique, ils sont généralement faibles. Il serait alors inopportun, sous prétexte de pallier ce défaut, de modifier une installation ayant fonctionné pendant des décennies, au risque de gêner l'observation de phénomènes à longue période. Celui-ci se traduit en fait par des écarts de hauteurs dont l'origine n'est pas fondamentalement différente de celle, par exemple, d'une dénivellation systématique qui peut exister entre l'intérieur et l'extérieur d'un port, d'une rade ou d'une baie.

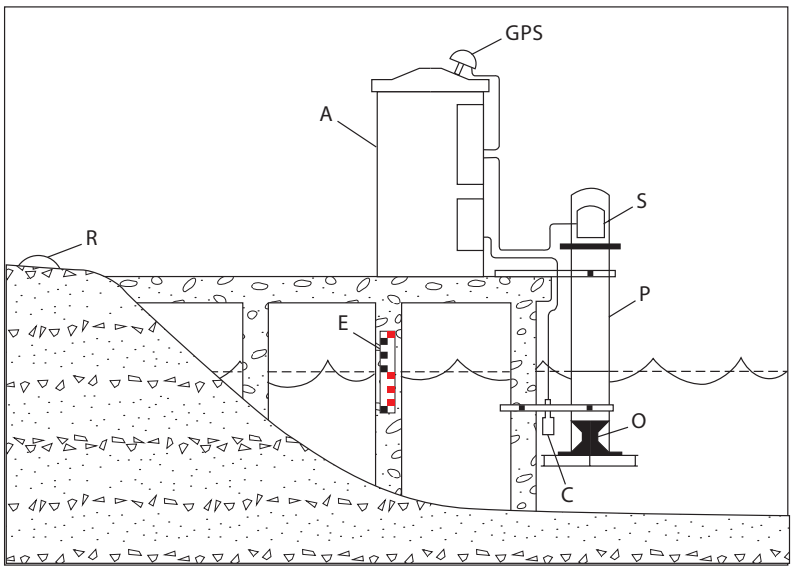


Figure 2.2 — Schéma d'un observatoire marégraphique de type « Seaframe » (Australie). A : abri pour l'enregistreur et le transmetteur ; C : capteur de pression ; E : échelle de marée ; GPS : antenne pour le positionnement du site par télémétrie satellitale ; O : orifice du puits (noter la forme en tube de Venturi et la plaque de protection contre les vagues) ; P : enveloppe de l'ensemble du puits de tranquillisation ; R : repère terrestre (point géodésique) ; S : sondeur ultrasonique (Source : IOC Manuals and Guides).

3 • Les systèmes de mesure traditionnels

L'implantation d'un puits de tranquillisation est une nécessité pour établir un observatoire marégraphique permanent au voisinage d'une côte. Les nombreux marégraphes permanents, gérés par les Services Hydrographiques, sont essentiellement localisés dans les zones portuaires ou le long des estuaires navigables. Les mesures des installations temporaires sont généralement exploitées par l'hydrographie à des fins ponctuelles et de courtes durées.

De nombreuses techniques sont utilisées pour mesurer la hauteur de la mer. Les plus anciennes restent encore très courantes, voire irremplaçables, comme l'échelle de marée. L'utilisation des marégraphes à flotteur est toujours d'actualité, mais les enregistrements graphiques, dits analogiques, ont tendance à disparaître au profit de systèmes automatiques d'acquisition de données numériques.

Du fait que les nouvelles techniques soient relativement récentes (quelques décennies), les longues séries temporelles disponibles sur le

niveau marin, (requises pour détecter les évolutions à long terme) sont encore issues pour l'essentiel des observations et mesures obtenues avec les instruments classiques que sont l'échelle de marée et les marégraphes à flotteur.

Dans un premier temps, ces deux derniers instruments seront présentés en examinant la qualité et la précision des mesures respectives. Les systèmes plus récents feront l'objet de la partie 4 du présent chapitre.

3.1 • La référence : l'échelle de marée

La lecture directe du niveau sur l'échelle de marée est à la source des premières données marégraphiques. Parmi les plus anciennes connues, figurent celles de Brest. De 1711 à 1717, ces mesures, relevées de jour au voisinage des pleines et basses mers, ont été utilisées par Laplace pour élaborer sa théorie dynamique de la marée.

Comme nous l'avons déjà signalé au début du chapitre (1.1. « Navigation maritime côtière »), l'échelle peut être utilisée directement comme aide à la navigation. Actuellement, sa finalité première est de permettre l'étalonnage et le contrôle du niveau mesuré par les autres systèmes de mesures.

En effet, pour être conforme aux normes relatives à la mesure du niveau de la mer pour l'hydrographie (normes définies par le BHI, Bureau Hydrographique International), un observatoire permanent doit comporter obligatoirement une échelle de marée. Celle-ci demeure l'unique instrument de lecture directe du niveau externe au puits, ce qui en fait l'instrument de base pour le contrôle global du niveau mesuré à l'intérieur (bon fonctionnement du puits et validation des mesures enregistrées). Pour assurer un bon contrôle, il convient de fixer l'échelle de marée à proximité immédiate de l'observatoire.

Le matériau de construction et l'emplacement de l'échelle doivent suivre les règles du bon sens. Le matériau doit résister à la corrosion et être facile à nettoyer afin d'assurer une lecture correcte de la graduation. Quant à son implantation, il faut éviter les sites à risques (destruction ou détérioration) ou les endroits cachés par les navires à quai. Il est important, en outre, que l'échelle soit verticale. Si cela s'avère impossible (cas des quais ou des jetées présentant un certain fruit), la graduation établie devra restituer les hauteurs réelles.

Bien que cela ne soit pas une règle absolue, l'ajustement du zéro de l'échelle au niveau du zéro hydrographique est recommandé pour éviter toute mauvaise interprétation de la part d'usagers non avertis.

FIGURE 2.3 — L'échelle de marée : les carrés, de couleur rouge ou noire, ont 10 centimètres de côté.

La figure 2.3 présente un exemple de réalisation d'échelle de marée : la graduation, tous les 10 cm, est réalisée par une succession de carrés, rouges ou noirs, ayant un intervalle blanc de même dimension. Le groupement par séries alternées de trois carrés d'une même couleur permet l'estimation immédiate du mètre. La résolution de 10 cm peut paraître grossière, mais l'évaluation du quart de graduation (±2,5 cm) est relativement aisée ; une meilleure précision serait illusoire compte tenu des vagues et du clapotis presque toujours présents. Le calage précis en hauteur de la mesure indiquée par les marégraphes enregistreurs est obtenu par la moyenne de plusieurs lectures de l'échelle de marée.

Dans certains cas, particulièrement dans les zones à forts marnages, il peut s'avérer impossible de poser une seule échelle couvrant la totalité de la variation de hauteur. Deux échelles au moins sont alors nécessaires ; l'échelle de pleine mer sera adossée par exemple à un quai, l'échelle de basse mer étant implantée à un endroit non découvrant.

La lecture de l'échelle est parfois difficile, notamment en présence de vagues où il est d'usage de prendre la moyenne des valeurs successives extrêmes (hautes et basses). Cependant, les vagues n'ayant pas un profil sinusoïdal, mais davantage trochoïdal (la cote des crêtes étant supérieure à la décote des creux), il faut prendre conscience que cette méthode donne une valeur supérieur à celle du niveau réel.

La cote de l'échelle de marée est établie par rapport à un minimum de trois repères fixes à terre. Ils sont choisis suffisamment éloignés les uns des autres afin d'éviter leur destruction simultanée, lors par exemple de travaux portuaires. L'un d'entre eux est sélectionné comme repère fondamental ; un repère du nivellement terrestre est habituellement recommandé pour ce rôle. Leurs cotes respectives, par rapport au zéro hydrographique et au nivellement terrestre (s'il existe), sont consignées dans une fiche avec des plans et éventuellement des photos pouvant aider à retrouver ces repères.

3.2 • Le marégraphe a flotteur

L'invention du premier marégraphe à flotteur à enregistrement graphique (figure 2.4) est habituellement attribuée à un ingénieur anglais, Henry Palmer, en 1831 mais ce prototype n'a jamais servi à recueillir des mesures continues de longue durée. En France, il revient à l'ingénieur hydrographe Chazallon, auteur de l'annuaire des marées des côtes de France en 1839, d'avoir mis au point en 1842 l'un des premiers marégraphes à flotteur opérationnel. En 1859, il y en avait une dizaine en fonction sur le littoral français.

Cet appareil peut donc être considéré comme le marégraphe enregistreur

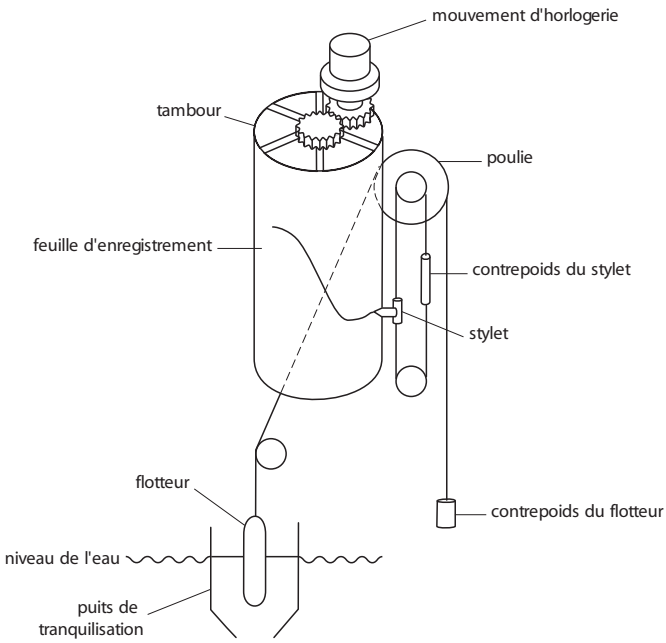


Figure 2.4 — Schéma d'un marégraphe à flotteur avec son enregistreur graphique.

traditionnel, et même aujourd'hui, il est encore très répandu malgré l'évolution des techniques. Le flotteur est situé dans un puits de tranquillisation, généralement surmonté d'un abri contenant l'enregistreur graphique, le tout constituant une protection efficace contre les intempéries. Ces instruments sont généralement fiables et peu sophistiqués. Si une grande précision n'est pas nécessaire, ils ne requièrent pas un personnel très qualifié pour leur entretien et leur mise en œuvre.

Cependant, bien qu'ils souffrent d'un certain nombre de défauts associés d'une part au puits de tranquillisation, et d'autre part au mécanisme et à la numérisation des marégrammes, leurs mesures représentent la source presque exclusive des données historiques du niveau marin disponibles actuellement dans le monde. La modernisation du système d'enregistrement a permis l'acquisition numérique de la mesure sur support informatique.

3.2.1 • Le marégramme

Le premier mode d'enregistrement adopté pour cet appareil est le graphe de la hauteur de la mer en fonction du temps. Un stylet assure le tracé sur une feuille quadrillée, enroulée sur un tambour dont la rotation est régulée par une horloge. Ce graphe, appelé marégramme, représente une courbe dite de marée. Il convient de signaler que la dénomination « marégramme », consacrée par l'usage, ne représente pas la marée elle-même mais l'évolution du niveau marin dont la marée est généralement la composante majeure.

Si le mouvement du tambour effectue une révolution par 24 heures, il est possible d'obtenir plusieurs jours de mesures sur la même feuille graphique. En effet, la marée étant principalement dominée par le mouvement de la Lune et le jour lunaire étant plus long que le jour solaire d'environ 50 minutes, les courbes sont décalées les unes par rapport aux autres (figure 2.5). Pour une marée de type semi-diurne, il est ainsi possible de laisser la feuille en place pendant deux semaines. Au-delà de cette durée, les courbes peuvent se chevaucher en partie et entraîner des erreurs au moment de la numérisation du graphe. Cette négligence est à l'origine de la perte de nombreuses données (enregistrements inexploitables).

Plusieurs sources d'erreurs peuvent affecter ce type d'enregistrement :

— pour la mesure de la hauteur : mauvais calage vertical de la feuille lors de son changement sur le tambour ; variations de l'échelle de hauteur de la feuille graphique sous l'effet de l'humidité ou de la température ;

— pour la mesure du temps : mauvais calage horizontal au changement de feuille, souvent lié au rattrapage de jeu du tambour ; feuille non conforme au diamètre du tambour induisant une variation cyclique de l'échelle des

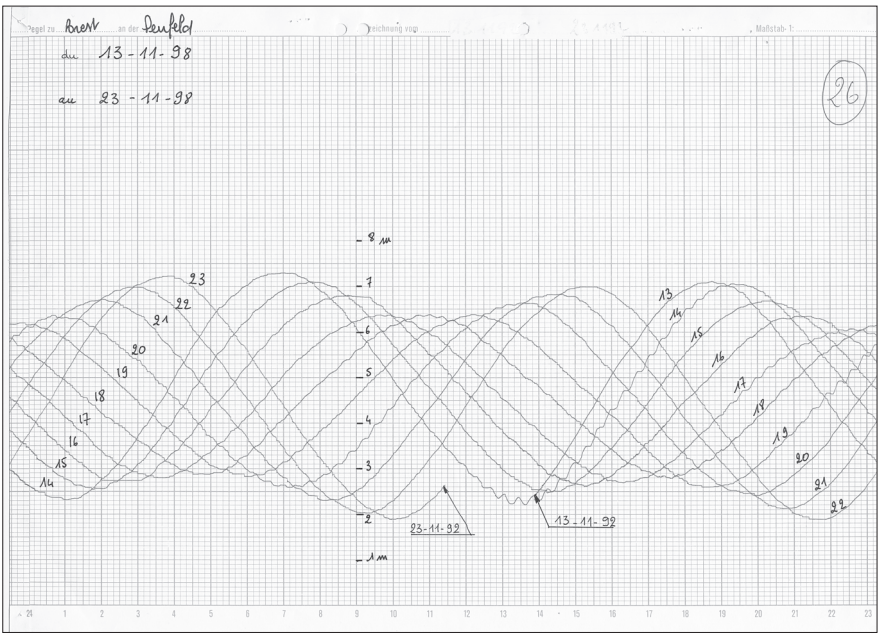


Figure 2.5 — Marégramme obtenu sur un tambour animé d'une période de révolution de 24 heures. La différence de 50 minutes entre jour lunaire et jour solaire permet de laisser les feuilles en place quelques jours, sans chevauchement des courbes enregistrées (mesures du 13/11/1998 au 23/11/1998, Brest, France).

temps ; marche irrégulière de l'horloge ; fluctuations de la rotation du tambour liées aux défauts des engrenages d'entraînement.

Bien que chacun de ces défauts puisse être important, tous peuvent êtres corrigés par des contrôles réguliers effectués avec soin.

Pour certaines erreurs de mesure du temps, il est possible de tirer profit, par exemple, des mouvements de la Lune et du Soleil connus avec une très grande précision, qui sont à même de constituer une excellente horloge pour rectifier ce type d'erreurs.

Les erreurs de calage en hauteur sont plus difficiles à corriger et peuvent parfois passer inaperçues. Elles ne sont détectables en effet que par des comparaisons avec les mesures issues des observatoires voisins ou par la mise en évidence de discontinuités flagrantes sur le marégramme.

3.2.2 • La numérisation du marégramme

Pour pallier les inconvénients liés à la numérisation manuelle des marégrammes, résultant de la nécessité de disposer de valeurs numériques sur support informatique, des systèmes de saisie directe ont été développés. La

numérisation passe nécessairement par un codage du signal analogique qui peut être réalisé de diverses manières, l'une des plus sûres étant le codage optique de la rotation d'un disque solidaire de la poulie entraînée par le flotteur. Un autre système également répandu mais probablement moins fiable utilise un potentiomètre dont la tension mesurée sur le curseur est transformée en fréquence.

Ces systèmes sont alors doublés, soit d'un enregistrement sur bande magnétique (la bande perforée un moment utilisée a été abandonnée), soit d'une transmission de la mesure par voie hertzienne ou par le réseau téléphonique vers un enregistreur situé à distance. Tous ces raffinements requièrent des compétences supplémentaires, et l'expérience prouve qu'en cas de panne, l'enregistrement graphique constitue un recours indispensable pour récupérer les données.

La numérisation du marégramme s'effectue en général en relevant la hauteur à chaque heure ronde, cadence habituellement suffisante pour les analyses de marée. Dans les centres ayant à traiter de nombreux marégrammes, ce travail est facilité par l'utilisation d'une table à numériser permettant la saisie directe sur support informatique de chaque hauteur pointée par un opérateur.

Les enregistrements doivent être accompagnés d'une feuille de contrôle de marégraphe (figure 2.6) sur laquelle sont inscrites, à des instants donnés, les hauteurs lues par l'opérateur, soit à l'échelle de marée, soit à la sonde lumineuse.

Une source d'erreur non négligeable provient de la mauvaise interprétation des feuilles de contrôle quand elles n'ont pas été remplies avec tout le soin nécessaire.

Un autre défaut de la numérisation, manuelle ou semi-automatique, des marégrammes est le caractère routinier et peu gratifiant de ce travail qui peut engendrer un manque de motivation, lui-même générateur d'erreurs.

3.2.3 • Les contrôles de bon fonctionnement

La précision de la mesure dépend essentiellement du soin avec lequel sont effectués les différents contrôles de bon fonctionnement sur le site du marégraphe. Nous avons vu que de trop nombreuses négligences dans ce domaine sont à l'origine de la qualité médiocre des mesures et même de la perte de nombreuses données.

Une cadence d'inspection tous les deux ou trois jours est recommandée, le contrôle hebdomadaire, souvent pratiqué, ne devant être considéré que comme un pis-aller.

L'opération consiste simplement à comparer les indications données par

Feuille de contrôle de marégraphe

Semaine du 13.11.92 au 23.11.92 Lieu : Brest Derfeld

Nom de l'observateur Bureau Navée

Marégraphe 216				Sonde lumineuse	
				Cote P de la plate forme au dessus du zéro des sondes :	
Date	Heure de la montre	Hauteur lue sur le marégramme	Heure indiquée sur le marégramme	Tirant d'air T	Hauteur vraie P-T
13.11.92	1411	270	1410		270
23.11.92	1123	262	1125		274

Échelle de marée Cote du zéro de l'échelle au dessus du zéro des sondes :

Date	Heure de la lecture	Hauteur lue sur l'échelle	Hauteur vraie	Hauteur lue sur la sonde lumineuse	Météo (Hauteur du clapot, vent)

Observations

Figure 2.6 — Un exemple de feuille de contrôle (du 13/11/1992 au 23/11/1992, Brest, France).

le marégraphe à celles qui sont obtenues à partir d'indicateurs indépendants réputés exacts. Pour la vérification du temps, la référence peut être un garde-temps quelconque, le plus souvent la montre de l'opérateur, évidemment supposée correctement réglée.

Les précautions à prendre au moment du changement de feuille revêtent une importance particulière. Après avoir ajusté une nouvelle feuille graphique sur le tambour et placé la plume à la hauteur exacte, l'opérateur doit impérativement attendre l'amorce du tracé avant de noter les heures respectives de sa montre et du marégramme, afin d'éviter ainsi l'erreur de calage en temps liée au jeu des engrenages d'entraînement du tambour.

Lors des contrôles intermédiaires, les interventions sur le marégraphe ne seront pratiquées qu'en cas de panne ou de dysfonctionnement flagrant, à l'exclusion de toute rectification du calage en temps ou en hauteur.

La vérification de hauteur se fait normalement par comparaison avec les lectures de l'échelle de marée. La sonde lumineuse, qui est un ruban métallique gradué, équipé à la base d'un contact électrique qui se ferme dès qu'il touche l'eau, provoquant ainsi l'allumage d'une lampe est souvent utilisée également.

Ces deux contrôles sont souhaitables car ils sont complémentaires. La sonde lumineuse permet une meilleure précision, mais utilisée dans le puits, elle ne teste qu'une partie de l'installation. L'échelle de marée permet une mesure directe et constitue donc la meilleure référence possible. Cependant, comme nous l'avons vu plus haut, l'existence de vagues et de clapotis ne permet que très rarement une précision meilleure que $\pm 2{,}5$ cm sur une seule lecture.

Les résultats de tous ces contrôles sont consignés sur une feuille prévue à cet effet (figure 2.6).

3.2.4 • L'identification des erreurs de mesure

Une maintenance préventive et des contrôles réguliers devraient éviter les erreurs de mesure, mais il peut arriver que l'on ait à traiter des enregistrements marégraphiques provenant d'observatoires qui ne satisfont pas toujours aux critères de qualité conformes aux normes requises. Certaines erreurs sont difficiles à détecter (stabilité du zéro de la référence en hauteur), mais d'autres défauts de dysfonctionnement du marégraphe à flotteur sont décelés par différents tests, dont celui de Van de Casteele (figure 2.7).

En ce qui concerne la stabilité du zéro, son contrôle mérite une attention particulière, car les erreurs de mesure correspondantes sont difficiles, voire impossibles à détecter. Tout particulièrement, si elles sont permanentes ou cycliques en l'absence de contrôles réguliers. Les causes principales en sont

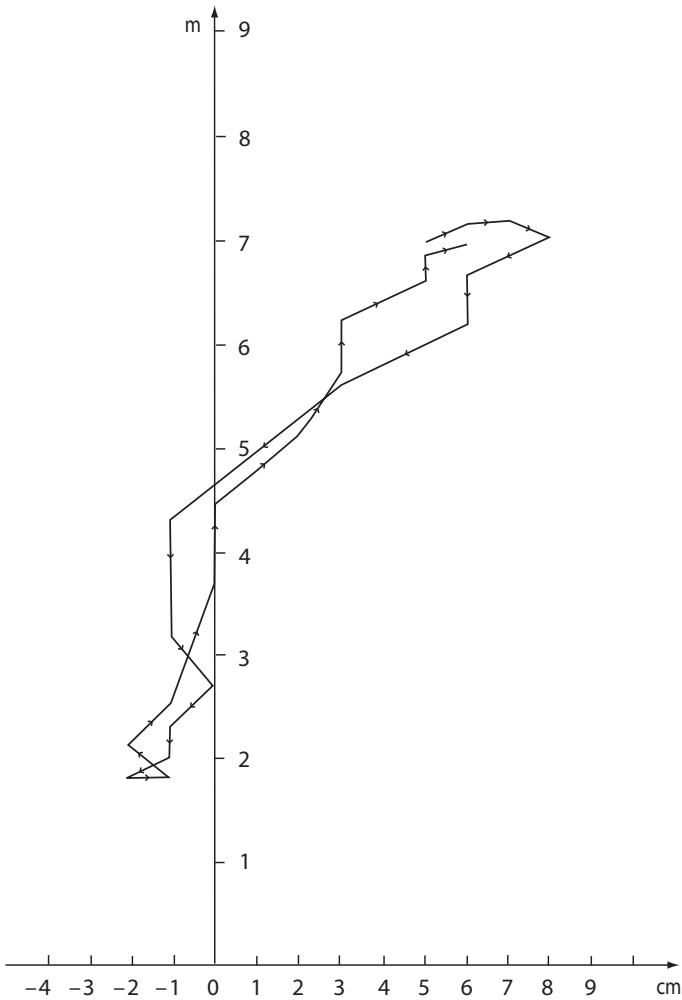


Figure 2.7 — Test de Van de Casteele : sur un cycle de marée, la courbe retrace l'évolution de l'écart (porté en abscisses) entre la mesure du capteur ultrasonique (MCN) et celle du marégraphe à flotteur (OTT 20030), en fonction de la hauteur mesurée par le MCN (en ordonnées). En l'absence de défaut, la différence aurait dû être nulle dans ce cas de figure. Mesures du 9/9/1990 à 20h00 au 10/9/1990 à 9h00.

la feuille d'enregistrement mal ajustée en hauteur sur le tambour et les mouvements verticaux soit de la construction réalisée (le quai par exemple) pour supporter tout le système, soit des éléments de fixation. Il est évident que l'on ne mentionnera pas comme erreur de mesure le fait que le sol lui-même puisse bouger sous l'effet de mouvements sismiques ou tectoniques. Il est en effet admis que la mesure marégraphique est relative au support du marégraphe, mais à condition toutefois que celui-ci ne subisse pas de modifications dues à l'activité humaine ou aux intempéries (tempêtes, inondations). Il convient notamment de s'attacher à la détection des modifications qui provoqueraient des déplacements verticaux des repères de référence, tout particulièrement ceux qui sont situés à proximité de structures portuaires récentes. On voit ici l'intérêt de choisir plusieurs repères éloignés les uns des autres.

La plupart des autres erreurs ou dysfonctionnements du marégraphe à flotteur sont mis en évidence par le test de Van de Casteele. Cette opération nécessite l'utilisation de la sonde lumineuse. La réalisation de ce test consiste à relever la valeur du tirant d'air dans le puits sur tout un cycle de marée et de comparer cette série de mesures à l'enregistrement correspondant du marégraphe à contrôler. En l'absence de défaut de fonctionnement du marégraphe, la somme des deux mesures doit rester constante.

Ce test peut également être réalisé à l'aide de deux marégraphes de même type ou de types différents dont l'un sert de référence, les deux instruments mesurant le niveau du même puits (si celui-ci est assez grand) ou les niveaux de deux puits voisins. Au cours de cette comparaison, c'est la différence des mesures qui doit rester constante. Cette constante devrait être nulle dans le cas où les enregistreurs ont des zéros représentant la même référence. La comparaison des mesures de deux marégraphes (figure 2.7), le OTT à flotteur et le MCN ultrasonique (la référence), donne un exemple de défaut fréquent des marégraphes à flotteur. À partir d'une certaine hauteur, il se produit un changement de facteur d'échelle, qui est dû vraisemblablement à un chevauchement de spires sur l'enrouleur de câble. Dans l'exemple donné, à partir de 4,5 m de hauteur environ, le marégraphe à flotteur donne une indication inférieure à la mesure du capteur ultrasonique, le module de cet écart croissant alors approximativement de 2,5 cm/m.

Le test de Van de Casteele permet de détecter également :

— un jeu dans le mécanisme,

— un facteur d'échelle inadapté : échelle graphique différente du facteur de réduction,

— une coque dans le câble du flotteur ou dans celui du stylet,

— une entrave ou un frein au libre mouvement du flotteur à un certain niveau du puits,

— un glissement du câble sur la poulie.

L'interprétation du diagramme permet généralement de localiser aisément l'origine du défaut de fonctionnement éventuel.

4 • Les systèmes de mesure modernes

Il est peu de disciplines dans le domaine de la physique où s'offre un si grand choix de systèmes de mesure dont plusieurs ont effectivement fait l'objet de développement et d'application en matière de marégraphie. Le choix d'un tel système dépend de nombreux facteurs ; le moindre coût global (matériel et maintenance) est souvent déterminant au détriment parfois des performances souhaitées.

En outre, la configuration du site d'implantation est également un facteur à prendre en compte. Les types de capteurs et d'enregistreurs ne seront pas les mêmes d'une part pour les sites côtiers, où l'implantation d'un puits est possible (ports, estuaires, zones de faibles fonds) afin de protéger ces nouveaux systèmes des intempéries, et d'autre part pour ceux du large (plateau continental et grands fonds), qui nécessitent des équipements annexes pour leur immersion et leur récupération.

4.1 • Les marégraphes à capteur de pression

Les premiers marégraphes à capteur de pression ont fait leur apparition avec les marégraphes pneumatiques, la différence entre la pression d'échappement de l'air à une immersion déterminée et la pression atmosphérique étant mesurée par un manomètre différentiel à mercure dans un observatoire à terre.

Mais c'est l'évolution technologique qui a véritablement permis l'essor de capteurs de pression de faibles dimensions, en particulier les jauges de contrainte et les quartz piézoélectriques. Dès lors, il a été possible de concevoir des marégraphes posés sur le fond (marégraphes dits « de fond ») ayant une autonomie énergétique suffisante pour assurer un enregistrement numérique de longue durée pouvant dépasser l'année. Ces appareils sont très utilisés en hydrographie, soit pour mesurer la hauteur de marée à proximité des lieux de sondage, soit pour déterminer les conditions aux limites de modèles numériques de marée ou de courant sur une zone déterminée du plateau continental (jusqu'à des profondeurs en général inférieures à la centaine de mètres).

4.1.1 • Principe de la mesure

Considérons le capteur de pression posé sur le fond de la mer. Soit :

— H : la profondeur du lieu de la mesure (immersion moyenne du capteur),

— $h(t)$: la variation du niveau marin, fonction du temps t et de moyenne nulle $\overline{h(t)} = 0$

— $\mathrm{H} + h(t)$: la hauteur d'eau au-dessus du capteur,

— $p(t)$: la pression mesurée par le capteur,

— $p_a(t)$: la pression atmosphérique au niveau de la mer,

— $\overline{\rho}$: la masse volumique moyenne de l'eau de mer (fonction de la température, de la salinité, l'effet de la pression étant négligé pour les immersions inférieures à quelques centaines de mètres) sur la hauteur $\mathrm{H} + h(t)$,

— g : l'accélération de la pesanteur,

La pression donnée par le capteur est ainsi égale à la somme de la pression atmosphérique et de la pression hydrostatique, soit :

$$p(t) = p_a(t) + \overline{\rho} g[\mathrm{H} + h(t)]$$

La hauteur d'eau au-dessus du capteur de fond est donc :

$$\mathrm{H} + h(t) = [p(t) - p_a(t)]/\overline{\rho} g \tag{2.2}$$

Certains appareils mesurent directement la pression différentielle $p(t) - p_a(t)$ qui est égale à la pression hydrostatique de la colonne d'eau. Mais il faut alors que la mesure de la pression atmosphérique soit disponible au niveau du capteur différentiel par l'intermédiaire d'une prise d'air, ce qui est difficilement réalisable lorsque l'appareil est immergé loin du rivage. Par ailleurs, dans certaines applications, notamment dans le domaine de l'océanographie physique, c'est la pression $p(t)$ qui constitue la donnée utile. Ainsi, l'étude des fluctuations du niveau de la mer $h(t)$ au large à partir de la mesure de la pression au fond $p(t)$ implique la connaissance des trois paramètres g, $\overline{\rho}$ et $p_a(t)$.

En ce qui concerne l'accélération de la pesanteur g, elle varie avec la latitude L selon la formule (en m/s^2) :

$$g = 9{,}7803185(1 + 0{,}005302357 \sin^2 \mathrm{L} - 0{,}0000059 \sin^2 2\mathrm{L})\ \mathrm{m/s^2}$$

De l'équateur au pôle, son intensité augmente donc approximativement de 0,5 %. Cela correspond, pour une même amplitude de variation de pression hydrostatique, à une diminution relative du marnage de 5 mm/m. Si l'on adopte une valeur de g correspondant à une latitude moyenne, l'erreur maximale possible est de 2,5 mm/m de marnage. Cette erreur n'est pas négligeable. En particulier, elle se répercute intégralement sur la détermination de

la profondeur H dont la détermination précise est à la base des études liées aux évolutions climatiques (sous réserve d'apporter les corrections induites par les éventuels mouvements tectoniques).

La masse volumique moyenne $\overline{\rho}$ de l'eau de mer est voisine de $1{,}028 \cdot 10^3$ kg/m^3. Elle est fonction de la température, de la salinité et de la pression. En raison des fortes pressions en jeu, il y a lieu de tenir compte de la compressibilité de l'eau de mer par très grandes profondeurs, mais l'effet de la pression sur ρ est négligeable dans les couches superficielles.

Les courbes de même salinité de la figure 2.8, ont été tracées sans tenir compte de la compression adiabatique de l'eau de mer et en prenant pour valeur de la pesanteur $g = 9{,}81$ m/s^2. Ainsi, à titre d'exemple, une pression hydrostatique de 10^4 Pa pour une colonne d'eau à 4°C correspond à une hauteur de 101,94 cm d'eau douce ($S = 0$) et à 99,34 cm pour une eau de mer dont la salinité est égale à $S = 37$, soit un écart de 2,6 cm. Rappelons que c'est ce même type d'erreur qui intervient aussi dans l'évaluation de la hauteur de la mer à partir de la mesure du niveau dans le puits de tranquillisation.

4.1.2 • Marégraphes pneumatiques ou à bulles

Ce type de marégraphe est un des tous premiers à utiliser la relation entre la hauteur d'eau et la pression hydrostatique correspondante. Le principe du système (figure 2.9) repose sur le maintien d'un faible flux contrôlé d'air ou d'azote dans un tube de faible section (écoulement laminaire avec perte de charge négligeable), aboutissant au niveau choisi, obligatoirement situé au-dessous des plus basses mers. À ce niveau, le tube est connecté à la face supérieure d'un cylindre étanche vers le haut et ouvert vers le bas, ayant en outre un orifice de très faible section à mi-hauteur. Le faible flux permanent de gaz dans le tube maintient une émission continue de bulles à travers ce petit orifice. Cette émission est entretenue par une bouteille à gaz, servant de réserve, dont la pression d'échappement équilibre celle liée à la hauteur d'eau et à la pression atmosphérique.

La pression du gaz est mesurée dans l'observatoire, donc relative à la pression atmosphérique, par un manomètre différentiel à mercure, traduite en hauteurs d'eau et enregistrée sur une feuille graphique.

Cet appareil présente des avantages appréciables. De maintenance aisée, il ne nécessite pas de puits de tranquillisation pour son installation. Son défaut essentiel concerne la dégradation des performances en présence de vagues. Celles-ci créent des surpressions engendrant une remontée d'eau dans le cylindre empêchant l'évacuation des bulles d'air. De plus, comme pour la lecture à l'échelle de marée, la dissymétrie du profil des vagues, entre crêtes

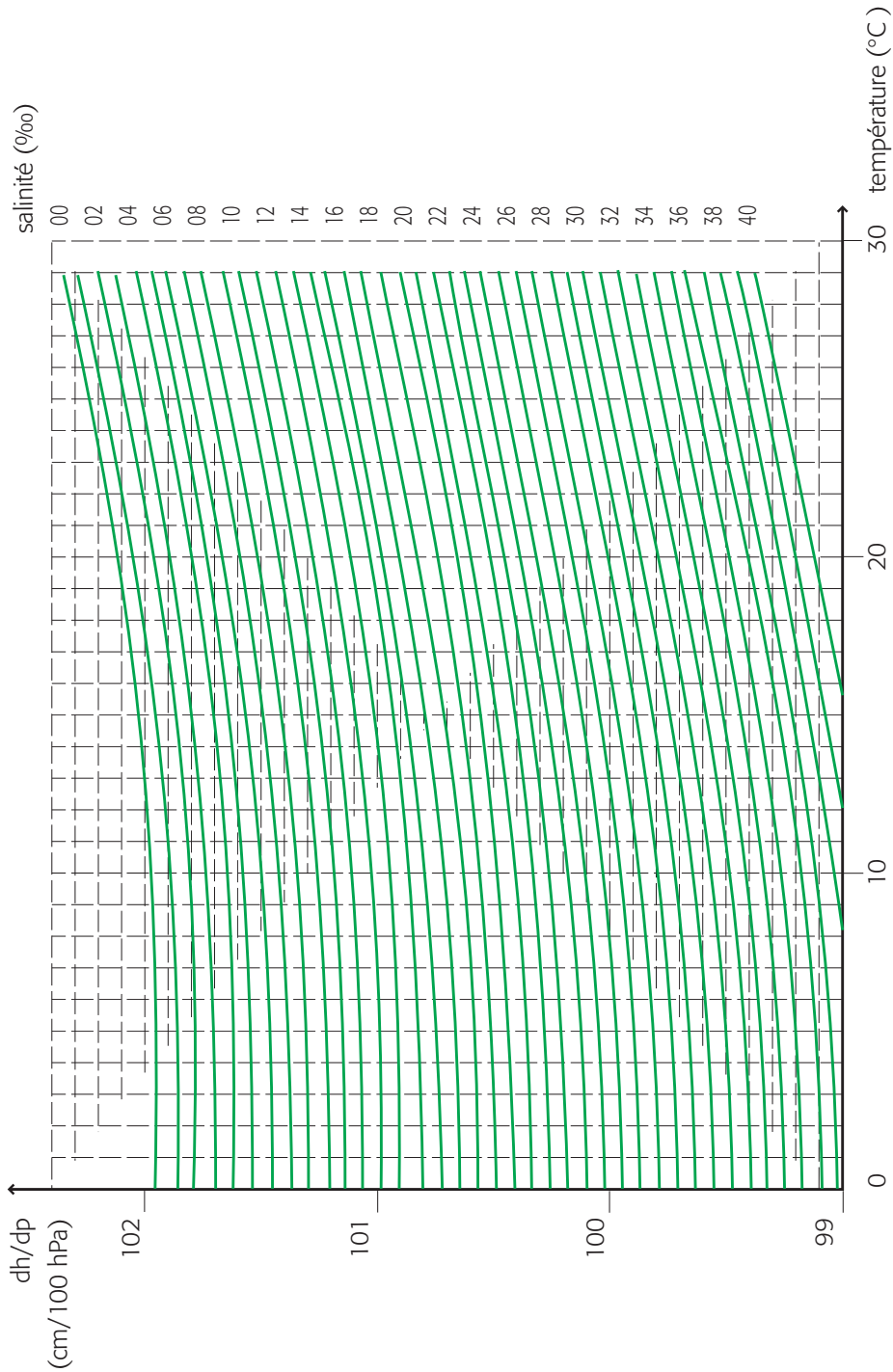


FIGURE 2.8 — Abaque donnant le taux de variation de la hauteur d'eau (h en cm), rapportée à une pression hydrostatique de 100 hectopascals (10^4 Pa), en fonction de la température (T°C) et de la salinité (S), en considérant l'eau de mer incompressible et $g = 9{,}81$ m/s^2.

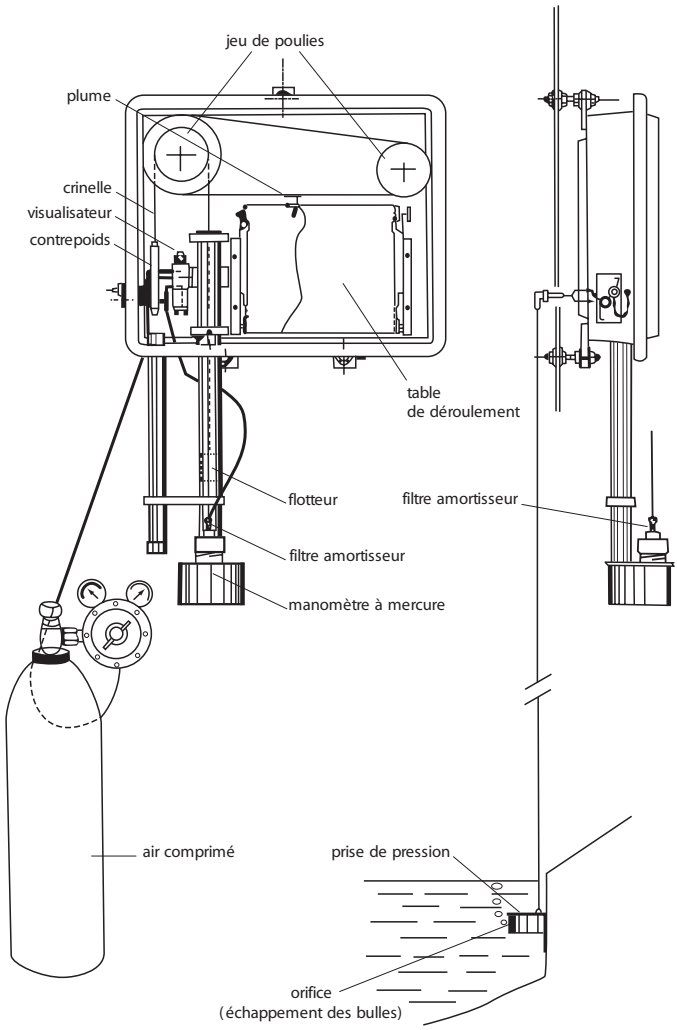


Figure 2.9 — Marégraphe à bulles : la mise en œuvre est aisée, mais l'obtention des mesures de qualité exige des contrôles très soignés.

et creux, entraîne des erreurs sur la hauteur d'eau déduite de cette mesure de pression. Un remède consiste à augmenter le débit d'air mais avec le risque de passer à un écoulement turbulent dans le tube. On est alors confronté dans ce cas aux pertes de charge dans le tuyau d'alimentation, ce qui accroît l'erreur de mesure. Un compromis doit être trouvé entre les deux types d'erreurs induites, soit par l'agitation de surface, soit par la perte de charge. Le débit dans le tube est d'autant plus délicat à régler que le tuyau est long. En pratique, il est recommandé d'éviter les tuyaux de longueur supérieure à 200 m.

En raison de leur facilité d'installation, ces appareils ont souvent été utilisés dans les estuaires. Mais, à cause du débit des cours d'eau, les variations verticales de la densité sont souvent importantes ; sans mesures simultanées de la répartition verticale de la densité, l'exploitation de telles observations ne peut évidemment pas convenir à des applications nécessitant une grande précision.

Hors de ces restrictions d'utilisation (estuaires et sites avec mer agitée), ces appareils sont susceptibles de fournir des mesures de bonne qualité lorsqu'ils sont convenablement contrôlés.

4.1.3 • Marégraphes à jauges de contrainte et à quartz

Avec le progrès technologique, les principaux capteurs utilisés actuellement pour mesurer la pression par grands fonds sont les jauges de contrainte et les quartz piézoélectriques.

Les jauges de contrainte possèdent la propriété d'avoir leur résistance électrique fonction à la fois de la pression et de la température, mais leur grand avantage est leur faible prix. À cause de leur sensibilité à la température et à la tension d'alimentation pour la mesure de leur résistance électrique, la détermination de la pression avec ce capteur nécessite un étalonnage minutieux, des contrôles très soignés et une alimentation électrique bien régulée. Ces exigences font que ces appareils peuvent fournir soit des mesures de très bonne qualité s'ils sont gérés par des organismes capables de les assumer, soit des mesures utiles pour certaines applications, mais inexploitables pour l'hydrographie ou l'océanographie.

Les appareils les plus précis utilisent, comme capteur de mesure, un cristal de quartz dont la fréquence de résonance varie avec la pression qui lui est appliquée. Ces capteurs sont utilisés dans les marégraphes de grands fonds car ils sont capables d'une résolution millimétrique à des profondeurs de plusieurs centaines de mètres. Ils sont également sensibles à la température, mais à un degré moindre que les jauges de contrainte, les coefficients d'étalonnage en fonction de la température pouvant être considérés comme

constants sur plusieurs années. Néanmoins, cette correction étant nécessaire, il est recommandé que l'appareil puisse enregistrer directement la pression. Ceci est obtenu en intégrant dans le marégraphe à quartz, un capteur de température dont la mesure est prise en compte par un logiciel interne éliminant l'effet de ce paramètre sur la fréquence du signal.

Signalons que ces capteurs présentent cependant une faible dérive de l'étalonnage liée à la pression moyenne d'utilisation ; cette dérive est surtout sensible lorsqu'ils sont immergés à grande profondeur. Ce défaut ne peut être modélisé, car il diffère d'un capteur à l'autre et dépend de leur histoire. Cette anomalie, à variation lente, n'affecte pas en pratique la mesure des fluctuations d'amplitude, mais ne permet pas l'étude de l'évolution du niveau moyen sur de très longues durées. Un étalonnage avant et après les mesures permet de détecter cette dérive, mais non de la corriger, car elle n'est pas linéaire.

Les systèmes informatiques modernes permettant une grande liberté dans l'acquisition, l'enregistrement et le traitement de la mesure, les appareils immergés loin des côtes peuvent être entièrement autonomes sans difficulté pendant plusieurs mois voire des années. La mise en œuvre de ce type d'appareil est relativement aisée à réaliser. L'instrument est intégré dans une structure (figure 2.10) comprenant un lest pour l'immersion, un « largueur-transpondeur » et une bouée suffisamment dimensionnée pour assurer la flottabilité du dispositif sans le lest. La bouée, indéformable sous l'effet de la pression, est équipée en outre d'une balise lumineuse et éventuellement d'un réflecteur radar, facilitant le repérage en surface. Le transpondeur servira à retrouver le marégraphe en mer. Le lest sera abandonné sur le fond après largage de la bouée supportant la cage (marégraphe et largueur) par commande acoustique à partir du navire assurant la récupération.

4.2 • Les marégraphes à sondes aériennes

Les progrès réalisés dans les techniques de la mesure du temps et dans la conception de transducteurs acoustiques et électromagnétiques, ont rendu possible la mesure des distances avec une très grande précision, sous réserve d'apporter les corrections liées à la propagation des ondes, acoustiques ou électromagnétiques. La marégraphie a tiré parti de ces développements et plusieurs types de sondes ont vu le jour pour la mesure du niveau marin.

4.2.1 • Marégraphes à sonde aérienne ultrasonique

Dans les années 1980, en vue de renouveler le réseau existant de marégraphes américains, le Naval Oceanographic Survey (NOS) entreprit une

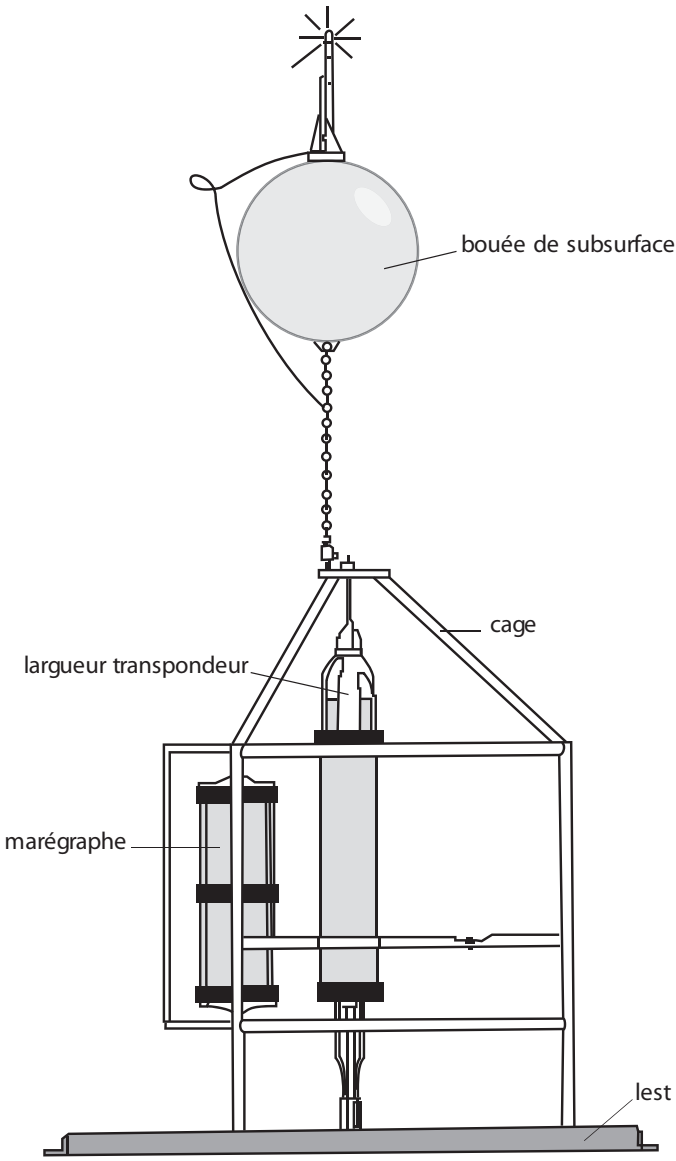


FIGURE 2.10 — Marégraphe de fond : dispositif de mouillage avec système de largage et de récupération. Cet appareil autonome est très fiable et fournit des mesures très précises sur les variations de pression sur le fond.

étude montrant que le principe de mesure de distance, par méthode acoustique aérienne, était susceptible de réaliser le meilleur compromis entre la qualité de la mesure du niveau marin et le coût global du réseau, ce coût comprenant l'acquisition, l'exploitation et la maintenance sur une durée de 20 ans. Il est vrai que les spécifications pour la précision n'étaient pas très sévères vis-à-vis de celles qui sont demandées actuellement par la communauté scientifique.

Bien que ces sondes ultrasoniques soient aptes à fonctionner sans protection, sous réserve d'une puissance d'émission suffisante, ces capteurs sont mis en œuvre dans des puits de tranquillisation afin d'augmenter leur durée de vie, en évitant l'influence des intempéries, et d'assurer une surface d'eau plane limitant les pertes de réflexion de l'onde acoustique. Les aspérités éventuelles du puits peuvent provoquer des réflexions parasites gênantes. Pour cette raison, il est recommandé de canaliser le faisceau dans un tube lisse et rigide, PVC par exemple. Les réflexions multiples sur les parois d'un tel cylindre ne constituent pas une gêne, moyennant un étalonnage qui doit, de toute façon, être réalisé avec soin.

Le principe de la mesure est simple : un transducteur, situé au-dessus de la surface de l'eau, émet un signal ultrasonore selon la verticale vers le bas et capte ensuite le signal réfléchi. Connaissant la célérité du son dans l'air c , la mesure du temps de parcours Δt de l'aller-retour fournit la distance l , tirant d'air entre le transducteur et la surface : $l = c\Delta t/2$

Soit d l'altitude de la base du transpondeur acoustique par rapport à un niveau de référence (habituellement le zéro hydrographique), la hauteur h du niveau de la mer s'exprime donc par :

$$h = \mathrm{d} - l = \mathrm{d} - (c \cdot \Delta t/2) \tag{2.3}$$

Avec une précision suffisante pour nos applications, la célérité du son dans l'air c (exprimée en m/s) est donnée par la formule suivante, dans laquelle T est la température en degré Celsius (°C), p_a la pression atmosphérique en hectoPascals (hPa) et w l'humidité relative de l'air.

$$c = 331{,}2 \cdot [1 + 0{,}97 \cdot (w/p_a) + 1{,}9 \cdot 10^{-3}\mathrm{T}]\ \mathrm{m/s}$$

L'expérience montre que la variation de l'humidité relative est négligeable dans un puits fermé où l'air est pratiquement saturé en eau. En revanche, la température jouant un rôle important, nous avons en posant $c_0 = 331{,}2$:

$$\frac{\partial l}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial l}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \mathrm{T}} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\frac{c_0}{c}l \approx 1{,}9.10^{-3}l\ \mathrm{m/°C}$$

En raison de la relation (2.3) qui donne $\partial h = -\partial l$, ceci correspond à une

erreur de signe opposé sur h de près de 2 mm par mètre de tirant d'air l et par degré Celsius.

Deux méthodes sont utilisées pour compenser cette influence importante de la température.

— La première consiste à placer un réflecteur sous la sonde à une distance connue l_0. La mesure du temps de parcours Δt_0 (aller et retour du signal transpondeur-réflecteur) permet d'obtenir directement la célérité :

$$c = \frac{2\,l_0}{\Delta t_0} \quad \Rightarrow \quad l = l_0 \frac{\Delta t}{\Delta t_0}.$$

— La seconde consiste à placer un capteur de température à proximité du transducteur et à calculer la célérité du son, fonction de la température mesurée

Les deux méthodes présentent chacune leur défaut propre. La première donne la célérité moyenne du son sur le parcours sonde-réflecteur, mais pas sur tout le tirant d'air du puits. La seconde est encore moins performante car elle n'estime la célérité qu'à un seul niveau. Or diverses expériences ont montré que les variations de la température et son gradient vertical dans le puits induisent des erreurs non négligeables sur la mesure du niveau. Tout particulièrement lorsque le réchauffement diurne de la structure du marégraphe élève la température de l'air interne du Il apparaît alors dans le puits un gradient de température indétectable par le capteur. Il n'existe pas réellement de solution satisfaisante à ce problème.

Cependant, pour les besoins des études de dynamique océanique, des marégraphes spécifiques ont été mis au point, ayant à différents niveaux des capteurs de température étanches, supportant ainsi sans inconvénient l'immersion. Mais cette solution est onéreuse et peu utilisée pour l'hydrographie.

4.2.2 • Marégraphes à sonde électromagnétique (radar ultrafréquence)

Pour la mesure des distances, ces sondes électromagnétiques fonctionnent sur le même principe que les précédentes ; les signaux ultrasonores sont ici remplacés par des signaux de nature électromagnétique.

Pour les observatoires côtiers, l'avantage de l'utilisation de ces radars ultrafréquences est de présenter une célérité constante (celle de la lumière) permettant une mesure de hauteur insensible sur de courtes distances aux conditions environnementales. Ces marégraphes répondent à toutes les exigences de précision, mais leur installation et leur étalonnage peuvent s'avérer délicats. Une structure au-dessus de l'eau, permettant le pointage vertical du transducteur, est cependant nécessaire. Ce support n'a pas besoin d'être sophistiqué car la protection du système d'acquisition et du traitement peut être assurée dans un abri éloigné du lieu de mesure.

Les besoins accrus de mesures précises, ainsi que les possibilités offertes par l'évolution technologique, ont accéléré le développement de ces appareils qui tendent à devenir de plus en plus répandus dans les observatoires marégraphiques.

4.3 • Altimètres

Bien que la connaissance de la marée à l'échelle du globe ne soit pas l'objet de cet ouvrage, il convient de signaler que, depuis plus de deux décennies, la qualité des radars altimètres, embarqués sur satellites, permet une excellente détermination du niveau de l'océan avec une précision nettement subdécimétrique. La mesure de la distance verticale du satellite à la surface de la mer s'établit comme pour les deux systèmes précédents. Elle consiste à mesurer le temps de parcours vertical aller-retour Δt de l'impulsion électromagnétique émise par le radar embarqué et réfléchie par la mer (la surface de réflexion étant de l'ordre de 10 km^2 à 20 km^2). En raison de la grande distance parcourue par cette onde (de l'ordre de 2 000 km) dans un environnement qui n'est pas homogène, avec notamment la traversée de l'ionosphère et de la troposphère, sa célérité c n'est pas exactement celle de la lumière dans le vide. Il convient d'y apporter des corrections relatives aux effets ionosphériques et troposphériques (vapeur d'eau) sur la propagation de cette impulsion électromagnétique. La distance verticale ζ du satellite au-dessus de la surface de la mer est donc :

$$\zeta = c\Delta t/2$$

Le suivi orbital du satellite permettant d'établir son altitude ζ_e (figure 2.11) dans un certain repère lié au centre de la Terre, la hauteur de la surface océanique h_e dans le même repère est la différence des deux grandeurs :

$$h_e = \zeta - \zeta_e$$

Le positionnement précis du satellite est effectué à l'aide de différentes techniques, comme la télémétrie laser, le GPS ou le système Doris, à partir de stations situées sous la trace du satellite. Les positions de ces stations sont établies dans un repère géodésique cohérent, l'ITRS. (*International Terrestrial Reference System*), avec une précision centimétrique. Il en résulte que le niveau de la mer est ainsi déterminé par rapport à cette même référence.

La correspondance de cette mesure altimétrique du niveau marin, par rapport aux références habituelles (nivellement terrestre, niveau moyen, zéro des cartes marines), pose le problème de la position relative de ces références les unes par rapport aux autres. C'est pour cette raison que des stations de

suivis orbitaux, en particulier GPS et Doris, sont placées à proximité des observatoires marégraphiques côtiers.

L'étalonnage de l'altimètre consiste à comparer la mesure satellitale de la hauteur de la mer à celle du marégraphe dans le même référentiel. Une difficulté apparaît cependant car les mesures issues de l'altimétrie satellitale ne sont exploitables qu'à partir d'une certaine distance de la côte, de l'ordre de 10 km à 20 km, au moins pour deux raisons. La première est d'ordre technique, la réflexion du signal altimétrique est perturbée par la présence simultanée de la terre et de l'eau ; la seconde est liée à la variation rapide de la forme du géoïde lors du passage de la mer à la terre. Ainsi l'interprétation de l'écart entre l'indication du marégraphe côtier et la première mesure satellitale exploitable n'est pas aisée sans une connaissance préalable de la forme du géoïde local.

Embarqués à bord de satellites, ces altimètres mesurent la hauteur de la mer en un point déterminé à quelques jours d'intervalle. Les traces orbitales sur le globe coupent l'équateur sous un angle de 60° environ et forment un réseau régulier dont la maille, de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, varie selon la latitude. Ainsi les données en un point ne sont disponibles qu'à des intervalles de temps bien supérieurs aux périodes fondamentales de la marée. Ces contraintes posent de multiples problèmes d'analyse et

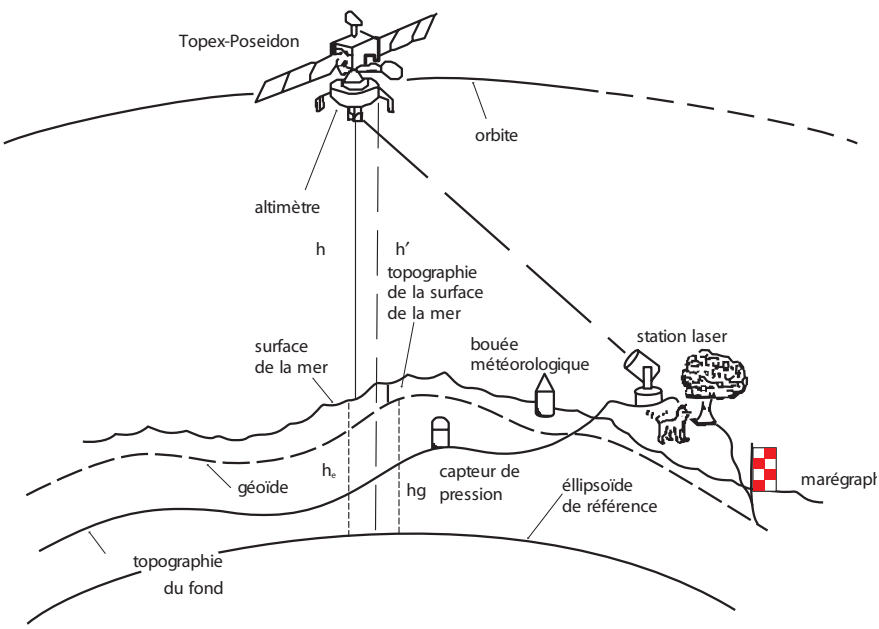


Figure 2.11 — La mesure altimétrique satellitale de la surface de l'océan.

de traitement de données, notamment le problème du repliement multiple du spectre de marée. Moyennant des méthodes adaptées, le manque d'un échantillonnage temporel adéquat au point fixe peut être comblé en partie par la prise en compte de l'échantillonnage spatial continu tout le long de l'orbite et des mesures aux points d'intersections des traces.

Malgré ces difficultés, cette technique spatiale, d'une précision de quelques centimètres, fournit des informations irremplaçables pour des études géophysiques et météo-océaniques à l'échelle du globe. Les informations recueillies avec le radar altimètre permettent ainsi la détermination de plusieurs éléments comme le géoïde marin, la hauteur des vagues et la vitesse du vent ainsi que l'écart entre la surface océanique et le géoïde.

Cette topographie de la surface océanique (par rapport au géoïde), particulièrement utile en océanographie physique pour la détermination des courants de surface, n'est accessible qu'après une très bonne correction de marée dont la contribution à la variabilité altimétrique est dominante. Ainsi l'altimétrie satellitale est à l'origine du regain d'intérêt de la communauté scientifique pour la marégraphie à l'échelle du globe.

III

Force et potentiel générateurs de la marée

Ce chapitre ne reprend pas la démarche heuristique suivie par Newton et Laplace pour définir respectivement la force et le potentiel générateurs. Nous utiliserons davantage les formulations actuelles des mathématiques et de la mécanique pour caractériser ces grandeurs : calcul de la force génératrice avec sa construction géométrique (règle de Proctor) d'une part, et d'autre part développement du potentiel en série de polynômes de Legendre et décomposition en « espèces de marées » définies par Laplace.

1 • La force génératrice

Dans cette partie, les démonstrations font intervenir très souvent le mot « force ». Pour éviter tout malentendu, ce terme doit être compris comme l'accélération d'un élément fluide M de masse unité. Après formulation de la force exercée par un astre A, la construction géométrique de Proctor donnera une évaluation des actions respectives des deux astres générateurs (Lune et Soleil) avec l'ordre de grandeur de leur rapport.

1.1 • Calcul de la force génératrice exercée par un astre

La formule de la force génératrice, établie ci-après, représente l'action d'un seul astre, Lune ou Soleil ; la force totale est évidemment la somme des deux.

Considérons deux repères orthonormés :

— l'un galiléen (repère absolu) ayant pour origine S centre de masse du système Soleil-Terre-Lune : le repère écliptique par exemple (voir annexe A) ; en réalité, ce repère n'est pas strictement galiléen, mais nous pouvons le considérer ainsi car aucune manifestation dynamique, résultant de son accélération propre, n'a pu être décelée jusqu'à ce jour sur un quelconque mouvement terrestre ;

— le second lié à la Terre et tournant avec elle (repère relatif) ayant pour origine le centre T : soit, par exemple, le repère équatorial horaire (ayant le méridien du point M comme origine).

La marée océanique se manifestant sur le globe terrestre, il convient donc de calculer l'accélération de l'élément M dans ce repère relatif.

Soit $\overrightarrow{\omega_T}$ le vecteur rotation terrestre parallèle à l'axe des pôles et orienté vers le nord (rotation en sens direct, de l'ouest vers l'est). Avec les conventions classiques, nous avons :

— dans le repère absolu (indice S), les vecteurs vitesses et accélérations absolues des points T et M définies respectivement par :

$$\frac{d_S(\overrightarrow{ST})}{dt} = \overrightarrow{v_S}(T) \qquad \text{et} \qquad \frac{d_S^2(\overrightarrow{ST})}{dt^2} = \overrightarrow{\gamma_S}(T),$$

$$\frac{d_S(\overrightarrow{SM})}{dt} = \overrightarrow{v_S}(M) \qquad \text{et} \qquad \frac{d_S^2(\overrightarrow{SM})}{dt^2} = \overrightarrow{\gamma_S}(M) \ ;$$

— et dans le repère relatif (indice T), les vecteurs vitesse et accélération relatives de M par :

$$\frac{d_T(\overrightarrow{TM})}{dt} = \overrightarrow{v_T}(M) \qquad \text{et} \qquad \frac{d_T^2(\overrightarrow{TM})}{dt^2} = \overrightarrow{\gamma_T}(M).$$

La dérivation de la relation vectorielle $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{ST}$ par rapport au temps t dans le repère absolu nous donne :

$$\mathrm{d}_S(\overrightarrow{TM})/\mathrm{d}t = \overrightarrow{v_S}(M) - \overrightarrow{v_S}(T) \tag{3.1a}$$

Cette relation (3.1a) se traduit par la loi des vitesses dans le repère relatif :

$$\mathrm{d}_S(\overrightarrow{TM})/\mathrm{d}t = \overrightarrow{v_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{TM} \tag{3.1b}$$

En tenant compte du fait que $\overrightarrow{\omega_T}$ est constant, donc indépendant du temps et en dérivant par rapport au temps t la relation précédente, (3.1b), nous obtenons :

$$\mathrm{d}_S\overrightarrow{v_T}(M)/\mathrm{d}t = \overrightarrow{\gamma_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{v_T}(M) \tag{3.2}$$

$$= \overrightarrow{\gamma_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge [\overrightarrow{v_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{TM}] \tag{3.3}$$

En dérivant de même l'expression (3.1a) par rapport au temps t et en tenant compte de la relation (3.3), il vient :

$$\overrightarrow{\gamma_S}(M) - \overrightarrow{\gamma_S}(T) = \overrightarrow{\gamma_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{v_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge [\overrightarrow{v_T}(M) + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{TM}]$$

L'accélération $\overrightarrow{\gamma_T}(M)$ de l'élément M dans le repère terrestre s'exprime donc par :

$$\overrightarrow{\gamma_T}(M) = \overrightarrow{\gamma_S}(M) - \overrightarrow{\gamma_S}(T) - 2\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{v_T}(M) - |\overrightarrow{\omega_T}|^2\overrightarrow{RM} \qquad (3.4)$$

où le point R représente la projection du point M sur l'axe des pôles (figure 3.1).

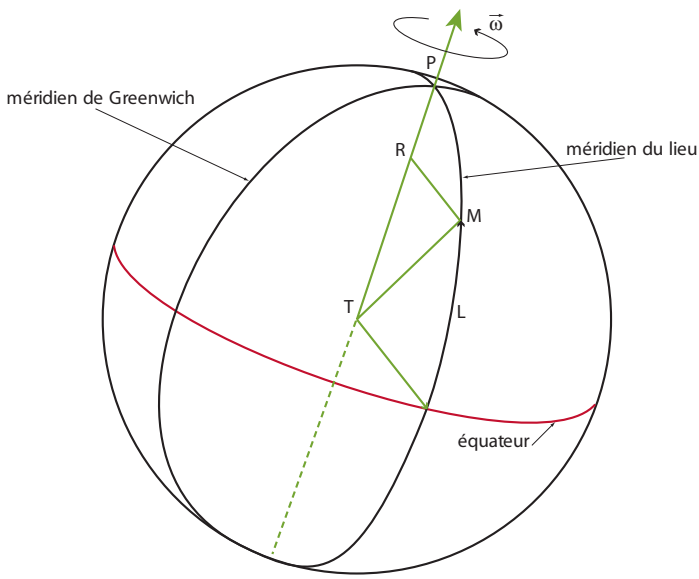


FIGURE 3.1 — Le référentiel terrestre (repère relatif) : T centre de la Terre, M élément de masse unité à la latitude L, R projection de M sur l'axe des pôles.

Dans la relation (3.4) :

— le terme $\overrightarrow{\omega_T} \wedge (\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{TM}) = |\overrightarrow{\omega_T}|^2\overrightarrow{RM}$ est la force centrifuge due à la rotation terrestre et appliquée au point M ;

— la composante $2\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{v_T}(M)$ représente l'accélération dite de Coriolis qui dévie, vers la droite dans l'hémisphère nord et vers la gauche dans le sud, la particule M de vitesse $\overrightarrow{v_T}(M)$;

— l'accélération $\overrightarrow{\gamma_S}(T)$ résulte de la somme des forces extérieures appliquées en T, les seules significatives étant les attractions gravitationnelles exercées par chacun des astres générateurs de la marée. Comme dans un premier

temps nous n'examinons que l'action d'un seul astre, l'accélération $\overrightarrow{\gamma_S}(T)$ sera ici assimilée à la force $\overrightarrow{F}_{A/T}$ exercée par l'astre A sur l'élément de masse unité en T. Selon la loi de l'attraction gravitationnelle :

$$\overrightarrow{\gamma}_S(T) \equiv \overrightarrow{F}_{A/T} = k\frac{m_A}{r_A^2}\overrightarrow{u} \tag{3.5}$$

avec :

k : constante de la gravitation universelle,

m_A : masse de l'astre A,

r_A : distance TA des centres (Terre-astre),

$\overrightarrow{u}$: vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{TA}$.

Enfin, le terme $\overrightarrow{\gamma_S}(M)$ résulte de la somme des forces extérieures appliquées à l'élément M de masse unité. En adoptant l'assimilation accélération-force, ces forces sont :

$\overrightarrow{\nabla}p(M)/\rho$: le gradient de pression par unité de masse où ρ est la masse volumique et $p(M)$ la pression en M, le symbole $\overrightarrow{\nabla}$ représentant l'opérateur vectoriel « gradient » de composantes $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ dans un système cartésien ;

$\overrightarrow{F}_f(M)$: les forces de frottement qui s'annulent avec $\overrightarrow{v_T}(M)$;

$\overrightarrow{g}(M) = -g\overrightarrow{\zeta}(M)$: l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre où $\overrightarrow{\zeta}$ est le vecteur unitaire de la verticale ascendante en M ($\overrightarrow{TM} = a_T\overrightarrow{\zeta}$, a_T étant le rayon terrestre) ; avec m_T masse de la Terre, la valeur de la pesanteur g s'exprime par :

$$g = k\frac{m_T}{a_T^2}\,; \tag{3.6}$$

$\overrightarrow{F}_{A/M}$: l'attraction gravitationnelle exercée par l'astre A sur M.

Ainsi, la somme des forces en M s'exprime par :

$$\overrightarrow{\gamma}_S(M) = \frac{\overrightarrow{\nabla}p(M)}{\rho} + \overrightarrow{F}_f(M) + \overrightarrow{g}(M) + \overrightarrow{F}_{A/M}$$

En considérant l'élément fluide de masse unité M au repos, nous avons la vitesse $\overrightarrow{v_T}(M)$ qui est évidemment nulle, ce qui entraîne l'annulation de la force de Coriolis $2\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{v_T}(M)$ et des forces de frottements $\overrightarrow{F}_f(M)$, ainsi que les composantes horizontales du gradient de pression au sein du fluide. Quant à la composante verticale du gradient de pression, selon le principe d'Archimède (pression hydrostatique) elle est équilibrée par la « pesanteur ordinaire » $\overrightarrow{g}(M) - |\overrightarrow{\omega}_T|^2\overrightarrow{RM}$ qui inclut la force centrifuge liée à la rotation terrestre.

En assimilant l'accélération $\overrightarrow{\gamma_T}(M)$ à la force $\overrightarrow{F_A}(M)$ sur l'élément M de masse unité, la relation (3.4) devient alors :

$$\overrightarrow{F_A}(M) = \overrightarrow{F}_{A/M} - \overrightarrow{F}_{A/T} \tag{3.7}$$

La relation (3.7) définit la « force génératrice » $\overrightarrow{F_A}(M)$ de la marée exercée par l'astre A au point M ; c'est la différence des attractions gravitationnelles exercées par l'astre au point M (composante $\overrightarrow{F}_{A/M}$) et au centre T de la Terre (composante $\overrightarrow{F}_{A/T}$).

Notons que ces deux composantes définissent chacune un champ de forces mais de nature différente :

— La force $\overrightarrow{F}_{A/T}$, force d'entraînement du référentiel lié à la Terre, est la même en tout point M et définit donc un champ de force d'intensité constante dans la direction de l'axe $\overrightarrow{TA}$ de vecteur unité $\overrightarrow{u}$.

— En revanche, $\overrightarrow{F}_{A/M}$, force d'attraction exercée par l'astre A sur tout point M du globe, est fonction de la position du point. Cette composante, dirigée pour chaque point dans la direction de l'axe $\overrightarrow{MA}$ de vecteur unité $\overrightarrow{v}$, définit ainsi un champ de forces radiales d'intensité variable. En désignant par Δ la distance MA, cette force s'exprime selon la loi de l'attraction gravitationnelle par la relation équivalente à (3.5) pour le point T :

$$\overrightarrow{F}_{A/M} = \frac{km_A}{\Delta^2}\overrightarrow{v}.$$

Ainsi la relation (3.7), donnant la force génératrice de la marée pour un astre, peut s'exprimer par :

$$\overrightarrow{F}_A(M) = km_A\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\Delta^2} - \frac{\overrightarrow{u}}{r_A^2}\right) \tag{3.8}$$

Notons que le champ de force ainsi défini admet l'axe $\overrightarrow{TA}$ comme axe de révolution. Nous allons examiner ci-dessous comment une construction géométrique fort simple, connue sous la dénomination de « règle de Proctor » (astronome anglais, 1837-1888), permet d'établir un vecteur proportionnel à la force et d'en déduire ainsi l'ordre de grandeur qui sera exprimé en prenant la pesanteur *g* pour unité.

1.2 • Construction géométrique de la force : règle de Proctor

Le point T étant le centre de la Terre, plaçons-nous dans le plan du vertical de l'astre A au point M et soit θ la distance zénithale géocentrique (figure 3.2).

Pour mieux visualiser la construction de Proctor, considérons la figure 3.3 établie dans le même plan que la figure 3.2.

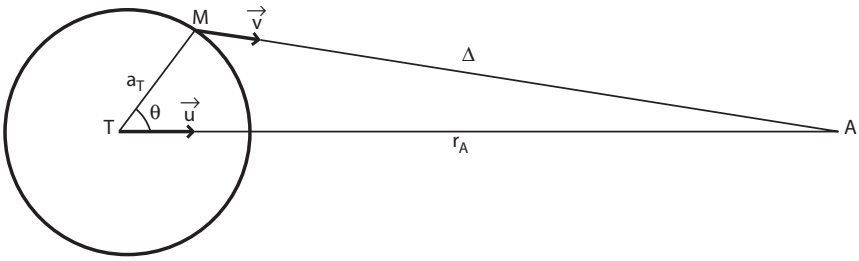


Figure 3.2 — Plan du vertical de l'astre A au point M avec a_T rayon terrestre et θ distance zénithale géocentrique de l'astre.

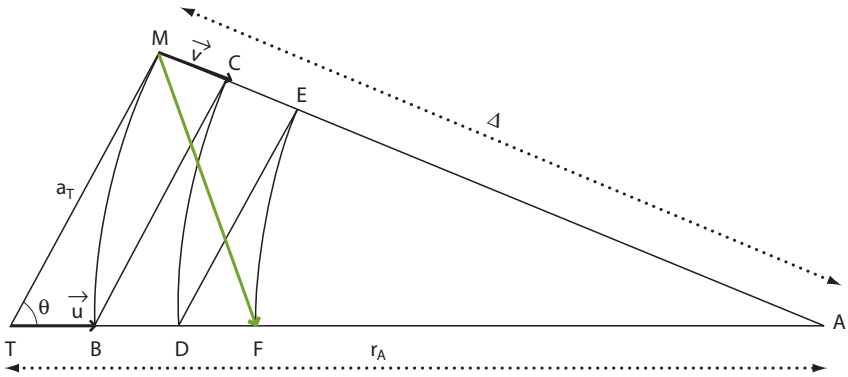


Figure 3.3 — Construction de Proctor : la force génératrice de la marée est proportionnelle au vecteur $\overrightarrow{MF}$.

Soit B le point d'intersection de l'axe $\overrightarrow{TA}$ avec la circonférence de centre A et de rayon AM. La parallèle à TM issue du point B coupe AM en C.

Construisons par la même méthode les deux figures successives BCD et DEF homothétiques à TMB. Nous avons ainsi les égalités suivantes : $r_A = AT$; $\Delta = AM = AB$; $AC = AD$; $AE = AF$.

En tenant compte de ces égalités, l'application du théorème de Thalès donne,

— pour les triangles ATM et ABC :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AT} \Rightarrow AC = \frac{\Delta^2}{r_A} ;$$

— pour les triangles ATM et ADE :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AM}{AT} \Rightarrow AE = \frac{\Delta^3}{r_A^2} .$$

Comme AF = AE, le vecteur $\overrightarrow{FA}$ s'exprime donc par :

$$\overrightarrow{FA} = \frac{\Delta^3}{r_A^2}\overrightarrow{u}.$$

La relation vectorielle $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{FA}$ permet d'écrire :

$$\overrightarrow{MF} = \Delta^3\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\Delta^2} - \frac{\overrightarrow{u}}{r_A^2}\right).$$

Le vecteur $\overrightarrow{MF}$ est donc proportionnel à la force génératrice $\overrightarrow{F}_A(M)$ donnée par (3.8). Cette force peut s'exprimer encore par la relation dite « règle de Proctor » :

$$\overrightarrow{F}_A(M) = \frac{km_A}{\Delta^3}\overrightarrow{MF}. \tag{3.9}$$

En supposant l'astre A à l'infini, les directions TA et MA deviennent parallèles et cette construction se simplifie (figure 3.4). Considérons dans ce plan du vertical de l'astre, un système orthonormé admettant T pour origine et l'axe $\overrightarrow{TA}$ comme axe des abscisses x, l'abscisse du point F devient égale à trois fois celle du point B, projection de M sur cet axe. Cette approximation, souvent admise pour la Lune, l'est *a fortiori* pour le Soleil.

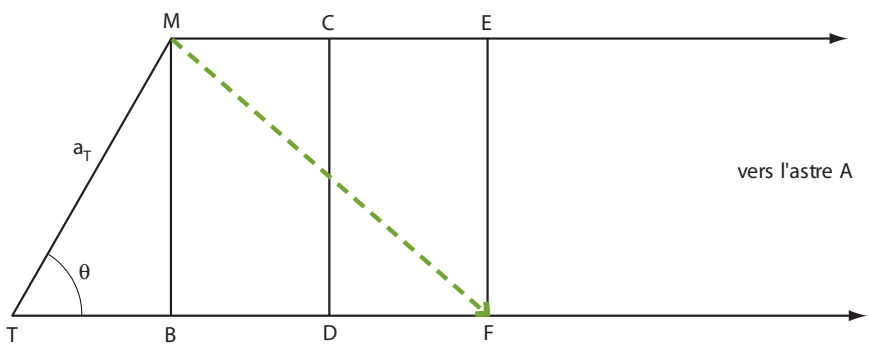


FIGURE 3.4 — Simplification de la construction du vecteur $\overrightarrow{MF}$ avec l'astre à l'infini : le vecteur $\overrightarrow{TF}$ est égal à 3 fois $\overrightarrow{TB}$, B étant la projection du point M sur $\overrightarrow{TA}$.

Dans le repère orthonormé défini ci-dessus, les composantes de $\overrightarrow{TM}$ et de $\overrightarrow{MF}$ ont respectivement les représentations matricielles définies en 3.10 :

$$\overrightarrow{TM} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_T \cos\theta \\ a_T \sin\theta \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{MF} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a_T \cos\theta \\ -a_T \sin\theta \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Le module de $\overrightarrow{MF}$ se détermine aisément ; il est égal à

$$MF = a_T\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

Dans un repère orthonormé, appelons ξ_{MF} la composante verticale (orientée positivement vers le zénith) et η_{MF} la composante horizontale du vecteur $\overrightarrow{MF}$

$$\begin{aligned} \xi_{MF} &= |TF|\cos\theta - a_T = a_T\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ \eta_{MF} &= |TF|\sin\theta = \frac{3}{2}a_T\sin 2\theta \end{aligned} \tag{3.11}$$

Avec l'approximation $\Delta \approx r_A[1 - (a_T\cos\theta/r_A)] \approx r_A$ et en adoptant l'expression (3.6) pour g, la règle de Proctor (3.9) permet l'évaluation du module $F_A(M)$ de la force génératrice de l'astre A au point M, soit :

$$F_A(M) \approx g\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{a_T}{r_A}\right)^3\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \tag{3.12}$$

En raison de l'orbite elliptique, la distance r_A des centres Terre-astre n'est pas constante. L'introduction de la distance moyenne r_0 permet de définir la parallaxe i_A de l'astre A, dont la valeur reste de l'ordre de l'unité :

$$i_A = \frac{r_0}{r_A} \tag{3.13}$$

Posons :

$$\chi_A = \frac{m_A}{m_T}\left(\frac{a_T}{r_0}\right)^3 \tag{3.14}$$

Ainsi le module $F_A(M)$ de la force génératrice peut s'écrire en première approximation :

$$F_A(M) \approx g\chi_A i_A^3\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \tag{3.15}$$

Ce même résultat (voir annexe B) peut être obtenu à partir du potentiel générateur, exprimé en série de polynômes de Legendre et limité à son premier terme en $P_2(\cos\theta)$.

Les relations (3.12) ou (3.15) nous donnent ainsi la possibilité d'examiner les caractéristiques de cette force.

1.3 • Principales caractéristiques de la force génératrice

Ces relations, qui sont obtenues par la règle de Proctor (3.9) nous montrent :

1. que la force génératrice de la marée est proportionnelle à la masse de l'astre m_A et à l'inverse du cube de sa distance r_A ;

2. que sa distribution spatiale à un instant déterminé est de révolution autour de l'axe $\overrightarrow{TA}$ car fonction de la distance zénithale géocentrique θ de

l'astre A avec le terme $\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$, qui ne s'annule jamais à la surface du globe et dont la valeur varie entre 1 et 2.

Nous pouvons noter aussi que la composante horizontale de cette force a un module proportionnel à celui de η_{MF}, donné par (3.11). Ce module, variant comme $\sin 2\theta$, est maximum pour les valeurs de θ égales à 45° et 135°, et nul pour $\theta = 0°$ et 90°, c'est-à-dire sur l'axe $\overrightarrow{TA}$ et sur tout le grand cercle où l'astre est vu à l'horizon.

À un instant déterminé, ce champ de forces de révolution (autour de $\overrightarrow{TA}$) donne une distribution à la surface du globe, qui peut être examinée le long d'un parallèle de latitude L où un lever et un coucher de l'astre (astre à l'horizon) sont observés au cours de la journée (figure 3.5). Sur ce parallèle, les points M et M′ sont respectivement dans les méridiens, supérieur et inférieur, de l'astre. Les modules des forces correspondantes $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F'}$ atteignent des maximums relatifs ; dans le cas de la figure 3.5, la latitude L est du même signe que la déclinaison δ, le maximum supérieur de la force est alors obtenu en M. Si les valeurs de L et δ étaient de signes opposés, la force maximale serait en M′. Si le parallèle choisi est l'équateur, ou si la déclinaison de l'astre est nulle, ces deux forces $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F'}$ ont des modules identiques.

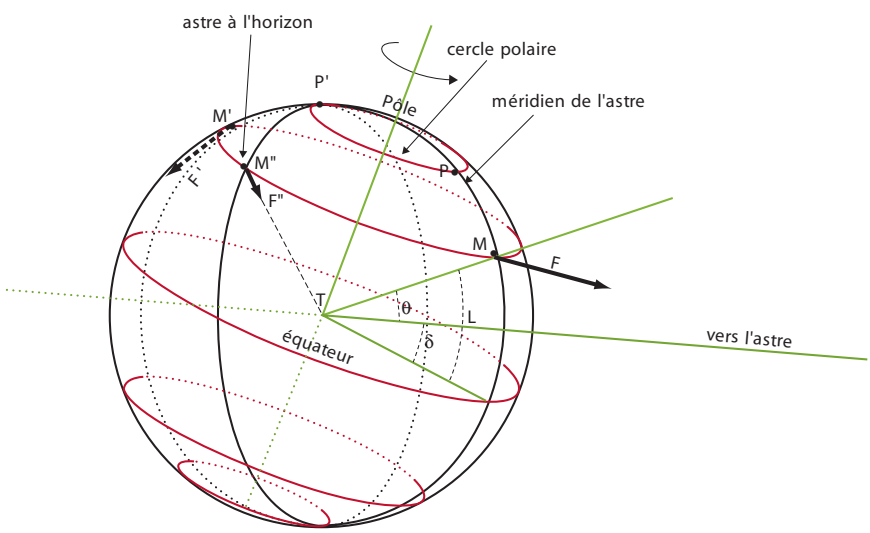


FIGURE 3.5 — Distribution spatiale sur le parrallèle de latitude L, aux points M, M′ et M″, de la force génératrice liée à l'astre A à un instant déterminé (voir commentaires dans le texte).

Sur le grand cercle « astre à l'horizon », la composante horizontale étant nulle, la force génératrice correspondante est dirigée vers le centre de la Terre et atteint son amplitude minimale abolue pour l'astre considéré. Il en est ainsi de la force $\overrightarrow{F''}$ appliquée en M″, intersection de ce cercle et de la partie visible du parallèle de latitude L dans la figure 3.5.

Le point P′, intersection du méridien de l'astre et du grand cercle « astre à l'horizon », définit la latitude L_N du cercle polaire « nord » de l'astre A pour la déclinaison δ. Dans le cas de la figure 3.5, nous avons pour le cercle polaire nord : $\delta + L_N = 90°$. On définit de même la latitutde L_S du cercle polaire « sud », $\delta - |L_S| = 90°$ (les latitudes sud sont comptées négativement). Sur tout parallèle dont la latitude L remplit la condition $|\delta| + |L| > 90°$, il n'est plus possible de voir l'astre à l'horizon. Le minimum absolu de la force n'est plus atteint, et le maximum secondaire disparaît pour se confondre avec le minimum relatif sur ce parallèle.

Les termes $\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$ et $(i_A)^3$ sont de l'ordre de l'unité. En prenant la pesanteur g, pour unité de force, l'expression (3.15) nous montre que l'ordre de grandeur de la force génératrice de chaque astre est représenté par son paramètre χ_A défini par la relation (3.14), où r_0 est la distance moyenne Terre-astre. En rappelant que la masse de la Terre est $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg et son rayon équatorial $a_T = 6{,}378 \cdot 10^3$ km, nous obtenons ainsi le tableau suivant:

Astre	m_A/m_T	a_T/r_0	$(a_T/r_0)^3$	χ_A
Lune	$1{,}23 \cdot 10^{-2}$	$1{,}66 \cdot 10^{-2}$	$4{,}57 \cdot 10^{-6}$	$5{,}62 \cdot 10^{-8}$
Soleil	$3{,}33 \cdot 10^{5}$	$4{,}26 \cdot 10^{-5}$	$7{,}75 \cdot 10^{-14}$	$2{,}58 \cdot 10^{-8}$

Ainsi la part de la force génératrice due à la Lune est un peu plus de deux fois supérieure (2,18 exactement) à celle du Soleil. Malgré sa faible masse, la relative proximité de la Lune lui confère une importance plus grande du fait de la loi en puissance « 3 » du rapport a_T/r_A.

L'action luni-solaire sur une particule de masse unité est donc très faible vis-à-vis de la pesanteur $g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; son maximum est de l'ordre de :

$$10^{-7} \cdot g \approx 10^{-6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1\ \mu\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Il s'ensuit que la composante verticale de cette force est négligeable par rapport à g. Seule la composante horizontale est susceptible de mettre en mouvement les particules fluides. Il est assez remarquable qu'une aussi faible accélération puisse jouer un rôle majeur dans le phénomène de la marée océanique tel qu'il est observé.

2 • Le potentiel générateur

Dans de nombreux problèmes faisant intervenir des champs de vecteurs, l'existence éventuelle d'un potentiel apporte des simplifications appréciables et une meilleure compréhension physique du phénomène (voir annexe B). Nous avons analysé ci-dessus la distribution spatiale de la force génératrice de la marée sur le globe à un instant déterminé pour un astre donné. Nous avons vu que cette distribution est représentative d'un champ de forces où la direction $\overrightarrow{TA}$ est axe de révolution du système.

Pour chacun des astres, la force génératrice est parfaitement définie comme différence de deux forces élémentaires, l'une radiale dépendant du point d'application et la seconde de direction et d'intensité constantes. Nous allons voir que ces composantes élémentaires dérivent de champs de potentiels, dits « méridiens » (voir annexe B) d'axe $\overrightarrow{TA}$. Ces champs ont la propriété de s'exprimer en séries de polynômes de Legendre, fonctions du cosinus de l'angle θ. Pour un astre donné, la différence de ces deux champs élémentaires, ayant même axe de révolution, définit le potentiel générateur de la marée.

2.1 • Potentiels des forces élémentaires liés à un astre

La marée océanique se manifestant sur la Terre, il est préférable de choisir un référentiel qui lui soit lié. Soit donc un système orthonormé T*xyz* (figure 3.6) ayant pour origine le centre T de la Terre, et pour plan T*xy* celui du vertical de l'astre A au point $M_0(x_0, y_0, 0)$. L'axe de révolution du champ de forces $\overrightarrow{TA}$ est choisi comme axe des abscisses (vecteur unité $\vec{u}$), le point B est ici la projection de M_0 sur cet axe.

En posant $\alpha = a_T/r_A$, les coordonnées de M_0 et la représentation matricielle des composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0A}$ peuvent s'écrire :

$$M_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = r_A \alpha \cos\theta \\ y_0 = r_A \alpha \sin\theta \\ z_0 = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\overrightarrow{M_0A} \Rightarrow \begin{bmatrix} (r_A - x_0) \\ (0 - y_0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_A(1 - \alpha\cos\theta) \\ -r_A\alpha\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Dans le référentiel T*xyz*, le module Δ de $\overrightarrow{M_0A}$ s'exprime par :

$$\Delta = r_A\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} \tag{3.17}$$

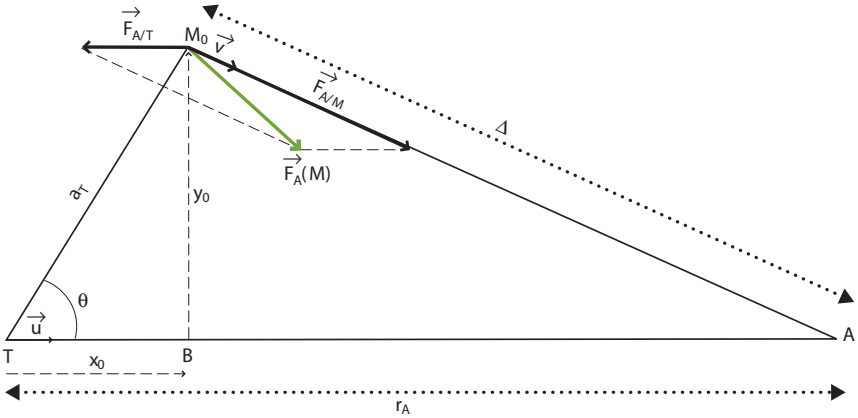


Figure 3.6 — Repère orthonormé Txyz : Txy est le plan TAM$_0$ du vertical de l'astre A au point $M_0(x_0, y_0, 0)$ avec Tx selon $\overrightarrow{TA}$; l'axe Tz n'est pas représenté.

Il est évident que cette expression (3.17) est valable pour tous les points $M(x, y, z)$ de l'intersection du globe avec la sphère de rayon Δ, c'est-à-dire la circonférence de rayon $y_0 = a_T \sin\theta$, de centre B et admettant l'axe $\overrightarrow{TA}$ comme axe de révolution.

Rappelons que la force génératrice de la marée $\vec{F}_A(M)$, liée à l'astre A et s'exerçant en tout point $M(x, y, z)$ de l'environnement terrestre, est la différence de deux composantes élémentaires, la force d'attraction $\vec{F}_{A/M}$ de l'astre A sur M, et la force d'entraînement $\vec{F}_{A/T}$ du repère lié la Terre (force égale à attraction de l'astre A sur T).

L'expression analytique de chacune de ces deux composantes est régulière, c'est-à-dire définie, non nulle, bornée, continue et au moins une fois dérivable. Leur distribution spatiale entraîne l'existence de lignes de forces présentant une structure « méridienne » par rapport à l'axe de révolution $\overrightarrow{TA}$ qui joue le rôle d'axe « polaire » pour les deux champs définis par ces distributions. De plus, la force $\vec{F}_{A/T}$ est constante en module et direction, et la seconde $\vec{F}_{A/M}$ est radiale de direction $\overrightarrow{MA}$ et de module fonction de θ. Leur rotationnel est donc nul ; c'est la condition nécessaire et suffisante pour que chacune de ces forces élémentaires dérive d'un potentiel. Il en résulte l'existence de deux champs « méridiens » ayant même axe de révolution $\overrightarrow{TA}$. Leur différence définit le potentiel générateur correspondant à l'astre considéré. Ce potentiel est donc lui aussi défini par un champ méridien d'axe $\overrightarrow{TA}$.

2.1.1 • Expression du potentiel de $\overrightarrow{F}_{A/M}$, force d'attraction exercée par l'astre A sur tout point M de masse unité

Cette force définit le champ « puits » (de forces gravitationnelles) créé par l'astre. Toute sphère centrée sur A est équipotentielle. Nous pouvons vérifier que le flux Φ de cette force radiale à travers chacune de ces sphères est constant (divergence nulle), en effet :

$$\Phi = 4\pi\Delta^2 F_{A/M}$$

avec

$$F_{A/M} = km_A/\Delta^2 \Rightarrow \Phi = 4\pi km_A$$

pour mémoire : k est la constante de la gravitation universelle et m_A la masse de l'astre). En prenant le sens positif de M vers A, l'expression du potentiel de tout point M est donc :

$$U_{(r)}(M) = km_A/\Delta \tag{3.18}$$

l'indice (r) indiquant qu'il s'agit d'un champ à lignes de force « radiales » (l'astre apparaît dans le second membre en indice pour la masse). Ainsi, compte tenu de la valeur de Δ donnée par (3.17), la relation (3.18) peut s'exprimer dans le voisinage de T en fonction du potentiel $U_{(r)}(T)$ et d'une série de polynômes de Legendre. En effet, la condition $|2\alpha\cos\theta - \alpha^2| < 1$ étant satisfaite, l'expression déduite de (3.17) donnant r_A/Δ représente la fonction génératrice des polynômes de Legendre (voir annexe B), soit :

$$r_A/\Delta = 1/\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} = \sum_{n=0}^{n\to\infty} \alpha^n P_n(\cos\theta) \tag{3.19}$$

En désignant $U_{(r)}(T)$ par $U_A(T)$, nous avons :

$$U_A(T) \equiv U_{(r)}(T) = km_A/r_A \tag{3.20}$$

Ainsi le potentiel méridien d'attraction $U_{(r)}(M)$ de l'astre A en M en fonction du potentiel en T et de la distance zénithale géocentrique θ s'exprime par :

$$U_{(r)}(M) = U_A(T) \sum_{n=0}^{n\to\infty} \alpha^n P_n(\cos\theta) \tag{3.21}$$

2.1.2 • Expression du potentiel de $\overrightarrow{F}_{A/T}$, force d'entraînement du référentiel lié à la Terre (égale à l'attraction de l'astre A au centre de la Terre T

Cette deuxième force élémentaire est identique en tout point M de l'environnement terrestre. Restant toujours parallèle à l'axe de révolution $\overrightarrow{TA}$, elle définit ainsi un champ méridien à lignes de forces « parallèles ». Ce champ

sera indiqué par (p), soit $U_{(p)}(M)$ Dans le référentiel Txyz, la représentation matricielle de ses composantes est :

$$\overrightarrow{F}_{A/T} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{A/T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_A/r_A^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{AT}/r_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le flux de forces dans tout tube ayant des génératrices parallèles à $\overrightarrow{TA}$ est constant. Les équipotentielles sont donc les plans perpendiculaires à l'axe du champ. Dans le voisinage de T, le potentiel correspondant $U_{(p)}(M)$ de tout point M du plan perpendiculaire à $\overrightarrow{TA}$ en B (équipotentielle de M_0) peut s'écrire :

$$U_{(p)}(M) = U_A(T) + x_0 F_{A/T} = U_A(T)\big(1 + \alpha \cos\theta\big) \tag{3.22}$$

avec $U_A(T)$ donné par (3.20) et x_0 par (3.16). Le produit $x_0 F_{A/T}$ représente le travail de la force $\overrightarrow{F}_{A/T}$ le long de tout chemin allant de T à tout point M du plan équipotentiel contenant M_0.

Ainsi, en notant que les premiers polynômes de Legendre sont $P_0(\cos\theta) = 1$ et $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, la relation (3.22) donnant le potentiel méridien correspondant à la force d'entraînement $\overrightarrow{F}_{A/T}$ s'exprime également par :

$$U_{(p)}(M) = U_A(T)\big[1 + \alpha P_1(\cos\theta)\big] \tag{3.23}$$

2.2 • Champ du potentiel de marée, engendré par un astre

La force génératrice de la marée pour un astre donné étant la différence des forces $\overrightarrow{F}_{A/M}$ et $\overrightarrow{F}_{A/T}$, il en résulte que le potentiel de marée U, induit par l'astre A au point M, est ainsi obtenu par la différence des deux potentiels élémentaires $U_{(r)}(M)$ et $U_{(p)}(M)$, fournis respectivement par (3.21) et (3.23), soit :

$$U = U_{(r)}(M) - U_{(p)}(M) = U_A(T) \sum_{n=2}^{n\to\infty} \alpha^n P_n(\cos\theta) \tag{3.24a}$$

Nous avons symbolisé ce potentiel tout simplement par U du fait que la nature de l'astre A et les coordonnées du point M dans le vertical de l'astre apparaissent dans le second membre.

En tenant compte d'une part des expressions (3.6), (3.13), (3.14) et (3.20) définissant respectivement k en fonction de g, la parallaxe i_A, le paramètre χ_A et le potentiel $U_A(T)$, et en posant d'autre part : $\alpha = (a_T/r_0)(r_0/r_A) =$

$\alpha_0 i_A \Rightarrow \alpha_0 = a_T/r_0$ le potentiel générateur U pour un astre déterminé s'exprime finalement par :

$$U = a_T g \chi_A \sum_{n=2}^{n\to\infty} i_A^{n+1} \alpha_0^{n-2} P_n(\cos\theta) \tag{3.24b}$$

Si les parallaxes i_A restent de l'ordre de l'unité, avec un maximum de 1,067 pour la Lune et de 1,017 pour le Soleil, il n'en est pas de même pour les rapports α_0 qui ont des ordres de grandeur inférieurs, environ $1{,}666 \cdot 10^{-2}$ pour la Lune et $0{,}427 \cdot 10^{-4}$ pour le Soleil. Ces éléments entraînent une décroissance très rapide des termes de la série (3.24b). Nous verrons au chapitre IV que seuls les premiers termes sont conservés (trois pour la Lune, deux pour le Soleil). Mais l'expression (3.24b), limitée au premier terme en $P_2(\cos\theta)$, constitue déjà une très bonne approximation du potentiel générateur de la marée lunaire, soit :

$$U \approx a_T g \chi_A (i_A)^3 P_2(\cos\theta) \tag{3.24c}$$

où

$$P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2 \tag{3.25}$$

Le potentiel générateur de la marée observée est évidemment constituée de la somme des potentiels relatifs aux deux astres générateurs (Lune et Soleil). Il est souvent désigné par « potentiel luni-solaire ». Ce potentiel global n'est pas méridien, sauf aux équinoxes au moment où les déclinaisons des astres sont nuls et les angles horaires identiques. À cet instant, les axes des deux champs sont confondus et l'action des deux astres sur la marée est maximale.

En posant $C_A = 3\chi_A g a_T/4$, valeur constante, la relation (3.24c) devient :

$$U \approx 2C_A i_A^3 [\cos^2\theta - (1/3)] \tag{3.26}$$

Cette dernière relation va nous permettre de mettre en évidence la décomposition du potentiel en trois espèces définies par Laplace.

3 • Décomposition du potentiel en « espèces » de Laplace

Les systèmes de coordonnées sphériques sont exposés dans l'annexe A. Il y est établi notamment la relation donnant la distance zénithale géocentrique θ en fonction des coordonnées horaires de l'astre A (angle horaire $\text{Æ}H$ et déclinaison δ) et de la latitude L du point M par la relation des cosinus dans le triangle PAM (figure 3.7), soit :

$$\cos\theta = \sin L \sin\delta + \cos L \cos\delta \cos \text{Æ}H \tag{3.27}$$

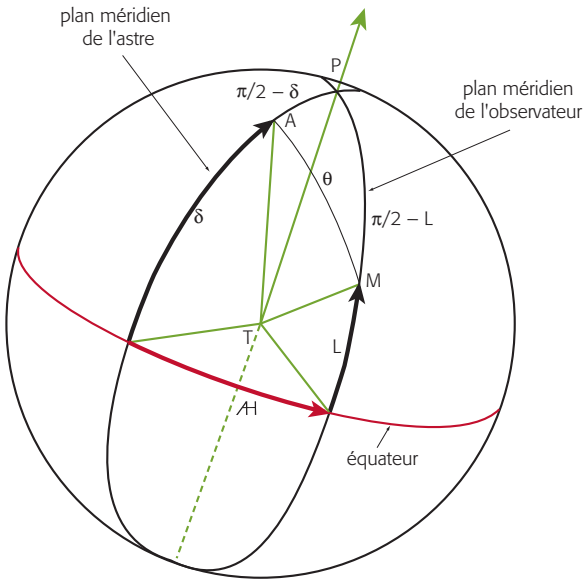


Figure 3.7 — Position relative de l'astre A, du zénith M et du pôle nord P sur la sphère céleste locale.

En remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur donnée par (3.27), l'expression (3.26) du potentiel générateur U devient :

$$U = C_A i_A^3 [3(\sin^2 L - \frac{1}{3})(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}) + \sin 2L \sin 2\delta \cos Æ + \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2Æ] \quad (3.28)$$

Cette relation fait apparaître la somme de trois composantes des potentiels U_i (i égal à 0, 1 ou 2), chacun d'eux définissant un domaine de fréquences bien déterminé de la marée, soit :

$$U_0 = 3C_A i_A^3 \left(\sin^2 L - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}\right) \quad (3.29)$$

$$U_1 = C_A i_A^3 \sin 2L \sin 2\delta \cos Æ \quad (3.30)$$

$$U_2 = C_A i_A^3 \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2Æ \quad (3.31)$$

La valeur du coefficient de l'angle horaire Æ dans chaque composante du potentiel U_i, fournit une classification des espèces par domaines de fréquences : 0 pour les longues périodes (LP), 1 pour les espèces diurnes et 2 pour les espèces semi-diurnes.

Les trois composantes U_i ont en commun le paramètre i_A^3 qui, en première approximation, est équivalent à $1 + 3e_A \cos(\sigma_A t)$ où σ_A est la vitesse angulaire de l'astre A sur son orbite d'excentricité e_A (annexe A). Ce paramètre introduit dans toutes les « espèces de marées » des modulations liées à la révolution de chaque astre (annuelle pour le Soleil, mensuelle pour la Lune). La partie la plus instructive est constituée par les autres facteurs.

L'expression (3.29) du potentiel U_0 (espèces « longues périodes » ou « basses fréquences ») ne contient pas l'angle horaire (coefficient 0 pour Æ) et ne dépend que des deux autres paramètres, déclinaison δ et latitude L :

— dans le facteur $\sin^2\delta - 1/3$, la déclinaison intervient par le carré de son sinus ; comme $\sin^2\delta = \dfrac{1-\cos 2\delta}{2}$, la variation temporelle de ce facteur introduit une composante de période égale à la moitié du temps de révolution de l'astre, soit environ 14 jours pour la Lune et 6 mois pour le Soleil. Compte tenu des valeurs extrêmes atteintes par les déclinaisons de la Lune (28°30′) et du Soleil (23°27′), ce facteur est toujours négatif.

— Le second facteur, $(\sin^2 L - 1/3)$, s'annule aux latitudes L telles que $\sin L = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire sur les parallèles 35°16′N et 35°16′S. Les nodales, lieu des points où ce terme longue période s'annule, sont ainsi les deux parallèles correspondants. Cette particularité affecte ainsi une répartition dite « zonale » (figure 3.8) au terme « longues périodes » de la marée.

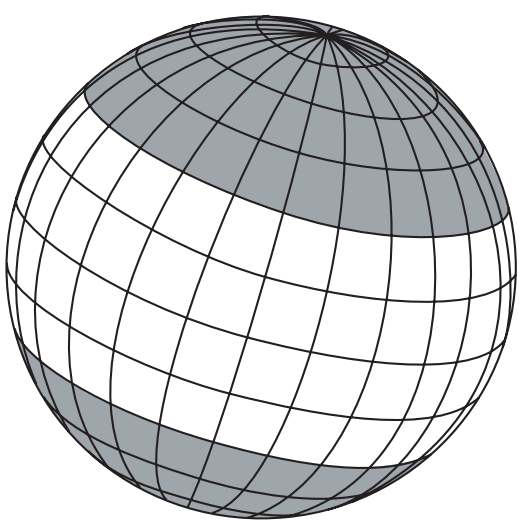


FIGURE 3.8 — Répartition « zonale » du terme « longues périodes » ou « basses fréquences » : $U_0 \propto (\sin^2 L - 1/3)(\sin^2\delta - 1/3)$.

En tenant compte que le premier facteur est toujours négatif, il en résulte que le terme LP du potentiel est toujours positif pour les latitudes comprises entre 35°16′N et 35°16′S et négatif ailleurs.

Notons qu'au cours d'une révolution de l'astre sur son orbite, la moyenne du terme U_0 n'est pas nulle et ne dépend que de la latitude.

La relation (3.30) U_1 des espèces « diurnes » contient le produit $\sin 2L \sin 2\delta \cos Æ$ où $Æ$ apparaît avec le coefficient 1. Ce terme a pour nodales l'équateur ($\sin 2L = 0$) et le grand cercle méridien normal au méridien de l'astre ($\cos Æ = 0$). C'est un terme donnant une répartition dite « tessérale » (en mosaïque : figure 3.9), dont le signe change avec celui de la déclinaison δ. La périodicité de l'angle horaire $Æ$ est approximativement de 24 heures pour le Soleil et de 24 h 50 min pour la Lune. Mais la déclinaison δ, tout comme le cube i_A^3 de la parallaxe, présente une variation lente (annuelle pour le Soleil, mensuelle pour la Lune) devant celle de l'angle horaire $Æ$. La variation de 2δ intervient comme une modulation (14 jours pour la Lune, 6 mois pour le Soleil) de l'amplitude de cette « espèce », dont la période dominante, imposée par celle de $Æ$, lui vaut l'appellation « diurne ».

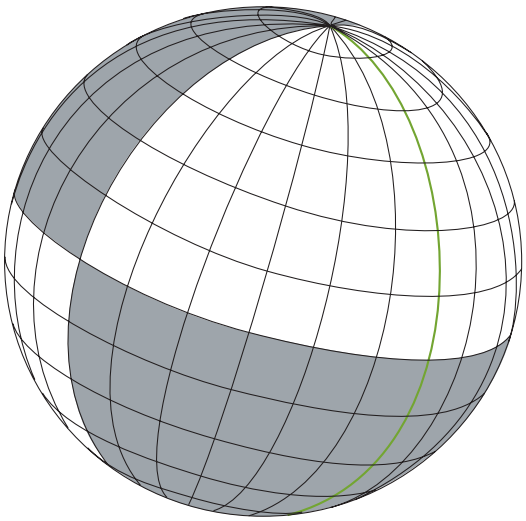


Figure 3.9 — Répartition tessérale du terme diurne : $U_1 \propto \sin 2L \sin 2\delta \cos Æ$.

Le module du terme diurne est maximum lorsque l'astre traverse le plan méridien supérieur ou inférieur du lieu ; à ce moment nous avons $|\cos Æ| = 1$. Les maximums maximorums sont atteints aux latitudes 45°N et 45°S ($|\sin 2L| = 1$) lorsque la déclinaison δ est maximale en valeur

absolue (23°27′ pour le Soleil et 28°30′ pour la Lune). Ce terme est nul pour les points de l'équateur et aux pôles ($\sin 2L = 0$) ou lorsque la déclinaison de l'astre est nulle avec $\sin 2\delta = 0$.

Enfin pour U_2, composante du potentiel des espèces semi-diurnes, l'angle horaire $\text{Æ}H$ apparaît avec le coefficient 2 dans le terme $\cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2\text{Æ}H$. Il admet comme nodales les cercles méridiens, situés à 45° de part et d'autre du méridien de l'astre, pour lesquels $\cos 2\text{Æ}H$ est nul.

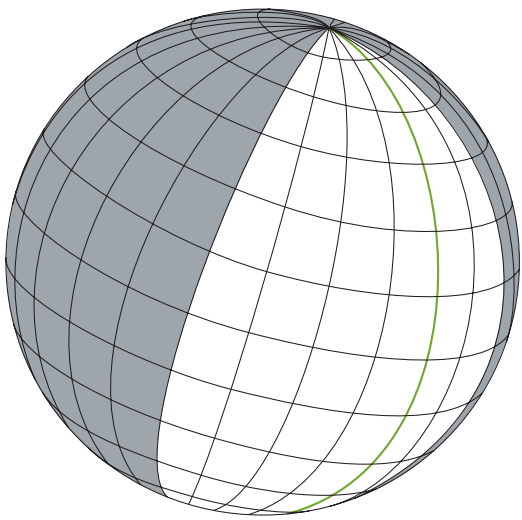


FIGURE 3.10 — Répartition sectorielle du terme semi-diurne : $U_2 \propto \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2\text{Æ}H$.

Ces nodales divisent la Terre en quatre secteurs et définissent une répartition dite « sectorielle » (figure 3.10) sur le globe (4 secteurs de 90°). Ce terme est positif dans les deux secteurs opposés dont la section médiane est le méridien de l'astre, et négatif dans les deux autres. En outre, il admet deux maximums et deux minimums par jour, du fait de la périodicité de $\cos 2\text{Æ}H$. Les maximums maximorums sont atteints par les points à l'équateur ($\cos^2 L = 1$) au moment du passage de l'astre à cette ligne ($\cos^2 \delta = 1$). Ce terme est nul aux pôles.

Dans le chapitre suivant, nous verrons comment Laplace va établir sa méthode de prédiction des pleines et basses mers à partir de la décomposition en trois espèces.

IV

Théorie dynamique de la marée : Laplace

Laplace fut le premier à traiter la marée comme un problème d'hydrodynamique. Les équations qu'il a formulées sont difficilement intégrables, sauf cas particulier, mais elles n'ont jamais été remises en question et ont servi de fondement aux développements ultérieurs avec l'apparition des ordinateurs. Cependant, par une analyse semi-empirique s'appuyant sur les observations, la structure de ces équations lui a permis de mettre au point une formule et une méthode de prédiction, qui portent son nom. Au début, la prédiction se bornait au calcul des pleines et basses mers. En France, cette méthode est restée en usage, avec des modifications mineures, jusqu'aux environs de la fin du XXe siècle. Elle sert encore à calculer le « coefficient de marée » très populaire sur les côtes atlantiques françaises. Une définition généralisée de ce coefficient sera établie dans le chapitre suivant, en s'appuyant sur l'analyse harmonique de la marée.

1 • Les équations de Laplace

En 1776, Laplace établit les équations fondamentales de la réponse océanique à l'action exercée par la force génératrice de la marée. Nous allons préciser les hypothèses avec les notations utilisées jusqu'ici. En l'absence de potentiel générateur, la terre est sphérique de rayon a_T, animée d'une rotation uniforme autour de l'axe des pôles (vecteur rotation $\overrightarrow{\omega_T}$), recouverte d'un océan de densité ρ constante, incompressible et de profondeur H dépendant du lieu M de coordonnées géographiques (G, L). En présence du potentiel générateur luni-solaire U, la sphère devient un sphéroïde avec

un bourrelet liquide. Laplace tient compte de la modification du potentiel par la présence de ce bourrelet. Pour simplifier la présentation, l'influence de ce dernier ne sera pas prise en compte (la correction correspondante est de l'ordre de 10%). L'hypothèse majeure faite par Laplace est de considérer une réponse linéaire du niveau océanique à l'excitation de la force génératrice, ce qui conduit à négliger les termes non linéaires des équations de l'hydrodynamique. La composante horizontale de la force génératrice engendre un courant océanique dont la vitesse horizontale $\overrightarrow{u}$ est identique sur toute la profondeur H de l'océan. Les grandeurs $\overrightarrow{u}$ et H variant avec le lieu M, la continuité du fluide implique des variations de la cote z de la surface marine, qui engendrent ainsi l'onde de marée. Précisons que ce niveau z est défini sur la verticale ascendante locale (vecteur unitaire $\overrightarrow{\zeta}_{\mathrm{M}}$), à partir de la sphère initiale.

Laplace résume sa théorie par les équations suivantes :

— la première est l'équation de continuité appliquée à un fluide incompressible qui implique une divergence nulle pour la vitesse ; dans le cas présent, cette équation se traduit par :

$$\overrightarrow{\nabla}_h \cdot (\mathrm{H}\overrightarrow{u}) + \partial z/\partial t = 0 \tag{4.1}$$

où $\overrightarrow{\nabla}_h \cdot (\mathrm{H}\overrightarrow{u})$ est le produit scalaire (symbole $\cdot$) de l'opérateur gradient vectoriel horizontal $\overrightarrow{\nabla}_h$ de composantes $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ dans un système cartésien, et du vecteur $\mathrm{H}\overrightarrow{u}$ représentant le transport de toute la colonne d'eau ;

— la seconde est l'équation du mouvement horizontal du fluide, soit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + 2\overrightarrow{\omega}_{\mathrm{T}} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}_h(\mathrm{U} - gz). \tag{4.2a}$$

Il est surprenant de constater que Laplace est le premier, en 1776, à tenir compte de l'effet de la rotation terrestre $\overrightarrow{\omega}_{\mathrm{T}}$ sur les courants marins, alors que l'accélération induite $2\overrightarrow{\omega}_{\mathrm{T}} \wedge \overrightarrow{u}$ est désormais attribuée au mathématicien Coriolis, qui la redécouvre près d'un demi-siècle plus tard en 1835 ! Les océanographes et les météorologistes appellent ainsi « paramètre de Coriolis » (symbolisé par f) la projection du vecteur $2\overrightarrow{\omega}_{\mathrm{T}}$ sur la verticale ascendante locale, soit :

$$f = 2\overrightarrow{\omega}_{\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{\zeta}_{\mathrm{M}} = 2\omega_{\mathrm{T}} \sin \mathrm{L}$$

qui a même signe que la latitude (positif au nord, négatif au sud). L'expression (4.2a) peut encore s'écrire en considérant le vecteur vertical $f\,\overrightarrow{\zeta}_{\mathrm{M}}$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + f\,\overrightarrow{\zeta}_{\mathrm{M}} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}_h(\mathrm{U} - gz) \tag{4.2b}$$

Les expressions (4.1) et (4.2b), exprimées en coordonnées sphériques, constituent les équations fondamentales de la marée, formulées par Laplace.

En considérant le terme U — *gz* constant, nous retrouvons la marée statique. Le gradient horizontal est nul et une solution pour (4.2b), mais qui ne vérifie pas strictement (4.1) sans propagation d'ondes internes dans l'océan, est le courant d'inertie, appelé aussi oscillation d'inertie.

2 • La formule de Laplace

La linéarité de la réponse océanique à l'action de la force se traduit par des mouvements de faibles amplitudes (termes non - linéaires négligés et superposition des petits mouvements). Par l'étude de ces équations, en introduisant notamment un terme de frottement proportionnel à la vitesse dans (4.2a), Laplace montre que les conditions initiales n'ont pas un rôle majeur du fait de leur dissipation. Il en conclut que les seules solutions réalistes sont celles qui ont un caractère oscillatoire (oscillations forcées). Ces hypothèses, Laplace les énonce ainsi :

— En ce qui concerne la superposition des petits mouvements (linéarité de la réponse) : « Le mouvement total d'un système soumis à de très petites forces est la somme des mouvements que chaque force lui imprime ».

— Et pour les oscillations forcées (dissipation des conditions initiales et périodicité de la réponse) : « L'état d'un système de corps matériels, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par suite des résistances passives qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent ».

Bien qu'extrêmement simple, ce système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général. Cependant, après avoir mis en évidence la possibilité de décomposer le potentiel U en une somme de trois termes (correspondant aux trois espèces de marées définies au chapitre III), Laplace va exploiter ce résultat pour établir, par une analyse semi-empirique, la formule donnant la marée en un lieu déterminé. La fiabilité et la précision de cette méthode ont fait qu'elle a été utilisée par le Service Hydrographique Français, avec quelques modifications mineures, jusqu'en 1992. Tout en conservant l'esprit de l'approche semi-empirique suivie par Laplace, la formulation est établie ci-après en utilisant les outils mathématiques employés pour le traitement du signal (fonction de transfert, admittance, convolution, décomposition en séries harmoniques et/ou de Fourier, distribution de Dirac, etc.). Après un court rappel sur la réponse d'un système linéaire à une excitation extérieure, nous expliciterons la formulation de Laplace pour les 3 espèces de marées

relatives à un astre déterminé. La somme des expressions obtenues avec les deux astres générateurs aboutit à la « formule de Laplace » pour la marée luni-solaire en un point donné.

2.1 • Hauteurs des trois espèces de marées, formule de Laplace

Pour des raisons de simplification, le temps sidéral (voir annexe A) est choisi comme temps de référence. Les fluctuations $\Delta\omega_T$ de la rotation terrestre étant suffisamment faibles ($\max|\Delta\omega_T/\overline{\omega}_T| \approx 10^{-7}$), ce temps peut être considéré comme uniforme pour les besoins de la marée. Il conviendrait de le symboliser par t_γ pour le différencier du temps moyen, mais par commodité, nous le désignons ici par t. C'est l'angle horaire $Æ_\gamma(G, t)$ du point vernal, ou point γ, par rapport à un méridien pris pour origine, soit pour celui de Greenwich (longitude $G = 0$) : $Æ_\gamma(0, t) = \omega_T t$.

En désignant par α_A l'ascension droite de l'astre et par δ_A sa déclinaison (voir annexe A), au point $M(G, L)$, l'astre $A(\alpha_A, \delta_A)$ a pour angle horaire $Æ_A(G, t)$, symbolisé par la suite par $Æ_A(t)$, qui satisfait à la relation :

$$Æ_A(G, t) \equiv Æ_A(t) = (\omega_T t + G) - \alpha_A \tag{4.3}$$

(pour mémoire : la longitude G est positive à l'Est de Greenwich, négative à l'Ouest, tous les angles sont exprimés ici en radians).

Par ailleurs, l'expression (3.28) du potentiel générateur U_A, correspondant à l'astre A, s'exprime sous la forme de trois composantes relatives aux espèces de Laplace :

$$U_A = U_{A,0} + U_{A,1} + U_{A,2} = \sum_{k=0}^{k=2} U_{A,k}$$

où l'indice k dans la sommation représente le coefficient de l'angle horaire $Æ_A(t)$ dans l'expression du potentiel $U_{A,k}$.

De plus, dans (3.28), nous avons des termes constants pour un astre et un lieu déterminés. Le coefficient C_A ne dépend que de l'astre (pour mémoire : $r_0 = \overline{r_A}$, le symbole « surligné » indiquant la valeur moyenne) ; il est égal à :

$$C_A = \frac{3}{4} g a_T \chi_A \text{ avec } \chi_A = \frac{m_A}{m_T}\left(\frac{a_T}{r_0}\right)^3.$$

Désignons par $B_{A,k}(M)$ les termes relatifs à chacune des espèces, qui

dépendent en outre de la latitude L du point M, soit :

$$B_{A,0}(M) = 3C_A \frac{(1 - 3\sin^2 L)}{3} \tag{4.4a}$$

$$B_{A,1}(M) = C_A \sin(2L) \tag{4.4b}$$

$$B_{A,2}(M) = C_A \cos^2 L \tag{4.4c}$$

Ne traitant que l'effet d'un seul astre, l'indice A sera omis ci-dessous, mais sera rétabli dès que la compréhension du texte l'exigera. Il en sera de même pour le point M dans l'expression des termes B_k. En revanche, nous faisons apparaître le temps t pour les paramètres qui en dépendent. Les trois potentiels s'expriment ainsi par :

$$U_0(t) = B_0 i^3(t) \frac{[1 - 3\sin^2 \delta(t)]}{3} \tag{4.5a}$$

$$U_1(t) = B_1 i^3(t) \sin 2\delta(t) \cos Æ(t) \tag{4.5b}$$

$$U_2(t) = B_2 i^3(t) \cos^2 \delta(t) \cos 2Æ(t) \tag{4.5c}$$

La parallaxe $i(t)$ et les fonctions trigonométriques contenant les coordonnées de l'astre (α, δ) sont des termes périodiques essentiellement liés à la révolution tropique de l'astre (365,242 jours pour le Soleil et 27,321 pour la Lune). En tenant compte de la relation (4.3), il vient pour $U_1(t)$ et $U_2(t)$:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= B_1 i^3(t) \sin 2\delta(t)[\cos\alpha(t)\cos(\omega_T t + G) + \sin\alpha(t)\sin(\omega_T t + G)] \\ U_2(t) &= B_2 i^3(t) \cos^2 \delta(t)\big[\cos 2\alpha(t)\cos 2(\omega_T t + G) \\ &\qquad + \sin 2\alpha(t)\sin 2(\omega_T t + G)\big]. \end{aligned}$$

Les facteurs de $\cos(\omega_T t + G)$ et de $\sin(\omega_T t + G)$ étant périodiques de période $2\pi/\Omega_A$, il en résulte la possibilité de les développer en série de Fourier.

Il en résulte la possibilité de développer les potentiels de chaque espèce de marée k, y compris $U_0(t)$ qui est donné par (4.5a), en séries harmoniques du type :

$$U_k(t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} p_{kn} \cos(\nu_{kn} t - \alpha_{kn}) \tag{4.6}$$

où les fréquences discrètes donnant des spectres de raies, sont définies par la relation :

$$\nu_{kn} = k\omega_T + n\Omega_A \tag{4.7}$$

en désignant par Ω_A la vitesse angulaire moyenne de l'astre sur son orbite, exprimée ici en radian par unité de temps sidéral.

Appelons l'attention sur le fait que le symbole k représente toujours le coefficient de l'angle horaire dans les expressions des potentiels correspondants

(pour mémoire : LP, $k = 0$; diurnes, $k = 1$; semi-diurnes, $k = 2$). Rappelons aussi que la vitesse de la rotation terrestre $\omega_T \approx 1$ cpj (cycle par jour) est très grande par rapport à Ω_A ($\Omega_L \approx 1/28$ cpj pour la Lune L et $\Omega_S \approx 1/365$ cpj pour le Soleil S). Il en résulte que les sommations en n sont faites dans un intervalle $(-N, +N)$ où N est un entier en général de quelques unités. Les termes B_i qui sont liés aux caractéristiques de l'astre et à la latitude du lieu, mais indépendants du temps, sont inclus dans la valeur des amplitudes p_{kn}. D'autre part, il convient de remarquer que les écarts en fréquence, dans chaque ensemble d'espèces, sont faibles et que les amplitudes p_{kn} deviennent rapidement très faibles ou négligeables avec les valeurs croissantes de la valeur absolue de n.

En ajoutant à chacune des composantes en cosinus la composante imaginaire associée en sinus, ayant même amplitude et même argument, les potentiels $U_k(t)$ deviennent les parties réelles des séries complexes :

$$\Psi_k(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} p_{kn} e^{j(\nu_{kn} t - \alpha_{kn})} \tag{4.8}$$

Les hauteurs correspondantes $h_k(t)$ sont représentées par les parties réelles des séries :

$$\eta_k(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} h_{kn} e^{-j\phi_{kn}} e^{j(\nu_{kn} t - \alpha_{kn})} \tag{4.9a}$$

ou encore

$$\eta_k(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_{kn} p_{kn} e^{j(\nu_{kn} t - \alpha_{kn})} \tag{4.9b}$$

les termes a_{kn} représentant les admittances complexes propres à chaque fréquence ν_{kn} :

$$a_{kn} = w_{kn} e^{-j\alpha_{kn}} \tag{4.10}$$

Laplace définit les admittances sur une base semi-empirique, en s'appuyant d'une part sur les observations (donc dépendant du lieu), et d'autre part sur le fait que les fréquences propres à chaque espèce se concentrent dans un domaine relativement restreint. C'est ainsi que Laplace retient en première approximation les hypothèses suivantes. En premier lieu, les facteurs d'amplitude w_{kn} conservent une valeur constante b_k pour chaque espèce k, indépendante de la fréquence mais pas de l'astre, soit :

$$w_{kn} \equiv b_k$$

pour tout n. Pour indiquer sa relation avec l'astre A, ce facteur d'amplitude sera symbolisé dans la suite du texte par $b_{\mathrm{A},k}$.

En ce qui concerne les déphasages φ_{kn}, leurs valeurs sont fonction des fréquences au sein de l'espèce. Ils sont fonction linéaire croissante de la fréquence dans le domaine correspondant à chaque espèce, c'est-à-dire :

$$d\varphi_{kn}/d\nu_{kn} = \mathrm{T}_k$$

Les trois paramètres T_k sont des laps de temps induisant des retards de phases liées aux fréquences ; ce sont les « âges » des espèces de marées correspondantes. Par intégration, il vient :

$$\varphi_{kn} = \nu_{kn}\mathrm{T}_k + k\lambda_k$$

où $k\lambda_k$ est un déphasage constant pour l'espèce considérée, et indépendant de la fréquence. Laplace considère en outre que le couple de paramètres $(\mathrm{T}_k, k\lambda_k)$ est identique pour les deux astres générateurs. Ainsi, l'indice correspondant à l'astre n'apparaîtra pas dans la notation de ces paramètres. Pour le groupe des espèces LP ou « longues périodes », en raison de la lenteur des déplacements induits dans l'océan, Laplace adopte l'hypothèse d'une réponse en phase avec celle de la théorie statique, c'est-à-dire T_0 et λ_0 nuls.

En résumé, les admittances selon Laplace ont des facteurs d'amplitude $b_{\mathrm{A},k}$ constants pour un astre et un groupe d'espèces déterminé. En revanche, les déphasages φ_{kn} ne dépendent pas des astres et sont caractérisés, pour chaque espèce, par un âge T_k, introduisant un retard lié à la fréquence ν_{kn}, et par un déphasage constant $k\lambda_k$. En désignant par $\mathrm{D}(t)$ la distribution de Dirac, la traduction de ces hypothèses donne pour chaque espèce la fonction de transfert complexe (ajout de l'indice A pour l'astre) :

$$\Phi_{\mathrm{A},k}(t) = b_{\mathrm{A},k}e^{-jk\lambda_k}\mathrm{D}(t - \mathrm{T}_k) \tag{4.11}$$

avec T_0 et λ_0 nuls pour les espèces LP ($k = 0$). Ainsi chaque fonction de transfert rassemble tous les éléments concernant les hypothèses de Laplace : gain, déphasage et âge de l'espèce. Il convient de rappeler que la convolution de $\mathrm{D}(t-\mathrm{T})$ avec une fonction $\mathrm{U}(t)$ a pour effet d'opérer une translation dans le temps de $-\mathrm{T}$:

$$\mathrm{D}(t - \mathrm{T}) * \mathrm{U}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}(\tau - \mathrm{T}) * \mathrm{U}(t - \tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{U}(t - \mathrm{T})$$

La réponse de l'océan au potentiel complexe donné par (4.8) pour un astre donné, s'exprime donc par :

$$\eta_{\mathrm{A},k}(t) = \Phi_{\mathrm{A},k}(t) * \Psi_{\mathrm{A},k}(t) \tag{4.12}$$

Pour un astre A déterminé et à un instant t donné, la somme des parties réelles de chaque espèce (indice et facteur k), la hauteur correspondante $h_{A,k}(M,t)$ s'écrit :

$$h_{A,k}(M,t) = b_{A,k}(M) \sum_n u_{A,k,n} \cos\big[(k\omega_T + n\Omega_A)(t - T_k) - \varphi_{A,k,n} - k\lambda_k\big] \quad (4.13)$$

en notant que le facteur d'amplitude, fonction du lieu M, est symbolisé par $b_{A,k}(M)$. Par ailleurs, en raison de l'équivalence de l'expression en séries harmoniques (4.6) des potentiels $U_k(t)$ et de leurs relations d'origine (4.5a, 4.5b et 4.5c), la formule (4.13) s'explicite pour chaque ensemble d'espèces ($k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$) par les expressions suivantes, dans lesquelles les indices $t - T_k$ attribués aux éléments astronomiques i_A, ∂_A et $Æ_A$ signifient que ceux-ci sont pris aux instants $t - T_k$.

$$h_{A,0}(M,t) = H_{A,0}(M)\big[i_{A(t-T_0)}\big]^3 \left[1 - 3\sin^2 \delta_{A(t-T_0)}\right] \quad (4.14a)$$

avec $T_0 = 0$

$$h_{A,1}(M,t) = H_{A,1}(M) \left[i_{A(t-T_1)}\right]^3 \sin\left[2\delta_{A(t-T_1)}\right] \times \cos\left[Æ_{A(t-T_1)} - \lambda_1\right] \quad (4.14b)$$

$$h_{A,2}(M,t) = H_{A,2}(M)\big[i_{A(t-T_2)}\big]^3 \cos^2 \delta_{A(t-T_2)} \times \cos\left(2\left[Æ_{A(t-T_2)} - \lambda_2\right]\right) \quad (4.14c)$$

Dans ces trois dernières relations, les hauteurs $H_{A,k}(M)$ ont des valeurs constantes au lieu d'observation pour une espèce et un astre déterminés, et sont données par la relation suivante :

$$H_{A,k}(M) = b_{A,k}(M) \times B_{A,k}(M)$$

où les coefficients $B_{A,k}(M)$ sont définis par (4.4a), (4.4b) et (4.4c). En désignant l'astre par L pour la Lune et par S pour le Soleil, la formule de Laplace pour la marée luni-solaire au point M est ainsi obtenue par la somme des trois espèces engendrées par chaque astre, soit :

$$h(M,t) = \sum_{k=0}^{k=2} \left[h_{L,k}(M,t) + h_{S,k}(M,t)\right] \quad (4.15)$$

Nous donnons à titre d'information les intervalles de variations des paramètres concernant les astres (parallaxe i_A et déclinaison δ_A) sont :

— pour la Lune :

$$\begin{aligned} 0{,}94 \leq i_{\mathrm{L}} \leq 1{,}06 \quad &\Rightarrow \quad 0{,}83 \leq i_{\mathrm{L}}^3 \leq 1{,}19 \\ -28°{,}57 \leq \delta_{\mathrm{L}} \leq 28°{,}57 \quad &\Rightarrow \quad -0{,}84 \leq \sin 2\delta_{\mathrm{L}} \leq 0{,}84 \\ &\Rightarrow \quad 0{,}77 \leq \cos^2 \delta_{\mathrm{L}} \leq 1 \end{aligned}$$

— Pour le Soleil :

$$\begin{aligned} 0{,}983 \leq i_{\mathrm{S}} \leq 1{,}016 \quad &\Rightarrow \quad 0{,}95 \leq i_{\mathrm{S}}^3 \leq 1{,}05 \\ -23°{,}44 \leq \delta_{\mathrm{S}} \leq 23°{,}44 \quad &\Rightarrow \quad -0{,}73 \leq \sin 2\delta_{\mathrm{S}} \leq 0{,}73 \\ &\Rightarrow \quad 0{,}84 \leq \cos^2 \delta_{\mathrm{S}} \leq 1 \end{aligned}$$

Au début des observations de la marée à Brest, les relevés se limitaient à la saisie des niveaux et des instants des pleines et basses mers. C'est à partir de ces relevés que tous les facteurs d'amplitude $b_{\mathrm{A},i}(\mathrm{M})$ ont été calculés par Laplace pour ensuite établir la prédiction des extremums journaliers et des heures correspondantes.

3 • Heure de la pleine mer ; coefficient de marée

Les calculs relatifs à la formule de Laplace concernent exclusivement la détermination des pleines et basses mers. Calculer ces instants et ces niveaux faisait largement appel à des processus itératifs adaptés aux moyens de l'époque avant l'avènement des calculatrices et des ordinateurs. Aussi, dans cette partie, nous limitons l'exposé au calcul du moment de la pleine mer et à la définition du coefficient de marée par Laplace.

3.1 • Calcul de l'heure de la pleine mer

Pour le calcul des heures de pleines et basses mers, Laplace néglige en première approximation l'influence des espèces « longues périodes » et « diurnes ». Seules les composantes luni-solaires semi-diurnes sont prises en compte avec une approximation supplémentaire, les composantes solaires étant considérées comme une perturbation des espèces lunaires correspondantes. Avec ces approximations de Laplace, la formule (4.15) devient :

$$h(\mathrm{M}, t) \approx h_{\mathrm{L},2}(\mathrm{M}, t) + h_{\mathrm{S},2}(\mathrm{M}, t) = h_2(\mathrm{M}, t) \tag{4.16}$$

$h_2(\mathrm{M}, t)$ étant la composante luni-solaire semi-diurne.

Pour alléger les écritures, il est sous-entendu dans la suite du texte que les hauteurs sont fonction du lieu M. Ainsi en posant :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{A},2} = \mathrm{H}_{\mathrm{A},2} \times i_{\mathrm{A}^3_{(t-\mathrm{T}_2)}} \times \cos^2 \delta_{\mathrm{A}_{(t-\mathrm{T}_2)}} \tag{4.17}$$

où l'indice A = L ou S, la hauteur $h_2(t)$ peut encore s'écrire,

$$h_2(t) = \mathrm{A}_{\mathrm{L},2} \cos\left(2[Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}_{(t-\mathrm{T}_2)}} - \lambda_2]\right) + \mathrm{A}_{\mathrm{S},2} \cos\left(2[Æ\mathrm{H}_{\mathrm{S}_{(t-\mathrm{T}_2)}} - \lambda_2]\right) \tag{4.18}$$

Pour les extremums, pleines ou basses mers, nous avons, en négligeant les variations des $\mathrm{A}_{\mathrm{A},2}$:

$$dh_2(t)/dt = 0$$

En effet, les fluctuations des amplitudes $\mathrm{A}_{\mathrm{S},2}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{L},2}$, autour de leur moyenne, présentent des périodes respectives d'un an (année tropique : 365,242 2 j) et près d'un mois (révolution tropique de la Lune : 27,321 58 j) ; elles varient donc lentement par rapport aux cosinus des angles horaires qui ont des périodes voisines de 24 heures. Laplace néglige la variation de ces amplitudes, mais leur affecte des valeurs calculées à une heure proche de $(t_{\mathrm{pm}} - \mathrm{T}_2)$, où t_{pm} est l'instant de la pleine mer (indice pm). Avec ces approximations, la relation (4.17) se réduit à l'équation :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{L},2}\,(\sin[2(Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}} - \lambda_2)]) \times (\mathrm{d}Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}/\mathrm{d}t) + \mathrm{A}_{\mathrm{S},2}\,(\sin[2(Æ\mathrm{H}_{\mathrm{S}} - \lambda_2)]) \times (\mathrm{d}Æ\mathrm{H}_{\mathrm{S}}/\mathrm{d}t) = 0 \tag{4.19}$$

où les angles horaires et leurs dérivées sont pris à l'instant $(t - \mathrm{T}_2)$. En tenant compte de la relation (4.10), la variation de $Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}$ rapportée à celle de $Æ\mathrm{H}_{\mathrm{S}}$ donne le paramètre $\mathrm{R}(t)$:

$$\mathrm{R}(t) = \frac{dÆ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}/dt}{dÆ\mathrm{H}_{\mathrm{S}}/dt} = \frac{\omega_{\mathrm{T}} - (d\alpha_{\mathrm{L}}/dt)}{\omega_{\mathrm{T}} - (d\alpha_{\mathrm{S}}/dt)} \tag{4.20}$$

Ce rapport $\mathrm{R}(t)$, fonction du temps, oscille faiblement autour d'une valeur moyenne $\overline{\mathrm{R}}$ qui peut être estimée en tenant compte de la vitesse angulaire moyenne de l'astre A sur son orbite ($\Omega_{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{A}}/\mathrm{d}t}$), soit

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{R}} &= \frac{\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}}} \\ \overline{\mathrm{R}} &\approx \frac{[1 - (\frac{1}{27{,}32}]}{[1 - (\frac{1}{365{,}24}]} \approx 0{,}966. \end{aligned} \tag{4.21a}$$

Laplace adopte la valeur approchée :

$$\overline{\mathrm{R}} \approx \frac{29}{30} = 0{,}966\,666\ldots \tag{4.21b}$$

Ce paramètre est connu à ce jour avec toutes les décimales suivantes :

$$\overline{\mathrm{R}} = \frac{24}{24{,}841\,202\,4} = 0{,}966\,136\,808 \tag{4.21c}$$

rapport des durées du jour solaire et du jour lunaire.

L'approximation de Laplace s'est révélée suffisante pour le calcul de l'heure de la pleine mer.

En considérant la composante solaire comme une perturbation de la composante lunaire, et en désignant par $\varpi(t)$ l'écart des ascensions droites (ou des angles horaires) de la Lune et du Soleil, nous avons :

$$\varpi(t) = \alpha_L(t) - \alpha_S(t) \Rightarrow Æ_S(t) = Æ_L(t) + \varpi(t) \tag{4.22}$$

De cette égalité (4.22), on déduit :

$$\begin{aligned}\sin(2[Æ_S(t) - \lambda_2]) = \sin(2[Æ_L(t) - \lambda_2])\cos[2\varpi(t)] \\ + \cos(2[Æ_L(t) - \lambda_2])\sin[2\varpi(t)]\end{aligned}$$

En tenant compte de cette dernière relation et en posant :

$$p = Æ_L(t - T_2) - \lambda_2 \tag{4.23}$$

l'équation (4.19) nous permet d'écrire, avec l'approximation de Laplace pour $\overline{R}$, l'expression suivante :

$$\tan(2p) = \frac{-\sin[2\varpi(t - T_2)]}{(29/30)(A_{L,2}/A_{S,2}) + \cos[2\varpi(t - T_2)]} \tag{4.24}$$

Un processus itératif est alors entamé à partir d'une valeur initiale approchée du paramètre p. Connaissant l'instant exact d'un extremum du niveau, une pleine mer, par exemple (indice *pm*), la suivante aura lieu approximativement 12 h 25 min plus tard. Cette première information permet de déterminer la valeur correspondante de p_{pm} par la relation (4.24). On tient compte du fait que l'écart des ascensions droites des deux astres $\varpi(t)$, varie lentement en prenant :

$$\varpi(t - T_2) \approx \varpi(t) - T_2\frac{d\varpi(t)}{dt} \approx \varpi(t) - \mu_2 \tag{4.25}$$

avec l'angle $\mu_2 = T_2\overline{d\varpi(t)/dt} = (\Omega_L - \Omega_S)T_2$ constant.

En adoptant ensuite, pour origine des temps, l'instant t_0 du passage de la Lune au méridien du lieu, nous avons :

$$t_0 = 0 \Rightarrow Æ_L(t_0) = Æ_L(0) = 0$$

Par un développement limité de $Æ_L(t)$ à partir de cette origine, nous pouvons écrire en première approximation :

$$Æ_L(t) \approx Æ_L(0) + t(dÆ_L/dt)$$

soit

$$Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}(t) \approx [\omega_{\mathrm{T}} - (\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{L}}/\mathrm{d}t)]t \approx (\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{L}})t$$

Ainsi l'angle horaire de la Lune à l'instant $(t - \mathrm{T}_2)$ s'exprime par :

$$Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}(t - \mathrm{T}_2) \approx (t - \mathrm{T}_2) \times (\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{L}})$$

La relation (4.23) devient ainsi :

$$\lambda_2 + p_{\mathrm{pm}} \approx (t - \mathrm{T}_2) \times (\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{L}})$$

En tenant compte de l'expression (4.21b) du paramètre $\overline{\mathrm{R}}$ (valeur retenue par Laplace), l'instant t_{pm} de la pleine mer est ainsi obtenu par la relation :

$$t_{\mathrm{pm}} \approx \mathrm{T}_2 + \frac{30}{29} \times \frac{\lambda_2 + p_{\mathrm{pm}}}{\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}}} \tag{4.26a}$$

Notons que le terme $(\omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}})$ représente la vitesse angulaire du Soleil moyen par rapport à un méridien fixe, soit 360°/24h $\Rightarrow$ 15°/h, et que, par ailleurs, le globe est découpé en 24 fuseaux horaires de 15° d'angle (15° $\Rightarrow$ 1 h).

L'usage étant d'exprimer les angles λ_2 et p_{pm} en heures, les éléments précédents nous permettent d'écrire la relation donnant l'instant de la pleine mer, t_{pm}, à partir du passage de la Lune au méridien du lieu, par la relation :

$$t_{\mathrm{pm}} \approx \mathrm{T}_2 + \frac{30}{29}(\lambda_2 + p_{\mathrm{pm}}) \tag{4.26b}$$

avec λ_2 et p_{pm} en heures. Pour caractériser l'amplitude des marnages au cours de l'année, les éléments définis ci-dessus vont nous permettre de calculer également le « coefficient de marée ».

3.2 • Coefficient de marée

Le « coefficient de marée » est une notion introduite par Laplace et reprise dans les annuaires de marée des côtes de France à la fin du XIXe siècle. Pour comparer les marnages, Laplace a caractérisé chaque port par une unité de hauteur U, qu'il définit ainsi : « l'unité de hauteur est la valeur moyenne de l'amplitude (demi-marnage) de la plus grande marée qui suit d'un jour et demi environ l'instant de la pleine ou de la nouvelle Lune, vers les syzygies d'équinoxe ».

Le coefficient de marée C est un rapport d'amplitude qui résulte directement de cette définition. Par convention, le coefficient 100 est attribué au

demi-marnage moyen des vives-eaux qui suivent la syzygie la plus proche de l'équinoxe. Nous avons ainsi la formule :

$$\mathrm{C} = 100\frac{h_{\mathrm{pm}} - \mathrm{N}_{\mathrm{mm}}}{\mathrm{U}}$$

où h_{pm} est la hauteur d'une pleine mer et N_{mm} le niveau de mi-marée ; $h_{\mathrm{pm}} - \mathrm{N}_{\mathrm{mm}}$ représente le mi-marnage. En pratique, ce coefficient n'est calculé que pour le port de Brest, avec les seules composantes semi-diurnes de la marée.

L'évaluation de U s'effectue en considérant qu'au moment t_{S} d'une syzygie d'équinoxe moyenne, nous avons les éléments suivants :

— pour les angles horaires :

$$Æ\mathrm{H}_{\mathrm{S}}(t_{\mathrm{S}}) \pm 12\,\mathrm{h}$$

— pour les déclinaisons :

$$\delta_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{S}}) = \delta_{\mathrm{S}}(t_{\mathrm{S}}) = 0°$$

— pour les parallaxes moyennes :

$$i_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{S}}) = 120/119 \Rightarrow i_{\mathrm{L}}^{3}(t_{\mathrm{S}}) \approx 41/40 = 1{,}025$$
$$i_{\mathrm{S}}(t_{\mathrm{S}}) = 1$$

Pour chaque astre, la relation (4.14c) nous donne le maximum de la marée (pleine mer) de vive-eau T_2 heures après la syzygie, soit :

$$h_{\mathrm{A},2}(t_{\mathrm{S}} + \mathrm{T}_2) \approx \mathrm{H}_{\mathrm{A},2} i_{\mathrm{A}}^{3}(t_{\mathrm{S}})$$

Ainsi, une bonne approximation de l'unité de hauteur U est obtenue par la relation :

$$\mathrm{U} \approx \mathrm{U}_2 \approx (41/40)\mathrm{H}_{\mathrm{L},2} + \mathrm{H}_{\mathrm{S},2} \tag{4.27}$$
$$\mathrm{U} \approx (1{,}025 + m)\mathrm{H}_{\mathrm{L},2}$$

avec

$$m(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{H}_{\mathrm{S},2}(\mathrm{M})}{\mathrm{H}_{\mathrm{L},2}(\mathrm{M})} < 1 \tag{4.28}$$

Pour le calcul d'une hauteur de pleine mer, h_{pm} un jour déterminé, la marée est réduite à sa composante semi-diurne. Nous pouvons l'évaluer en considérant l'expression complexe η_2 de la hauteur donnée par (4.18), qui peut s'écrire en introduisant l'écart ϖ des ascensions droites (ou des angles horaires) :

$$\eta_2 = \mathrm{H}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{L},2} + \mathrm{A}_{\mathrm{L},2} e^{2j\varpi}\right) e^{2j(Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}} - \lambda_2)}$$

où $Æ\mathrm{H}_{\mathrm{L}}$ et ϖ sont pris à l'instant $(t - \mathrm{T}_2)$.

Le premier facteur du second membre est l'amplitude complexe X_2 de la marée semi-diurne qui peut s'écrire :

$$X_2 = A_{L,2} + A_{S,2}e^{2j\varpi} = P_2 e^{-2j\theta}$$

Le module P_2 de l'amplitude complexe X_2 est fonction du temps et égal à :

$$P_2(t - T_2) = \sqrt{A_{L,2}^2 + A_2^2 + 2A_{L,2}A_{S,2}\cos 2\varpi} \tag{4.29}$$

La phase θ à l'instant $(t - T_2)$ se déduit aisément par l'expression de la tangente :

$$\tan 2\theta = \frac{-\sin 2\varpi}{(A_{L,2}/A_{S,2}) + \cos 2\varpi}$$

Cette valeur de θ est très proche du paramètre p défini en 4.24 où le facteur de $(A_{L,2}/A_{S,2})$ est le coefficient $\overline{R} = 29/30$. Les deux valeurs seraient identiques si la variation de l'écart des angles horaires était négligée sur un laps de temps équivalent à l'âge T_2 de la marée. On peut s'en rendre compte par le fait qu'en première approximation, la première relation (4.21a) peut s'écrire :

$$R \approx 1 + \frac{1}{\omega_T}\frac{d\varpi}{dt}$$

où $\omega_T \approx 1$cpj. Cependant, l'heure de la pleine mer est t_{pm}, définie à partir de p_{pm}. Ainsi, en assimilant le module P_2, pris à l'instant $(t_{pm} - T_2)$ au demi-marnage, le coefficient de marée s'exprime à partir des relations (4.27) et (4.29) par :

$$C \approx 100\, P_2/U. \tag{4.30}$$

Les relations (4.18), (4.27), (4.28) et (4.29), définissant respectivement les amplitudes $A_{L,2}$ et $A_{S,2}$, l'unité de hauteur U, le rapport $m(M)$ et le module P_2, permettent d'écrire le coefficient de marée C sous la forme :

$$\frac{C}{100} = \frac{\sqrt{(i_L^3\cos^2\delta_L)^2 + m^2(i_S^3\cos^2\delta_S)^2 + 2m(i_L^3\cos^2\delta_L)(i_S^3\cos^2\delta_S)\cos 2\varpi}}{1{,}025 + m}$$

Dans cette dernière expression, tous les éléments astronomiques, (i_A, δ_A et ϖ) sont considérés à l'instant $t_{pm} - T_2$. Le coefficient C ainsi défini ne dépend que du rapport m et de l'âge T_2 de la marée semi-diurne. Si on pouvait admettre que le paramètre m soit constant (ce qui paraîtrait naturel, s'agissant du rapport de deux contributions de périodes voisines), le coefficient de marée serait parfaitement identique en tout point M, simplement décalé des écarts entre les âges de marée. En réalité, ce n'est pas exactement le cas. Cependant, la variation spatiale de m est suffisamment faible pour que

le coefficient de marée calculé en un point puisse être adopté en tout point peu éloigné, simplement décalé dans le temps pour tenir compte de la différence des âges T_2.

Bien que la prédiction, diffusée dans les annuaires des ports de France, ne soit plus basée sur la formule de Laplace, la notion du coefficient de marée est demeurée si populaire qu'elle lui a survécu.

4 • Conclusion

En résumé, disons que la formule de Laplace s'est révélée très satisfaisante pour la prédiction des pleines et basses mers dans les lieux où les espèces diurnes sont faibles ou négligeables par rapport aux semi-diurnes. C'est notamment le cas à Brest et sur la plupart des côtes européennes. Lorsque la composante diurne devient importante, la méthode de Laplace ne donne plus une précision suffisante pour la prédiction des extremums du niveau marin lié à la marée. De même, par faibles fonds (dans les estuaires notamment), les termes non linéaires des équations de l'hydrodynamique ne peuvent plus être négligés et les hypothèses de Laplace ne sont plus valables. Les effets non linéaires font apparaître des variations de niveau à des fréquences composées, tout particulièrement aux harmoniques des espèces semi-diurnes.

N'ayant pas une application universelle, la formule de Laplace a ainsi perdu de son intérêt et a été remplacée par la méthode basée sur l'analyse harmonique de la marée. En ce qui concerne le coefficient de marée, un mode de calcul adapté à la méthode harmonique sera proposé.

V

Formule harmonique de la marée

1 • Introduction

La formule harmonique de la marée découle directement des deux principes de base de la théorie dynamique énoncée par Laplace : principe des oscillations forcées et principe de la superposition des petits mouvements. Elle repose sur un développement de la fonction du potentiel générateur, en une somme de termes rigoureusement périodiques et de fréquences discrètes et bien définies, représentatives d'une somme de distributions de Dirac. Cette distribution de fréquences se traduit par un spectre dit de « raies » par opposition à un spectre « continu » (fonction continue de la fréquence). Laplace avait déjà eu l'idée d'exprimer les potentiels de chaque astre, en fonctions sinusoïdales avec des arguments variant linéairement avec le temps. Chaque terme du développement pouvait être interprété comme le potentiel d'un « astre fictif », animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan de l'équateur, générateur d'une onde de marée de même période mais avec une amplitude et une phase, toutes deux fonctions du lieu considéré et de la vitesse angulaire de cet astre fictif sur l'équateur céleste. En faisant l'hypothèse d'une réponse linéaire de l'océan à la période de révolution de l'astre pour les composantes diurnes d'une part et semi-diurnes d'autre part, c'est-à-dire dans des domaines suffisamment étroits en fréquences, Laplace a pu éviter le recours au développement harmonique complet. Ainsi, il a pu exprimer la somme des ondes constituant la marée sous la forme d'un développement fini, limité à un nombre restreint de termes. Il a également montré la manière d'effectuer le développement purement harmonique du

potentiel, prenant en compte également les principales perturbations de l'orbite lunaire. Il en a déduit l'expression correspondante de chaque onde, indépendamment de toute hypothèse sur l'amplitude et la phase. C'est ce travail de Laplace que Kelvin en 1867 puis Darwin en 1883 ont poursuivi sous le nom de développement harmonique du potentiel.

Cependant, la théorie de la Lune disponible à cette époque n'a pas permis pas à Darwin de proposer un développement complet du potentiel générateur. Les irrégularités induites par les mouvements des nœuds lunaires, considérées comme des perturbations, nécessitaient la prise en compte de facteurs correctifs, appelés facteurs nodaux.

Le développement du potentiel fourni par Doodson en 1921, mieux adapté au calcul automatique, est resté une référence pendant plus d'un demi-siècle, bien que calculé sur des constantes astronomiques de 1900. Il ne diffère pas sensiblement des développements proposés par de nombreux auteurs dans les années 1970 à partir de nouvelles constantes astronomiques et avec l'aide des ordinateurs.

2 • Le développement du potentiel de Darwin

Du fait du caractère de l'orbite lunaire très perturbée par l'action du Soleil, le développement du potentiel de marée proposé en 1883 par Darwin n'est pas strictement harmonique et se présente sous la forme suivante :

$$\mathrm{U}(t) = \sum_i f_i(t)\mathrm{A}_i \cos[\mathrm{V}_{i,0} + q_i t + u_i(t)] \tag{5.1}$$

avec :

t : temps civil du lieu,

i : numéro de la composante considérée,

A_i et q_i : amplitude et vitesse angulaire constantes de la composante i,

$\mathrm{V}_{i,0}$: argument correspondant à l'instant origine ($t = 0$),

$f_i(t)$ et $u_i(t)$: « facteurs nodaux » de la composante i.

Les facteurs nodaux sont des fonctions dépendant du temps (facteur d'amplitude $f_i(t)$ et le déphasage $u_i(t)$) à prendre en compte pour corriger les variations lentes de la composante i. Ces variations sont induites par l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'équateur (voir annexe A : « La Lune et ses mouvements caractéristiques »). Cette inclinaison, variant de 28°, 8 à 18°, 1, peut s'exprimer en fonction de la longitude écliptique du nœud ascendant

(période de 18,6 ans). C'est pour cette raison que ces termes sont appelés facteurs nodaux. Signalons aussi que l'amplitude d'une composante du potentiel est aussi appelée « coefficient ». Cette dénomination résulte du fait que c'est habituellement la valeur relative de l'amplitude qui constitue la donnée utile.

Bien que ce développement ne soit pas purement harmonique, il s'est révélé en réalité parfaitement adapté aux moyens de calculs disponibles avant l'avènement des ordinateurs. Darwin calcule les coefficients constants A_i avec une formule très simplifiée de l'orbite lunaire. Il évite ainsi le calcul d'un bien plus grand nombre de fonctions trigonométriques nécessaires à un développement complet. Les corrections introduites par ces facteurs nodaux sont faibles et lentement variables. Par ailleurs, elles sont disponibles sous formes de tables aisément utilisables avec les moyens de calcul de l'époque. Tout en conservant une précision acceptable, il est possible de considérer que la plupart des facteurs nodaux sont constants durant une année. Le recours à ces corrections systématiques, de valeurs constantes pour chaque composante i sur un tel laps de temps, est relativement aisé et cette méthode a été largement utilisée dans les applications courantes. Cette façon de procéder a probablement contribué à propager l'idée selon laquelle l'année est la durée de base des observations marégraphiques pour en effectuer l'analyse harmonique. Malgré les progrès des moyens de calcul, le développement du potentiel de la marée, établi par Darwin, est resté longtemps la référence, même après l'apparition du développement plus complet de Doodson en 1921. De nos jours, les moyens de calcul ne sont plus un obstacle à l'utilisation du développement du potentiel proposé par Doodson. Il n'en demeure pas moins que les travaux de Darwin ont marqué la marégraphie moderne. En effet, les principales composantes du potentiel, communes aux deux développements, sont désormais universellement désignées sous les appellations attribuées par Darwin. En outre, le recours aux facteurs nodaux reste encore très utile, en particulier pour les prédictions, car ils permettent, sans perte de précision sensible, de limiter la taille des fichiers de composantes harmoniques. Ainsi, la liste des composantes proposées par Darwin reste le plus souvent suffisante pour obtenir une prédiction de bonne qualité pour les besoins de la navigation. Les noms des principales composantes définies par Darwin sont fournis par les deux tableaux suivants (5.1a et 5.1b). Cependant, les coefficients sont ceux du développement de Doodson, peu différents de ceux qui ont été calculés par Darwin. En pratique, seule leur importance relative est à considérer. Il est notable que les ordres de grandeur des coefficients mettent en évidence une nette hiérarchie dans ces composantes.

Il convient d'apporter quelques commentaires sur certaines composantes

Tableau 5.1a — Les composantes du potentiel lunaire

Symbole	**Nom de la composante**	**Vitesse angulaire** degré/heure	**Période** jours ou heures	**Coefficient** $u \times 10^5$
	Terme constant	00,000 000 00		50 458
	Longues périodes		*Jours*	
M*m*	mensuelle	00,544 374 68	27,554 551 21	8 253
M*sf*	variationnelle	01,015 895 76	14,765 294 42	1 367
M*f*	bimensuelle	01,098 033 04	13,660 791 11	15 640
	Diurnes		*Heures*	
$2Q_1$	elliptique 2e ordre	12,854 286 23	28,006 222 48	952
Q_1	Elliptique majeure	13,398 660 92	26,868 356 63	7 206
ρ_1	évectionnelle	13,471 514 52	26,723 053 25	1 368
O_1	lunaire principale	13,943 035 60	25,819 341 66	37 689
M_1	Elliptique mineure	14,496 693 96	24,833 248 26	2 961
K_1	déclinationnelle	15,041 068 64	23,934 469 59	36 232
J_1	elliptique secondaire	15,585 443 32	23,098 476 73	2 959
OO_1	lunaire 2e ordre	16,139 101 68	22,306 074 22	1 615
	Semi-diurnes		*Heures*	
$2N_2$	elliptique 2e ordre	27,895 354 87	12,905 374 45	2 300
μ_2	variationnelle	27,968 208 48	12,871 757 60	2 777
N_2	elliptique majeure	28,439 729 56	12,658 348 21	17 391
NU_2	évectionnelle majeure	28,512 583 16	12,626 004 38	3 302
M_2	lunaire moyenne	28,984 104 24	12,420 601 20	90 812
λ_2	évectionnelle mineure	29,455 625 32	12,221 774 13	669
L_2	elliptique mineure	29,528 478 92	12,191 620 20	2 567
K_2	déclinationnelle	30,082 137 28	11,967 234 80	7 852
	Tiers-diurne		*Heures*	
M_3		43,476 156 36	8,280 400 80	1 188

particulières. Tout d'abord, les termes constants du potentiel n'interviennent évidemment pas dans la marée proprement dite. Les composantes LP (basses fréquences ou longues périodes) de la marée astronomique sont généralement très faibles car relevant de la théorie statique, et souvent masquées par

Tableau 5.1b — Les composantes du potentiel solaire.

Symbole	**Nom de la composante**	**Vitesse angulaire** degré/heure	**Période** jours ou heures	**Coefficient** $u \times 10^5$
	Terme constant	00,000 000 00		23 411
	Longues périodes		*Jours*	
S*a*	annuelle	00,041 068 64	365,242 189 66	$u < 10^{-5}$
S*sa*	semi-annuelle	00,082 137 28	182,621 094 83	7 245
	Diurnes		*Heures*	
P_1	solaire principale	14,958 931 36	24,065 890 22	16 817
S_1	radiationnelle	15,000 000 00	24,000 000 00	$u < 10^{-5}$
K_1	déclinationnelle	15,041 068 64	23,934 469 59	16 124
	Semi-Diurnes		*Heures*	
T_2	elliptique majeure	29,958 933 32	12,016 449 19	2 472
S_2	Solaire moyenne	30,000 000 00	12,000 000 00	42 286
R_2	elliptique mineure	30,041 066 68	11,983 595 78	437
K_2	déclinationnelle	30,082 137 28	11,967 234 80	3 643

un « bruit » d'origine météorologique (action du vent et de la pression atmosphérique sur le niveau marin). Elles ne sont que difficilement détectables dans les observations du niveau marin. Seules les composantes S*a* et S*sa*, qui traduisent davantage les variations saisonnières de la marée « radiationnelle » (liée à l'action thermique du rayonnement solaire sur l'atmosphère et l'océan) peuvent généralement être mises en évidence. Les coefficients du potentiel, relatifs aux ondes S*a* et S_1, sont inférieurs à 10^{-5}. Ces deux éléments ne devraient pas figurer dans le tableau car il en existe d'autres qui ont des coefficients plus importants et qui ne sont pas cités. Cependant, elles ont été introduites ici pour prendre en compte les variations observées du niveau marin, respectivement aux fréquences annuelles et diurnes de la marée radiationnelle. La mise en évidence d'ondes de marée perturbées par les composantes radiationnelles permet en général une meilleure interprétation de l'action respective des deux astres. Les composantes K_1 et K_2, dites « ondes sidérales » car leur période est égale respectivement au jour sidéral et au demi-jour sidéral, sont présentes à la fois dans le potentiel lunaire et le potentiel solaire. Pour toutes les études les concernant, les coefficients à prendre en compte sont la somme des coefficients issus des deux origines.

Les principales composantes sont K_1, O_1, P_1 et Q_1 pour les diurnes, et M_2, S_2, K_2 et N_2 pour les semi-diurnes. Elles contiennent à elles seules l'essentiel de l'énergie du signal de marée et sont parfois seules prises en compte pour des études de première approximation.

3 • Le développement de Doodson

Rappelons que Doodson a proposé en 1921 le développement du potentiel générateur de la marée à partir de la dernière théorie lunaire de Brown (1905) correspondant à une description du mouvement de la Lune selon les coordonnées écliptiques (voir annexe A). Dans ce modèle lunaire, Brown fournit les éléments de l'orbite (longitude et latitude moyennes) et de la parallaxe selon une série de fonctions trigonométriques dont les arguments sont des fonctions linéaires du temps moyen. En 1895, Newcomb avait fourni les mêmes éléments pour le Soleil apparent dans l'écliptique. Ces deux modèles d'orbites permettent une très bonne prédiction de la marée sur plusieurs siècles. Au chapitre III, il a été établi que le champ méridien du potentiel générateur U d'un astre A, de masse m_A et à la distance r_A du centre de la Terre (p.m. : r_A est la distance moyenne), varie essentiellement avec le cosinus de la distance zénithale géocentrique θ de l'astre au point M de la latitude L. Nous rappelons les expressions de la fonction $\cos\theta$ dans les différents référentiels célestes (voir annexe 1), les couples (α, δ) et (β, λ) étant respectivement les coordonnées urographiques et écliptiques de l'astre :

— dans les systèmes équatoriaux (A1.1) :

$$\cos\theta = \sin L \sin\delta + \cos L \cos\delta \cos Æ H,$$

où la fonction $\cos\theta$ est fonction linéaire de $\cos Æ H$;

— dans le système écliptique (A1.4):

$$\cos\theta = \sin L \cdot f(\beta, \lambda) + \cos L \cdot g(\beta, \lambda, Æ H)$$

avec :

$$f(\beta, \lambda) = \cos\epsilon \sin\beta + \sin\epsilon \cos\beta \sin\lambda$$

et

$$g(\beta, \lambda, Æ H) = \cos\beta \cos\lambda \cos(\alpha + Æ H) + (\cos\epsilon \cos\beta \sin\lambda - \sin\epsilon \sin\beta) \sin(\alpha + Æ H).$$

Dans ce système, la fonction $\cos\theta$ est fonction linéaire de $\cos Æ H$ et de $\sin Æ H$.

L'équivalence des relations (A1.01) et (A1.04) donne :

$$\sin\delta = f(\beta, \lambda)$$
$$\cos\delta\cos Æ\mathrm{H} = g(\beta, \lambda, Æ\mathrm{H})$$

Il est ainsi possible d'exprimer le potentiel générateur de chaque astre en une série harmonique à partir de ses coordonnées écliptiques et de son angle horaire, dont le développement harmonique est fourni par Brown.

3.1 • Le développement par « espèces »

En reprenant l'expression (3.24b) du potentiel en série de polynômes de Legendre, rapporté au potentiel constant $ga_{\mathrm{T}}\chi_{\mathrm{A}}$ pour l'astre A considéré, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{U}}{ga_{\mathrm{T}}\chi_{\mathrm{A}}} = \sum_{n=2}^{n\to\infty} i_{\mathrm{A}}^{n+1}\left(\frac{a_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{A},0}}\right)^{n-2}\mathrm{P}_n(cos\theta) \tag{5.2}$$

où le paramètre constant χ_{A} dépendant de l'astre A (L : Lune ; S : Soleil) est donné par :

$$\chi_{\mathrm{A}} = \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{T}}}\left(\frac{a_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{A},0}}\right)^3$$

avec

$$\chi_{\mathrm{L}}/\chi_{\mathrm{S}} \approx 2{,}2$$

et la parallaxe par $i_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{A},0}/r_{\mathrm{A}}$, qui reste voisine de l'unité.

Les maximums des valeurs absolues des polynômes de Legendre étant égaux à l'unité, les ordres de grandeur des termes de la série sont donnés par les valeurs de $(a_{\mathrm{T}}/r_{\mathrm{A},0})^{n-2}$ avec $n \geq 2$.

Pour le calcul du potentiel générateur en série harmonique, Doodson fixe la limite de son développement aux termes dont le rapport à l'élément le plus important est supérieur à 10^{-5}, les autres termes étant négligés.

En ce qui concerne la Lune, le rapport du rayon de la Terre à la distance moyenne de cet astre est voisin de 1/60, ce qui donne pour $n = 5$ des valeurs maximales de $(a_{\mathrm{T}}/r_{\mathrm{L},0})^{n-2} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ (indice L pour « Lune »). Ainsi pour cet astre, Doodson considère son développement aux trois premiers termes de la série, c'est-à-dire jusqu'au terme contenant $\mathrm{P}_4(\cos\theta)$. En étudiant la contribution de ce dernier terme, Doodson trouve que toutes les composantes sont inférieures à la limite qu'il s'est fixée, à l'exception de quelques-unes qui en sont très proches. Cette limite ayant un caractère arbitraire, nous ne prendrons en compte ici que les deux premiers termes de la série.

Pour le Soleil, nous avons $a_T/r_{S,0} \approx 4{,}26 \cdot 10^{-5}$, le développement du potentiel correspondant ne comprend donc que le terme en $P_2(\cos\theta)$, le terme en $P_3(\cos\theta)$ étant de l'ordre de $2 \cdot 10^{-9}$.

Par ailleurs, en négligeant le terme en $P_4(\cos\theta)$ et en ordonnant le développement du potentiel lunaire de Doodson en fonction des puissances m croissantes de $\cos\theta$, nous obtenons à partir de (5.2) une expression du type :

$$\frac{U_L}{g a_T \chi_L} = \sum_{m=0}^{m=3} u_{L,m} \cos^m \theta_L \tag{5.3}$$

Dans le système de coordonnées écliptiques, la fonction $\cos\theta$ est fonction linéaire du sinus et du cosinus de l'angle horaire Æ (voir les formules de l'annexe A, rappelées ci-dessus). Ces fonctions trigonométriques de Æ interviennent donc implicitement avec les mêmes puissances m que $\cos\theta$. La série (5.3) peut ainsi se développer en une somme de termes contenant chacun un « sinus » ou un « cosinus » d'un argument qui est fonction linéaire d'un multiple m de l'angle horaire Æ ; pour $m = 0$, les termes correspondants sont évidemment indépendants de Æ. Le regroupement de ces termes selon le coefficient m de l'angle horaire fait apparaître une séparation en domaines de fréquences, désignés « espèces » comme pour la formule de Laplace :

— pour $m = 0$, l'angle horaire n'intervient pas ; cette espèce est constituée par une somme de termes de longue période (LP) ou longues périodes ne dépendant que de la déclinaison δ_L et de la parallaxe ($i_L = r_{L,0}/r_L$) ;

— pour $m = 1$, l'ensemble des termes contenant Æ constitue l'espèce diurne ;

— pour $m = 2$, nous obtenons l'espèce semi-diurne avec 2Æ

— pour $m = 3$, la tiers diurne avec 3Æ.

La prise en compte du terme en $P_4(\cos\theta)$ de (5.2) aurait fait apparaître évidemment l'espèce quart diurne avec 4Æ.

Cet arrangement en espèces constitue la structure du développement harmonique de Doodson. En se limitant aux deux premiers termes de (5.2) pour la Lune, nous pouvons écrire :

$$U_L = g a_T \chi_L \sum_{n=2}^{n=3} i_L^{n+1} (a_T/r_{L,0})^{n-2} P_n(cos\theta) = \sum_{n=2}^{n=3} A_n \tag{5.4}$$

Le potentiel élémentaire A_n correspond au terme du développement de U_L contenant le polynôme $P_n(\cos\theta)$. En opérant le regroupement des termes par espèce m, le potentiel élémentaire peut s'écrire sous la forme :

$$A_n = i_L^{n+1} \sum_{m=0}^{m=4} c_{n,m} G_{n,m} H_{n,m} \tag{5.5}$$

où, pour chaque espèce m, nous avons :

— les termes $H_{n,m}$, contenant $m\text{Æ}H$, qui sont fonction du temps ; dans le système équatorial, ils sont constitués de fonctions linéaires en $\cos(m\text{Æ}H)$ avec des facteurs dépendant de la fonction trigonométrique de la déclinaison δ ; Doodson utilise la distance polaire, complément de la déclinaison que nous désignons ici par $\varpi = (\pi/2) - \delta$;

— les termes $G_{n,m}$, dénommés coefficients géodésiques, qui ne dépendent que de la latitude L du lieu ;

— les facteurs $c_{n,m}$ qui sont des constantes, sans dimension, que l'on pourrait qualifier de « normalisation ». Doodson ajuste ces facteurs en même temps que les coefficients géodésiques, de telle sorte que ceux-ci aient une valeur maximale (fonction de la latitude) égale au potentiel lunaire de référence choisi égal à :

$$C_L = 3ga_T\chi_L/4$$

Le tableau 5.2 fournit les contributions des termes et coefficients en fonction de l'espèce m et du degré n du polynôme de Legendre. Pour simplifier les écritures dans le tableau, les termes $H_{n,m}$ sont exprimés dans le système équatorial ; les relations de l'annexe A, rappelées plus haut (A1.1 et A1.4), permettent d'exprimer les termes $H_{n,m}$ en fonction des coordonnées écliptiques.

Tableau 5.2 — Développement de Doodson du potentiel lunaire.

n° espèce	n° $P_n(\cos\theta)$	« Norme »	Termes « géodésiques »	Termes variables
m	n	$c_{n,m}$	$G_{n,m}/C_L$	$H_{n,m}$
0	2	1	$0{,}5(1 - 3\sin^2 L)$	$(2 - 6\cos^2\varpi)/3$
0	3	0,004 947	$1{,}118\,03(3 - 5\sin^2 L)\sin L$	$(3 - 5\cos^2\varpi)\cos\varpi$
1	2	1	$\sin 2L$	$\sin 2\varpi\cos\text{Æ}H$
1	3	0,011 425	$0{,}726\,18(1 - 5\sin^2 L)\cos L$	$(1 - 5\cos^2\varpi)\sin\varpi\cos\text{Æ}H$
2	2	1	$\cos^2 L$	$\sin^2\varpi\cos 2\text{Æ}H$
2	3	0,031 935	$2{,}598\,08\sin L\cos^2 L$	$\sin^2\varpi\cos\varpi\cos 2\text{Æ}H$
3	3	0,013 828	$\cos^3 L$	$\sin^3\varpi\cos 3\text{Æ}H$

Rappelons que Doodson a poussé le développement jusqu'au polynôme de Legendre $P_4(\cos\theta)$ que nous avons négligé ici. Les coefficients $c_{n,m}$ fournissent les ordres de grandeur relatifs des différents termes du développement. Mais, en raison de la présence de la latitude dans l'expression des coefficients géodésiques, les termes correspondant à des « normes » $c_{n,m}$ du

même ordre ne sont pas directement comparables quant à leur influence sur la marée.

3.2 • Les variables fondamentales

Il n'existe pas de solution analytique au mouvement de trois corps dans un champ gravitationnel, mais ce mouvement (et donc tout phénomène qui en dépend exclusivement) peut être décrit à l'aide de cinq paramètres indépendants. La prise en compte de la marée (mouvement supplémentaire des particules d'eau par rapport à la Terre), réglée par les mouvements relatifs des trois astres (Terre, Lune et Soleil), exige l'ajout d'un sixième paramètre lié à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. L'orbite des astres étant elliptique, leur vitesse angulaire n'est pas uniforme au sens de la mécanique. Nous savons que la définition du temps moyen (voir A) repose sur le concept d'un « Soleil moyen » décrivant l'écliptique d'un mouvement uniforme (de point vernal à point vernal) dans le même laps de temps (l'année tropique) que le Soleil apparent. Il en est de même pour la « Lune moyenne » qui est définie comme un astre fictif dont la projection orthogonale sur l'écliptique est animée d'un mouvement uniforme ayant une période de révolution identique à celle de la Lune réelle. Les longitudes écliptiques de ces astres fictifs sont dites « longitudes moyennes » des astres. Bien que ces appellations soient impropres, car elles ne désignent évidemment pas les moyennes des longitudes, elles sont désormais consacrées par l'usage. De toute façon, il ne peut y avoir de confusion possible, car la moyenne d'une variable cyclique n'a aucun sens.

Dans la suite du texte et selon les conventions adoptées, les symboles s (de *Séléné*, pour Lune en grec) et h (pour *Hélios*) représente respectivement les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil. Les longitudes moyennes du périgée lunaire p, du nœud ascendant N et du périgée solaire p_1 se définissent selon le même principe: ce sont les angles, mesurés positivement dans le sens direct à partir du point vernal, des éléments moyens correspondants. Ces cinq paramètres indépendants sont suffisants pour décrire les mouvements relatifs des trois astres (Terre, Lune, Soleil). Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, il est nécessaire d'adjoindre pour le mouvement d'une particule sur le globe (quatrième élément mobile dans le repère écliptique) un sixième paramètre lié à la rotation Terrestre. Il paraît tout naturel de choisir l'heure locale de « temps moyen » qui décrit précisément le mouvement apparent du Soleil moyen. Cependant, la Lune étant le principal moteur de la marée, il est préférable d'utiliser le temps lunaire moyen qui, pour raison d'homogénéité, sera exprimé en degrés. Soit t le paramètre représentant l'heure en temps

civil ; pour mémoire, c'est le temps moyen local augmenté de 12 heures. La variable symbolisée par τ désignera l'angle horaire de la Lune moyenne, augmenté de 180° par analogie avec le temps civil ; nous pouvons la désigner par « temps civil lunaire ». Elle est donnée par la relation (figure 5.1) :

$$\tau^\circ = 15^{\circ/\mathrm{h}} \cdot t^{\mathrm{h}} + h^\circ - s^\circ \tag{5.6}$$

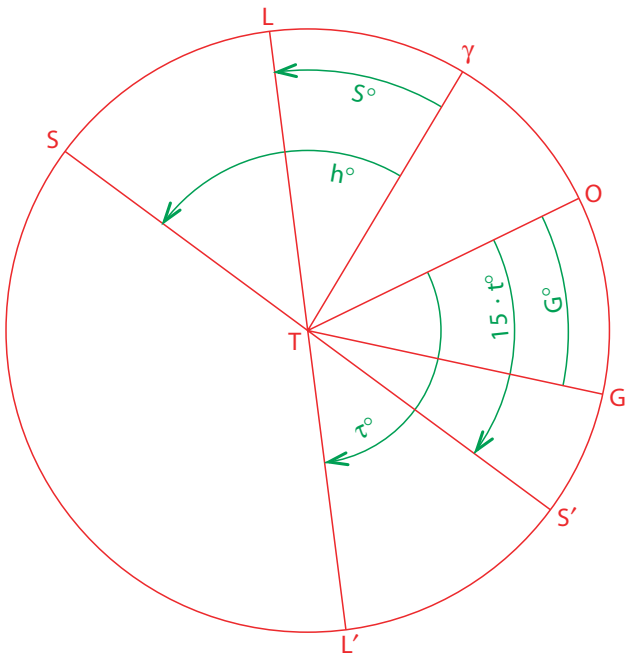


FIGURE 5.1 — Relation entre les angles horaires et les longitudes moyennes des astres. Le temps t, exprimé en heures, donne un angle horaire de $15 \cdot t^\circ$ ($= 15^{\circ/\mathrm{h}} \cdot t^{\mathrm{h}}$). L'angle horaire civil lunaire τ est ainsi donné par la relation $\tau = 15t + h - s$ (les angles sont en degrés).

Ces six paramètres (τ, s, h, p, N, p_1) sont des variables cycliques indépendantes en ce sens qu'aucune période commune n'existe pour deux quelconques d'entre elles. Toutes ces variables sont fonctions croissantes du temps, à l'exception de la longitude moyenne N du nœud ascendant. Dans un souci d'homogénéité avec les autres paramètres, elle est remplacée par sa valeur opposée $\mathrm{N}' = -\mathrm{N}$.

En désignant par T, le temps exprimé en siècles juliens de 36525 jours de temps moyen écoulé depuis le 1er janvier 2000 à midi du temps civil (local), le tableau 5.3 donne les relations fonctions de T, permettant de calculer sur plusieurs siècles, la valeur de chacune de ces variables fondamentales avec

Tableau 5.3 — Relations donnant les variables fondamentales en degrés d'arc en fonction du temps moyen T exprimé en siècles juliens ; l'origine des temps est le 01/01/2000 12:00:00 du temps civil *t* qui, lui, est exprimé en heures (1 h correspond à 15°).

Variables fondamentales (Longitude moyenne LM)	Valeur de la variable en degrés, fonction du temps T en siècles juliens	Période *j*, jours ; *a*, ans
Angle horaire « civil lunaire »	$\tau° = 15^{°/\mathrm{h}} t^{\mathrm{h}} + h° - s°$	1,035 050 *j*
LM de la Lune	$s° = 218{,}316\,5 + 481\,267{,}880\,4\mathrm{T} - 0{,}001\,6\mathrm{T}^2$	27,321 582 *j*
LM du Soleil	$h° = 280{,}466\,1 + 36\,000{,}769\,8\mathrm{T} + 0{,}000\,3\mathrm{T}^2$	365,242 199 *j*
LM du périgée lunaire	$p° = 83{,}353\,5 + 4\,069{,}021\,5\mathrm{T} - 0{,}103\mathrm{T}^2$	8,847 309 *a*
Opposée de la LM du nœud ascendant lunaire	$\mathrm{N}' = -\mathrm{N}° = 234{,}555 + 1\,934{,}136\,3\mathrm{T} + 0{,}0021\mathrm{T}^2$	18,612 904 *a*
LM du périgée solaire	$p°_1 = 282{,}938\,4 + 1{,}719\,5\mathrm{T} + 0{,}000\,5\mathrm{T}^2$	20 940,21 *a*

une précision meilleure que le centième de degré. Cette précision recherchée par les astronomes est amplement suffisante pour obtenir une prédiction de marée d'excellente qualité sur plusieurs siècles.

4 • La classification de Doodson

Rappelons que les amplitudes du potentiel lunaire issues de $P_4(\cos\theta)$ sont toutes inférieures à 10^{-5} fois l'amplitude majeure de ce potentiel (onde M_2) à l'exception de quelques-unes très proches de cette limite inférieure fixée arbitrairement par Doodson. Nous négligeons ces dernières et le développement considéré ici est arrêté au terme en $P_3(\cos\theta)$.

Présenter tous les termes du développement dans un même tableau est une commodité utilisée par Doodson. Le classement proposé repose sur l'expression de l'argument (de chaque composante du potentiel) par une fonction linéaire des six variables fondamentales ordonnées selon les vitesses angulaires décroissantes (tableau 5.4). Dans ce tableau, apparaissent aussi les arguments exprimés selon les deux codages (numérique ou alphabétique). Le codage numérique, proposé par Doodson est exposé plus loin dans le texte (avec le codage littéral correspondant).

TABLEAU 5.4 — Classement des variables fondamentales et ratio des ordres de grandeur rapporté à la vitesse angulaire lunaire moyenne.

N° d'ordre	Symbole	Vitesse angulaire Degré/heure	Ratio des vitesses angulaires	Argument numérique	Argument alphabétique
1	τ	14,492 052 121	$1{,}00 \cdot 10^{0}$	1 5 5 5 5 5	A Z Z Z Z Z
2	s	0,549 016 518	$3{,}79 \cdot 10^{-2}$	0 6 5 5 5 5	Z A Z Z Z Z
3	h	0,041 068 640	$2{,}83 \cdot 10^{-3}$	0 5 6 5 5 5	Z Z A Z Z Z
4	p	0,004 641 822	$3{,}20 \cdot 10^{-4}$	0 5 5 6 5 5	Z Z Z A Z Z
5	N'	0,002 206 407	$1{,}52 \cdot 10^{-4}$	0 5 5 5 6 5	Z Z Z Z A Z
6	p_1	0,000 001 962	$1{,}35 \cdot 10^{-7}$	0 5 5 5 5 6	Z Z Z Z Z A

En tenant compte de l'expression (5.5) des potentiels élémentaires A_n et de la formulation des arguments à partir des variables fondamentales, le développement de Doodson (5.4) peut se traduire par la formule (5.7) encadrée ci-après, les valeurs de m_τ définissant le numéro de l'espèce :

Formule harmonique de Doodson

$$U = \sum_{n=2}^{n=3} \sum_{m_\tau=0}^{m_\tau=3} G_{n,m_\tau}(L) \times \sum_{\forall m_x=-5}^{\forall m_x=+6} A_{\tau,x,\pi/2} \cos\Big[m_\tau \tau + m_s s + m_h h + m_p p + m_{N'} N' + m_{p_1} p_1 + m_{\pi/2} \frac{\pi}{2} \Big] \quad (5.7)$$

où

— les coefficients m_x des 5 variables fondamentales ($x = s, h, p, N'$ où p_1) sont des entiers variant entre -5 et $+6$;

— $A_{\tau,x,\pi/2}$ est une simplification de $A_{m_\tau m_s m_h m_p m_{N'} m_{p_1} m_{\pi/2}}$

La sommation de -5 à $+6$ des coefficients m_x résulte du développement en série harmonique des paramètres de l'orbite lunaire fournis par Brown. En réalité, les composantes ayant une valeur supérieure à la limite fixée par Doodson correspondent aux coefficients entiers m_x compris entre -5 et $+6$. Pour l'espèce m_τ, les coefficients géodésiques $G_{2,m_\tau}(L)$ sont issus du terme en $P_2(\cos\theta)$, et les coefficients géodésiques $G_{3,m_\tau}(L)$ sont issus du terme en $P_3(\cos\theta)$. En raison de la présence de sinus et cosinus contenant τ dans $H_{n,m}$, l'angle $\pi/2$ apparaît dans la formule (5.7) avec un coefficient entier $m_{\pi/2}$ de façon à n'obtenir que des cosinus dans le développement. Ce coefficient est pair pour les coefficients géodésiques associés à des cosinus ($G_{2,0}, G_{2,2}, G_{3,1}, G_{3,3}$), et impair pour les coefficients géodésiques associés à des sinus ($G_{2,1}, G_{3,0}, G_{3,2}$).

Le classement proposé par Doodson représente une avancée extrêmement commode dans la présentation des termes du potentiel dans un même tableau. Cependant rappelons que la force génératrice de la marée s'exerce de manière diffuse dans les océans et que les coefficients géodésiques traduisent l'effet de la latitude sur l'action de cette force. Il en résulte que, lorsque ces coefficients émanent de polynômes de Legendre différents, leur origine est distincte ; ce qui signifie qu'il est hasardeux de comparer leurs amplitudes $A_{\tau,x,\pi/2}$ respectives. Cette remarque s'applique notamment aux éléments du développement harmonique qui sont rattachés aux coefficients géodésiques du terme en $P_3(\cos\theta)$ du potentiel lunaire : a priori, ils ne sont pas comparables à ceux qui sont liés aux coefficients $G_{2,m_\tau}(L)$. Certaines des

composantes de ces deux origines ont d'ailleurs des fréquences identiques, ce qui risque d'ajouter à la confusion. Pour plus de clarté, il est préférable de les distinguer dans les listages. En raison de l'éloignement du Soleil, nous avons vu que les termes de son potentiel générateur, issus de $P_3(\cos\theta)$, sont parfaitement négligeables. Le problème, qui vient d'être évoqué pour la Lune, ne se présente donc pas pour le Soleil. L'action gravitationnelle du Soleil n'est pas de nature différente de l'action gravitationnelle de la Lune, ce qui permet au premier abord d'ajouter leurs effets. Cependant il apparaît une action complémentaire significative, liée à l'effet du rayonnement solaire sur le niveau marin, qui crée une difficulté d'interprétation. Cette action, qui peut être directe (dilation de l'eau) ou indirecte (effets météorologiques), se traduit par des cycles diurnes, saisonniers et annuels. Il en résulte des variations de niveau qui constituent la marée « radiationnelle » et qui se superposent aux variations diurnes ou saisonnières de la marée gravitationnelle. Par cette action radiationnelle, les composantes d'origine solaire ont un comportement différent de celui des composantes d'origine lunaire. Bien que cet effet soit faible, il est néanmoins suffisant pour modifier sensiblement les composantes gravitationnelles solaires. Comme leurs fréquences respectives sont identiques, il n'est pas possible de distinguer la part qui revient à chacune de ces actions. Il a été parfois proposé d'introduire un potentiel « radiationnel », calculé à partir du rayonnement solaire reçu à la surface de la Terre, mais la complexité de la réponse de l'océan à cette action ne permet pas réellement de tirer profit de ces développements. Afin de mettre en évidence les composantes éventuellement perturbées par les fréquences radiationnelles, et de permettre ainsi une meilleure interprétation des différences entre les actions respectives de chaque astre, il est préférable de lister séparément les composantes solaires en ne conservant que les coefficients du potentiel gravitationnel. Seuls ces coefficients sont directement comparables aux coefficients du potentiel lunaire.

5 • Nombres de Doodson, nombres et lettres arguments

Pour les composantes ayant une valeur non négligeable (selon le critère en 10^{-5} de Doodson), nous avons déjà signalé que les coefficients entiers m_x des cinq paramètres astronomiques ($x = s, h, p, \mathrm{N}', p_1$), intervenant dans l'argument des cosinus du développement harmonique, sont compris entre -5 et $+6$. Afin de permettre une représentation concise de cette suite de chiffres, par élimination des signes négatifs, il est commode d'ajouter la valeur 5 à chacun d'entre eux. En outre, afin d'éviter de caractériser chacun

des coefficients les plus élevés (5 et 6) par un nombre à deux chiffres, l'usage est de remplacer le nombre 10 par son homologue romain X et le nombre 11 par E, pour *eleven* en anglais. Pour les fréquences de marée d'interaction, il est même proposé d'ajouter pour les coefficients -1 et $+12$, respectivement une étoile « $*$ » et la lettre T (*twelve*). Le facteur m_τ de l'angle horaire civil de la Lune τ, qui représente le numéro de l'espèce (donc toujours positif ou nul), reste quant à lui inchangé. La suite des chiffres ou lettres ainsi définie, comprenant dans l'ordre le coefficient m_τ (inchangé) en premier et ensuite les chiffres ou lettres, résultant de la codification des coefficients m_x, classés dans l'ordre décroissant des vitesses angulaires des cinq paramètres astronomiques LP ($x = s, h, p, \mathrm{N}', p_1$). En d'autres termes, nous appellerons « nombre de Doodson » ou « nombre-argument », le nombre entier (ou l'expression alphanumérique) désigné par le symbole $\mathrm{N_D}$ tel que :

$\mathrm{N_D} = 10(10(10(10(10(m_\tau) + m_s + 5) + m_h + 5) + m_p + 5) + n_{\mathrm{N}'} + 5) + m_{p_1} + 5$

$\mathrm{N_D}$ est un nombre entier pour tout $-5 \leq m_x \leq 4$;

$\mathrm{N_D}$ est une expression alphanumérique pour :

$$\begin{aligned} m_x = -6 \quad &: \quad m_x + 5 \Rightarrow * \\ m_x = 5 \quad &: \quad m_x + 5 \Rightarrow \mathrm{X} \\ m_x = 6 \quad &: \quad m_x + 5 \Rightarrow \mathrm{E} \\ m_x = 7 \quad &: \quad m_x + 5 \Rightarrow \mathrm{T} \end{aligned}$$

avec $x = s, h, p, \mathrm{N}$ ou p_1

Ainsi, à titre d'exemple, considérons l'argument astronomique de la composante solaire moyenne semi-diurne, désignée $\mathrm{S_2}$ par Darwin, dont la période est exactement égale à 12 heures. Compte tenu de la relation (5.6), l'expression en degrés de cet argument s'écrit :

$$\mathrm{V_{S_2}} = 30^{\circ/\mathrm{h}} t^{\mathrm{h}} = 2\tau + 2s - 2h$$

Il en résulte le tableau suivant pour les coefficients m_x des six variables fondamentales, n_D étant le chiffre de Doodson correspondant à chaque coefficient :

Coefficient m_x	m_τ	m_s	m_h	m_p	$m_{\mathrm{N}'}$	m_{p_1}
Valeur pour $\mathrm{S_2}$	2	2	-2	0	0	0
Chiffre ajouté	0	5	5	5	5	5
n_D	2	7	3	5	5	5

d'où l'on déduit le nombre de Doodson représentant la composante $\mathrm{S_2}$:

$$\mathrm{N_D}(\mathrm{S_2}) = 273555$$

Pour l'argument astronomique de la composante lunaire moyenne semi-diurne, désignée par M_2, nous avons :

$$V_{M_2} = 2\tau$$

d'où le tableau des coefficients :

Coefficient	m_τ	m_s	m_h	m_p	m_N	m_{p_1}
Valeur pour M_2	2	0	0	0	0	0
Chiffre ajouté	0	5	5	5	5	5
n_D	2	5	5	5	5	5

Pour cette onde, il en résulte le nombre-argument :

$$N_D(M_2) = 255555$$

Ce procédé, mis au point par Doodson, est actuellement encore très répandu. L'un de ses avantages réside dans le fait que la classification des nombres arguments en ordre croissant entraîne automatiquement la classification par ordre croissant des vitesses angulaires des composantes correspondantes. Un amendement souvent adopté consiste à compléter le nombre de Doodson par un septième chiffre $n_{D,\pi/2}$ associé au coefficient $m_{\pi/2}$ dans la relation (5.7). Ce septième chiffre permet de tenir compte du fait qu'il s'agit de l'argument d'un cosinus dont le coefficient $m_{\pi/2}$ peut être positif ou négatif. Nous avons vu que ce coefficient $m_{\pi/2}$ représente le facteur qu'il faut affecter à l'angle $\pi/2$ pour que l'argument de la composante considérée devienne l'argument d'un cosinus à coefficient positif. Dans un souci d'homogénéité, le nombre 5 est ajouté à $m_{\pi/2}$ pour former ce qu'il convient d'appeler le « nombre de Doodson étendu » que nous symbolisons par $N_E(i_i)$ pour la composante i_i.

Ainsi, nous avons pour un argument ϕ, en posant $n_{D,\pi/2} = m_{\pi/2} + 5$

— pour le coefficient positif d'un sinus :

$$\sin\phi = \cos[\phi - 1(\pi/2)] \Rightarrow m_{\pi/2} = -1 \Rightarrow n_{D,\pi/2} = 4$$

— pour le coefficient positif d'un cosinus :

$$\cos\phi = \cos[\phi + 0(\pi/2)] \Rightarrow m_{\pi/2} = 0 \Rightarrow n_{D,\pi/2} = 5$$

— pour le coefficient négatif d'un cosinus :

$$-\sin\phi = \cos[\phi + 1(\pi/2)] \Rightarrow m_{\pi/2} = 1 \Rightarrow n_{D,\pi/2} = 6$$

— pour le coefficient négatif d'un sinus :

$$-\cos\phi = \cos[\phi + 2(\pi/2)] \Rightarrow m_{\pi/2} = 2 \Rightarrow n_{D,\pi/2} = 7$$

Une autre variante, également très utilisée, consiste à remplacer les chiffres du « nombre-argument » par une codification entièrement littérale. En ce qui concerne le potentiel générateur de la marée, son développement harmonique se prête très bien à la représentation de Doodson du fait que la grande majorité des composantes ont une codification essentiellement numérique. Par contre la représentation harmonique de la réponse de l'océan est plus complexe que celle du potentiel. En effet, plus particulièrement dans les zones peu profondes, les interactions hydrodynamiques ne sont pas linéaires et il apparaît dans les enregistrements du niveau marin de nouvelles fréquences (voir chapitre premier). Certaines de ces ondes composées nécessitent, pour les coefficients des variables principales, des valeurs qui soient extérieures aux bornes de l'intervalle $[-5, +6]$ pris en compte pour le potentiel. La solution actuellement retenue consiste à remplacer les caractères alphanumériques de Doodson par des lettres. Le tableau ci-dessous fournit la correspondance entre la valeur du coefficient $m_\forall$ de chaque paramètre (τ et $\pi/2$ inclus), la codification de Doodson n_D des coefficients m_x et $m_{\pi/2}$ (les coefficients m_τ restant inchangés), et Λ la codification littérale de tous les $m_\forall$ (sans aucune restriction) :

$m_\forall$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_\mathrm{D}(m_\forall \neq m_\tau)$		$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	E	T			
$\Lambda(m_\forall)$	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Les traditions ont évidemment une certaine importance et ne doivent pas être négligées, mais la codification littérale est tout aussi aisée que celle de Doodson. Ne souffrant d'aucune restriction, son emploi devrait pouvoir se généraliser (noter l'analogie du principe avec celui des fuseaux horaires). Ainsi, pour reprendre les exemples des composantes M_2 et S_2 mentionnées plus haut, elles ont leurs arguments astronomiques associés à des cosinus dont les coefficients dans le développement du potentiel sont positifs ($m_{\pi/2} = 0 \Rightarrow n_7 = 5$). En rappelant que $\mathrm{N_E}(q_i)$ désigne le « nombre de Doodson étendu » pour la composante q_i, soit $\mathrm{N}_\Lambda(q_i)$ son équivalent littéral. Il vient ainsi :

— pour la composante S_2

$$\mathrm{N_E}(\mathrm{S}_2) = 2735555$$
$$\mathrm{N}_\Lambda(\mathrm{S}_2) = \mathrm{B\,BXZ\,ZZZ}$$

— pour la composante M_2

$$\mathrm{N_E}(\mathrm{M}_2) = 2555555$$
$$\mathrm{N}_\Lambda(\mathrm{M}_2) = \mathrm{B\,ZZZ\,ZZZ}$$

Rappelons que les ondes ayant même m_τ constituent une « espèce ». Celles qui ont les mêmes coefficients respectifs m_τ et m_s forment un « groupe ». Au sein d'un groupe, les composantes ayant les mêmes m_p, $m_{N'}$ et m_{p_1} déterminent un « sous-groupe ».

6 • Formule harmonique de la marée

Nous avons examiné jusqu'ici les développements proposés pour le potentiel générateur de la marée successivement par Laplace, Kelvin, Darwin et Doodson. Le développement harmonique a fait apparaître le problème du listage des composantes dont le nombre n'a fait que croître : une vingtaine pour Kelvin, de l'ordre de 40 et plus de 200 respectivement pour Darwin et Doodson. Doodson a proposé ensuite une codification des composantes qui convient très bien au potentiel générateur ; cette représentation classe les composantes selon les nombres-arguments croissant avec la fréquence de la composante. Mais l'analyse des mesures du niveau marin a fait apparaître d'une part des espèces m_τ qui n'existent pas dans le développement du potentiel, et d'autre part des coefficients m_x qui sortent des limites fixées par Doodson. Le listage de ces ondes, créées par les interactions non linéaires de l'hydrodynamique, a justifié la codification littérale s'appuyant sur la représentation d'une onde déterminée par sept lettres de l'alphabet. Par ailleurs, deux procédés ont été utilisés pour effectuer le développement harmonique du potentiel générateur. Le premier, utilisé par Darwin et Doodson consiste à résoudre le problème analytiquement à partir des théories disponibles de la Lune et du Soleil. Le second, difficilement applicable sans le concours des moyens de calcul moderne, consiste en l'analyse harmonique du potentiel sur une longue période. Plusieurs développements ont été proposés après celui de Doodson, particulièrement par la communauté scientifique s'intéressant aux marées Terrestres mais ils n'ont guère apporté de progrès sensible pour les besoins de l'analyse des marées océaniques. Le développement proposé dans les tableaux présentés dans l'annexe D provient de l'analyse des potentiels lunaire et solaire portant sur 8 périodes de révolution du nœud ascendant de la Lune, soit approximativement 150 ans. Les résultats sont similaires (jusqu'à la cinquième décimale) à ceux qui sont publiés par ailleurs. Ils ont été utilisés pour calculer des séries temporelles, d'une part purement semi-diurne, d'autre part purement diurne, afin de pouvoir les combiner et simuler les interactions non linéaires responsables des ondes de petits fonds. Ces interactions ont été calculées jusqu'au cinquième ordre pour les composantes semi-diurnes, afin d'atteindre les composantes de

l'espèce douzième - diurne. Près de 600 fréquences ont été ainsi déterminées (voir annexe D).

6.1 • Réponse de l'océan : ondes composées

Lorsque des zones à faibles profondeurs sont traversées par l'onde hydrodynamique engendrée dans les océans par la force génératrice de la marée, la propagation de cette onde est influencée par la profondeur du lieu. Tout particulièrement près des régions côtières ayant des fonds à faible pente, la progression de la pleine mer est généralement plus rapide que le retrait de la basse mer sous l'effet conjugué, d'une part des forces de frottements dont l'action est plus sensible par faibles hauteurs d'eau, et de la célérité de l'onde de gravité qui est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur. Ainsi une onde, qui aurait une fréquence d'une des composantes du potentiel de marée et qui serait purement sinusoïdale au large au-dessus de grands fonds, serait déformée et perdrait ce caractère sinusoïdal au fur et à mesure de sa progression par profondeurs de plus en plus faibles (comme dans les estuaires : figure 1.8). Par ailleurs, son amplitude irait en augmentant jusqu'au point où elle ne serait plus négligeable devant la profondeur à l'approche de la côte. Cette onde ne peut en aucun cas subir une modification de sa période initiale. Cependant le caractère sinusoïdal de sa forme ayant disparu, la modification de son profil va se traduire dans le domaine spectral par l'apparition d'harmoniques supérieurs de la fréquence fondamentale de départ. En réalité, l'onde de marée n'est pas purement sinusoïdale et la schématisation faite ci-dessus du processus de déformation n'est pas parfaitement correcte. Cependant cette approche permet une démarche plus acceptable. En effet, faisons l'hypothèse que, d'une part, l'onde originelle possède une amplitude et une phase variant périodiquement et que, d'autre part, les coefficients du développement harmonique original peuvent eux-mêmes faire l'objet d'un développement selon les harmoniques supérieurs de cette fréquence de modulation. Sans qu'il soit nécessaire d'effectuer les développements correspondants, nous voyons apparaître des composantes dont les fréquences sont des combinaisons de la fréquence fondamentale et de la fréquence de modulation.

D'autres approches sont possibles, notamment celles qui font appel aux mathématiques pures ou à la méthode des perturbations. Cette dernière s'appuie sur la forme des équations de l'hydrodynamique, qui gouvernent la propagation de la marée dans les océans. On opère une séparation très nette entre les termes linéaires et les non linéaires, ces derniers étant considérés comme de petites perturbations. La solution de la partie linéaire, dans

laquelle seules les fréquences du potentiel générateur apparaissent, est introduite explicitement dans les termes non linéaires. Ceux-ci engendrent alors des composantes périodiques dont les fréquences sont des combinaisons des fréquences présentes dans le potentiel.

La propagation de l'onde de marée, fonction de la hauteur d'eau, s'accompagne donc d'une déformation spatio-temporelle qui se manifeste dans le domaine spectral par l'apparition de composantes, dites « composantes de petits fonds » ou « ondes d'interaction » dont les fréquences sont des combinaisons de celles présentes dans le potentiel générateur de la marée. Certaines d'entre elles sont des harmoniques des principales composantes du potentiel. Ainsi, les composantes semi-diurnes M_2 et S_2 donnent naissance aux harmoniques supérieurs (quart-diurnes, sixième-diurnes, etc.) désignées par les symboles M_4, M_6, …, et S_4, S_6, …, où l'indice correspond au nombre d'oscillations par jour lunaire (ondes M) ou solaire (ondes S). Cependant les ondes de petits fonds les plus nombreuses résultent des interactions entre les composantes du potentiel, et principalement entre les plus importantes qui sont (voir les tableaux 5.1a et 5.1b) : M_2, S_2, N_2, K_2, K_1, O_1, P_1 et Q_1. Le symbolisme adopté pour désigner chaque onde d'interaction consiste à utiliser les lettres des composantes principales dont elles sont issues et un indice représentant l'espèce à laquelle cette onde appartient, c'est-à-dire le nombre de cycles par jour. Par exemple, la composante ayant une vitesse angulaire égale à la somme de celles de M_2 et S_2 représente l'onde quart-diurne symbolisée par MS_4. Les exemples donnés ci-après devraient permettre de se familiariser avec ces notations. En désignant par q_i la vitesse angulaire d'une composante i, nous avons par exemple :

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{KQ}_1} &= q_{\mathrm{K}_2} - q_{\mathrm{Q}_1} \\
q_{2\mathrm{MS}_2} &= 2q_{\mathrm{M}_2} - q_{\mathrm{S}_2} \\
q_{\mathrm{MK}_3} &= q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{K}_1} \\
q_{2\mathrm{MK}_3} &= 2q_{\mathrm{M}_2} - q_{\mathrm{K}_1} \\
q_{\mathrm{MS}_4} &= q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{S}_2} \\
q_{2\mathrm{MKS}_4} &= 2q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{K}_2} - q_{\mathrm{S}_2} \\
q_{4\mathrm{MK}_5} &= 4q_{\mathrm{M}_1} + q_{\mathrm{K}_1} \\
q_{2\mathrm{MK}_5} &= 2q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{K}_1} \\
q_{2\mathrm{MS}_6} &= 2q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{S}_2} \\
q_{2(\mathrm{MS})\mathrm{K}_6} &= 2(q_{\mathrm{M}_2} + q_{\mathrm{S}_2}) - q_{\mathrm{K}_2}
\end{aligned}
$$

Les lettres représentatives des composantes du potentiel intervenant avec des vitesses angulaires négatives sont placées en dernière position. Certaines

ondes d'interaction ont les mêmes vitesses angulaires que celles des composantes du potentiel lui-même. C'est le cas par exemple de l'onde $2MS_2$ confondue avec la composante variationnelle μ_2 du potentiel, ou de $2MN_2$ confondue avec l'elliptique mineure L_2.

Dès qu'elles sont engendrées, ces composantes d'interaction se propagent de manière autonome, éventuellement au-delà de leur zone d'origine : des ondes quart diurnes ont été mises en évidence en plein océan Atlantique. En outre, elles sont éventuellement amplifiées ou au contraire atténuées selon les conditions de propagation. Elles peuvent aussi interagir entre elles pour engendrer des interactions de degré supérieur.

Bien que la modélisation numérique permette de les simuler assez fidèlement, l'extrême complexité de leurs interactions et de leur propagation, étroitement dépendante de la bathymétrie (généralement très chaotique), interdit de fournir des éléments permettant de dégager des règles, même approximatives, sur leur comportement. Tout au plus peut-on affirmer, lorsque l'amplitude de la marée est significative, que la probabilité est grande pour que ces ondes d'interaction soient relativement importantes en zones peu profondes. Cependant les estuaires, qui présentent une géométrie relativement simple, ont fait l'objet d'études permettant d'interpréter la déformation très caractéristique de la courbe de marée lors de sa progression vers l'amont. Les mesures simultanées des hauteurs d'eau en plusieurs points le long des estuaires ont ainsi permis d'analyser le comportement de l'onde de marée d'interaction et de modéliser le processus de formation. Les courbes (figure 1.8), obtenues pour la Gironde (France), montrent très clairement la déformation de la forme de l'onde entre le Verdon (embouchure de l'estuaire) et Bordeaux ($\approx$100 km en amont) aussi bien pour le montant que pour le perdant. La durée du montant, qui est de 7 heures environ sur le site du Verdon, diminue progressivement en allant vers l'amont ; elle n'est plus que de l'ordre de 4h 30min à Bordeaux. Inversement, le perdant a une durée plus longue en amont ($\approx$ 8 heures et demie à Bordeaux) qu'à l'embouchure ($\approx$ 6 heures). La vitesse de propagation de la pleine mer est ainsi plus rapide ($\approx$40 km/h) que celle de la basse mer ($\approx$25 km/h). L'allure approximativement sinusoïdale de l'onde à l'embouchure se transforme jusqu'à l'apparition de points de rebroussement dans les courbes obtenus très en amont. Cette caractéristique, très marquée au voisinage de la basse mer, dénote une discontinuité dans l'évolution de la variation de la hauteur d'eau. Des enregistrements marégraphiques, qui seraient effectués encore plus en amont, révéleraient même en vive-eau des discontinuités encore plus accentuées. Avec de très fortes discontinuités, on obtient les caractéristiques du phénomène de mascaret, vague déferlante au voisinage de la basse mer remontant

l'estuaire. Dans le domaine spectral, le mascaret et même le point anguleux de la courbe de marée ne peuvent se traduire que par une suite de raies spectrales s'étendant jusqu'à des fréquences infinies, inaccessibles à l'analyse. Sans atteindre ces cas extrêmes, l'analyse des marées d'estuaires révèle généralement des raies spectrales au-delà du douzième diurne. Une analyse fine des fréquences élevées montre en outre une prolifération d'ondes d'interaction croissant avec le degré de l'espèce. Toutes ces spécificités rendent de plus en plus difficile le traitement de ce type de marée par la méthode harmonique. En effet, celle-ci repose sur l'identification de l'origine des tous les constituants intervenant dans la composition de la raie spectrale représentative de l'onde d'interaction. L'expérience montre que ce travail devient laborieux pour les espèces supérieures à celle du douzième diurne. A cette difficulté s'ajoute le fait que le débit des cours d'eau, qui se déversent précisément dans les estuaires, interagit avec la marée elle-même : à deux débits différents correspondent deux signatures spectrales différentes de la courbe de marée. On atteint ici les limites d'application de la méthode harmonique.

6.2 • Formule harmonique de la marée

La hauteur de la mer en un lieu déterminé ne dépendant que du temps, il convient avant d'établir la formule harmonique de la marée de préciser la référence concernant la référence temporelle choisie. Tout d'abord, c'est par commodité que l'unité de temps utilisée dans la formule harmonique de la marée est l'heure de « temps moyen », de préférence à l'unité légale, la seconde. Pour effectuer les enregistrements ou les prédictions, plusieurs possibilités sont offertes en matière de référence temporelle. Nous pouvons adopter l'une des références suivantes, exprimées en heures :

— soit t_0, temps universel (TU) qui est le temps civil du méridien origine (méridien de Greenwich) ;

— soit t_n, temps du fuseau horaire n au lieu M (pour mémoire : n variant de 0h à 23h vers l'Est en partant de Greenwich, 1h correspondant à 15°).

— soit t, temps civil du lieu M sur le méridien de longitude G (mesurée en degrés positivement vers l'Est à partir du méridien origine) ;

Ces références temporelles sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} t_0 &= t_n - n = t - (\mathrm{G}/15) \\ t_n &= t_0 + n = t + n - (\mathrm{G}/15) \\ t &= t_0 + (\mathrm{G}/15) = t_n + (\mathrm{G}/15) - n \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pour l'étude du potentiel, nous avons utilisé le temps civil local symbolisé ci-dessus par t. La réponse de l'océan à l'excitation de la force génératrice

de la marée en un lieu déterminé se traduit par une variation temporelle du niveau marin $h(t)$ qui peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos[\mathrm{V}_i(t) - \kappa_i]$$

où h_i est l'amplitude d'argument V_i (fonction de t), qui peut être un argument astronomique ou celui d'une composante d'interaction (combinaison d'arguments astronomiques) :

$$\mathrm{V}_i = m_{\tau,i}\tau + m_{s,i}s + m_{h,i}h + m_{p,i}p + m_{\mathrm{N},i}\mathrm{N} + m_{p_1,i}p_1 + m_{\pi/2,i}\frac{\pi}{2}$$

avec $\tau = 15t + h - s$, le déphasage κ_i est appelé la situation de l'argument $\mathrm{V}_i(t)$.

Nous avons vu que les variables fondamentales (s, h, p, N' et p_1) sont des fonctions linéaires du temps, ce qui permet de définir pour chaque composante i une vitesse angulaire constante q_i, généralement exprimée en degrés par heure. Nous pouvons alors écrire :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos(\mathrm{V}_{i,0} + q_i t - \kappa_i)$$

où $\mathrm{V}_{i,0}$ est, comme dans la relation (5.1), l'argument astronomique à l'instant $t = 0$ (justification du deuxième indice de $\mathrm{V}_{i,0}$). Avec la référence temporelle t, le paramètre κ_i représente la situation absolue de la composante i. Si cette composante est issue directement du potentiel, le laps de temps obtenu en divisant la situation κ_i par la vitesse angulaire q_i représente le retard de l'onde i par rapport à l'élément correspondant du potentiel générateur. Les constantes harmoniques de la marée, relatives à un site M, sont constituées par l'ensemble des situations κ_i et des amplitudes h_i calculées pour ce site.

En pratique, le temps civil du lieu est rarement utilisé. Pour les besoins courants, on lui préfère le temps universel ou le temps du fuseau horaire du lieu. Les relations (5.8) permettent de définir les situations relatives rapportées au méridien de Greenwich en utilisant :

— soit le temps universel (TU) désigné ici par t_0,

— soit le temps t_n du fuseau horaire n du lieu.

Notons tout d'abord que, compte tenu de la troisième relation de (5.8), la variable fondamentale τ au lieu M s'exprime en fonction de t_0 par :

$$\tau = 15t + h - s = 15t_0 + h - s + \mathrm{G}$$

De plus, pour $t = 0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{-\mathrm{G}}{15}$, l'argument astronomique $\mathrm{V}_{i,0}$ de la

composante i, de vitesse angulaire q_i, peut donc s'écrire aussi :

$$\mathrm{V}_{i,0} = \mathrm{V}_{i,0,0} + m_{\tau,i}\mathrm{G} - q_i \frac{\mathrm{G}}{15}$$

où $\mathrm{V}_{i,0,0}$ est l'argument astronomique de la composante i au méridien de Greenwich à l'instant $t_0 = 0$ et $m_{\tau,i}$ l'espèce à laquelle appartient cette composante.

Ainsi, selon la référence temporelle utilisée, nous avons les trois relations :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos\left(\mathrm{V}_{i,0} + q_{i.}t - \kappa_i\right)$$

$$h(t_0) = \sum_i h_i \cos\left(\mathrm{V}_{i,0,0} + q_i t_0 - g_{i,0}\right)$$

$$h(t) = \sum_i h_i \cos\left(\mathrm{V}_{i,0,0} + q_i t_n - g_{i,n}\right)$$

Rappelons que κ_i est la situation absolue de la composante i. Le paramètre $g_{i,0}$ est alors la situation relative rapportée au méridien de Greenwich et au temps universel t_0, et $g_{i,n}$ la situation relative rapportée au méridien de Greenwich et au temps du fuseau horaire $t_n = t_0 + n$.

Les relations entre ces diverses situations se déduisent des formules précédentes concernant les références temporelles :

$$g_{i,0} = \kappa_i - m_{\tau,i}\mathrm{G}$$

$$g_{i,n} = g_{i,0} + q_{in}$$

Les amplitudes h_i et les situations (κ_i, $g_{i,0}$ ou $g_{i,n}$) sont les constantes harmoniques de la marée. Elles sont inséparables de la connaissance du temps en usage.

En pratique, seules les constantes de la liste de Darwin sont habituellement disponibles. Les autres sont prises en compte à l'aide des corrections nodales (facteur d'amplitude f_i et déphasage u_i) supposées constantes sur une durée de l'ordre de l'année. La formule harmonique utilisée dans les applications pratiques courantes prend donc la forme suivante:

$$h(t_n) = h_{\mathrm{NM}} + \sum_i f_i h_i \cos(\mathrm{V}_{i,0,0} + q_i t_n - g_{i,n} + u_i)$$

où h_{NM} est le niveau moyen du site considéré.

Les corrections nodales sont disponibles sous forme de tables, mais elles peuvent également se calculer à partir du développement de Doodson et de la connaissance des interactions non linéaires. Cette dernière question est examinée dans le chapitre suivant.

VI
Analyse harmonique

Les premières méthodes d'analyse, mises au point pour le calcul manuel des prédictions de marée, ne seront pas développées dans cet ouvrage. Elles sont basées sur l'agencement de combinaisons linéaires simples de mesures de hauteur (c'est-à-dire à coefficients entiers), destiné à amplifier une onde déterminée tout en éliminant plus ou moins les autres composantes et le bruit. Parmi les nombreuses méthodes de ce type, certaines ont été adaptées au calcul automatique et sont probablement encore utilisées, en particulier la méthode de Doodson. Mais leur manque de souplesse ne permet pas toujours d'utiliser pleinement les possibilités offertes par les moyens de calcul moderne.

Les méthodes exposées dans ce chapitre sont particulièrement efficaces pour traiter les longues séries d'observation (jusqu'à 150 années) et sont suffisamment souples pour accepter des observations même lacunaires et de courte durée. Comme tout phénomène quantifiable, l'étude des variations temporelles du niveau de la mer, dont la marée est une composante majeure, se prête bien à l'analyse spectrale par la transformée de Fourier. L'annexe D donne les éléments essentiels concernant les transformées et les séries de Fourier. Cependant, un exposé succinct sera repris ici pour insister sur l'incidence du problème du « repliement » du spectre (*aliasing* en anglais) dans le cas de la marée dont le spectre est très étendu. Ensuite, en raison du grand nombre de composantes (potentiel et ondes composées : près de 600 fréquences sont dénombrées dans l'annexe D), nous verrons comment un filtre adapté a été mis au point pour traiter séparément les espèces. Par ailleurs, les effets météorologiques et les erreurs de mesure introduisent une perturbation spectrale, considérée comme un « bruit » pour la marée, qu'il convient d'éliminer de façon optimale. En outre, une attention particulière

sera portée au problème des composantes mal séparées et du bon conditionnement de l'analyse harmonique par la méthode des moindres carrées. Enfin, il sera traité la question des corrections nodales et des ondes d'interactions.

1 • Analyse spectrale

L'« analyse spectrale » se définit par la localisation dans l'échelle des fréquences des amplitudes « significatives » relatives aux variations temporelles du phénomène étudié, en l'occurrence le niveau marin dans notre cas. Compte tenu de son allure périodique, la marée semble en outre tout indiquée pour se prêter à ce type d'analyse. Les généralités sur les caractéristiques spectrales de la marée ont déjà été évoquées au chapitre I : figures 1.9, 1.10 et 1.11). La marée possède des amplitudes qui sont nettement au-dessus du bruit à des fréquences caractéristiques et bien identifiées ; on dit que la marée possède un spectre de raies. Les exemples donnés dans ces figures ont été obtenus à l'aide d'un algorithme dit de « Transformée de Fourier Rapide ou TFR » (*Fast Fourier Transform*, FFT en anglais). Il s'agit en fait de l'algorithme rapide de la transformée de Fourier discrète (TFD).

Les éléments fondamentaux concernant les transformées et séries de Fourier sont davantage développés dans l'annexe D à laquelle le lecteur peut éventuellement se reporter, notamment pour mieux saisir le rôle joué par les distributions dans l'échantillonnage des données (peigne de Dirac ou distribution porte).

1.1 • Rappel sur l'analyse spectrale de la marée

En un lieu déterminé et à l'instant t, soit $\mathrm{h}(t)$ la hauteur de la marée au-dessus de son niveau moyen. La formule harmonique de la marée se traduit par la somme de ses composantes i :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos(\mathrm{V}_{0i} + q_i t - g_i) \tag{6.1a}$$

où la valeur de i est considérée ici comme un numéro d'ordre ($i \in \mathrm{N}^*$) selon les vitesses angulaires q_i (positives). Rappelons que le paramètre V_{0i} est l'argument du cosinus dans le développement du potentiel à l'instant origine ($t = 0$) et g_i la situation de la marée au lieu considéré (paramètre dépendant du référentiel temporel utilisé : TU, temps en usage ou temps civil local).

En posant

$$\eta_i = h_i e^{-j(g_i - \mathrm{V}_{0i})}$$

et

$$\nu_i = \frac{q_i}{2\pi}, \tag{6.2}$$

la relation (6.1a) devient :

$$h(t) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathrm{N}^*} \left(\eta_i e^{j2\pi\nu_i t} + \eta_i^* e^{-j2\pi\nu_i t} \right) \tag{6.1b}$$

Dans la pratique, les observations sont relevées à une cadence régulière, avec une mesure tous les t_e. Soit M le nombre d'échantillons, la durée utile des observations est $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$.

Soit $\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)$ la distribution porte définie par :

$$\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t) = t_e \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} \delta(t - mt_e)$$

La partie de l'enregistrement $h(t)$ échantillonnée par la distribution porte $\frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)$ est représentée par la distribution de la figure 6.4 :

$$h_{\mathrm{T},t_e}(t) = \frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)\ h(t) = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} h(mt_e)\ \delta(t - mt_e) \tag{6.3}$$

Cette distribution admet pour transformée de Fourier $\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon)$, fonction continue de la fréquence :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) = \int h_{\mathrm{T},t_e}(t)\, e^{-j2\pi\upsilon t} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} h(mt_e)\, e^{-j2\pi\upsilon m t_e} \tag{6.4}$$

En exprimant $h(mt_e)$ selon l'expression (6.1b), on fait apparaître des séries géométriques de raisons $e^{i2\pi(\upsilon_i-\upsilon)t_e}$ et $e^{-i2\pi(\upsilon_i+\upsilon)t_e}$. Il vient ainsi :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\eta_i \Lambda^*_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon - \upsilon_i) + \eta_i^* \Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon + \upsilon_i) \right], \tag{6.5}$$

expression dans laquelle $\Lambda_{\mathrm{T},t_e}(x) = \dfrac{\sin(\pi x \mathrm{M}\, t_e)}{\mathrm{M} \sin(\pi x t_e)} e^{-j\pi x(\mathrm{M}-1)t_e}$;

Remarquons que $\Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon)$ est la TF de la fonction porte $\frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)$, ce qui permet d'obtenir l'expression (6.5) directement par le produit de convolution

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) = \Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) * \mathrm{F}(\upsilon) \tag{6.6}$$

υ_e étant la fréquence d'échantillonnage ($\upsilon_e = 1/t_e$), le caractère périodique de $\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon)$ dans le domaine des fréquences ($\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) = \mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon + k\upsilon_e)$),

associé à son caractère hermitien pour les fonctions temporelles réelles ($F_{T,t_e}(\upsilon) = F^*(-\upsilon)$) donne la relation :

$$F_{T,t_e}(\upsilon_e/2 - \Delta\upsilon) = F^*_{T,t_e}\left(\upsilon_e/2 + \Delta\upsilon + k\upsilon_e\right)$$

qui conduit au repliement du spectre, $\Delta\upsilon$ étant un écart de fréquences quelconque. La fréquence $\upsilon_N = \upsilon_e/2$ est appelée fréquence de Nyquist. Le spectre $\left|F_{T,t_e}\right|$ possède ainsi deux familles d'axes de symétrie : $\upsilon = k\upsilon_e$ et $\upsilon = \upsilon_N + k\upsilon_e$.

En conséquence, le spectre issu de la fonction d'échantillonnage d'un signal réel, n'est représentatif du vrai spectre que si les composantes extérieures à l'intervalle de fréquences $[0, \upsilon_N]$ peuvent être négligées (théorème de Shannon). Pour un signal complexe, le caractère hermitien n'étant pas vérifié, l'intervalle est porté à $[-\upsilon_N, \upsilon_N]$. Si nécessaire, on peut se ramener à ces cas en procédant à un filtrage préalable.

Il existe cependant des situations où la fréquence d'échantillonnage est telle que les composantes détectées dans l'intervalle utile ne sont pas représentatives du spectre réel, mais issues d'un certain nombre de repliements. C'est le cas par exemple des hauteurs de marée obtenues par altimétrie satellitaire, dont la période d'acquisition est de l'ordre de quelques jours. Dans ce cas, il est encore possible d'exploiter la TFD, mais à condition, pour chaque composante spectrale détectée de fréquence υ_d, d'être en mesure d'attribuer une valeur à k afin de lever l'ambiguïté $\upsilon = \pm\upsilon_d + k\upsilon_e$. Cette possibilité est offerte pour les composantes de marée, dont les fréquences sont parfaitement connues.

À partir de

$$\Lambda_{T,t_e}(\upsilon) = \frac{\sin(\pi\upsilon M t_e)}{M \sin(\pi\upsilon t_e)} e^{-j\pi\upsilon(M-1)t_e}$$

(TF de la fonction porte $\frac{1}{T}\Pi_{T,t_e}(t)$), discrétisée selon le pas fréquentiel $\upsilon_T = 1/T$ on obtient :

$$\Lambda_{T,t_e}(\upsilon) \sum_{n=-M/2}^{n=M/2-1} \delta(\upsilon - n\upsilon_T) = \sum_{n=-M/2}^{n=M/2-1} \frac{\sin n\pi}{M \sin(n\pi/M)} e^{-jn\pi\frac{M-1}{M}} \quad (6.7)$$
$$= \delta(n)$$

Ainsi, tous les termes sont nuls, à l'exception du terme pour lequel $n = 0$ qui correspond au Dirac $\delta(\upsilon)$.

À la distribution porte normée, série discrète de pas temporel t_e,

$$\frac{1}{T}\Pi_{T,t_e}(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{m=M-1} \delta(t - mt_e),$$

on peut faire correspondre une transformée discrète (spectre de raies tous les $\upsilon_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$) dans la porte fréquentielle symétrique de largeur υ_e.

Posons $\upsilon_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$.

La distribution porte symétrique

$$\Pi_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon) = \sum_{n=-\mathrm{M}/2}^{n=\mathrm{M}/2-1} \delta(\upsilon - n\upsilon_{\mathrm{T}}) \tag{6.8}$$

permet de faire correspondre à la distribution des échantillons $h_{\mathrm{T},t_e}(t)$, la TFD définie par :

$$\mathrm{F}_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon) = \Pi_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon)\,\mathrm{F}_{\mathrm{T},t_e}(\upsilon) \tag{6.9}$$

En d'autres termes, $\mathrm{F}_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon)$ est l'échantillonnage de $\mathrm{F}_{\mathrm{T},te}(\upsilon)$ par la distribution porte symétrique $\Pi_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon)$ ayant une largeur υ_e avec l'intervalle élémentaire υ_{T}.

D'après les relations (6.5) et (6.8),

$$\mathrm{F}_{\upsilon_e,\upsilon_{\mathrm{T}}}(\upsilon) = \sum_{n=-\mathrm{M}/2}^{n=\mathrm{M}/2-1} \sum_i \left[\eta_i \Lambda^*_{\mathrm{T},t_e}\left(\frac{n}{\mathrm{T}} - \upsilon_i\right) + \eta_i^* \Lambda_{\mathrm{T},t_e}\left(\frac{n}{\mathrm{T}} + \upsilon_i\right)\right] \delta\left(\upsilon - \frac{n}{\mathrm{T}}\right) \tag{6.10}$$

Les TFD sont des séries de distributions régulièrement espacées sur l'axe des fréquences. Leur spectre est ainsi un spectre de raies. Dans l'annexe D (partie 4.2), il est démontré qu'à partir de $\mathrm{F}_{\nu_e,\nu_{\mathrm{T}}}(\nu)$, la TFD inverse nous redonne la série de départ $h_{\mathrm{T},t_e}(t)$. Il y a ainsi une correspondance totale entre la distribution des échantillons et sa TFD, chaque série comportant M éléments :

$$h_{\mathrm{T},t_e}(t) \Longleftrightarrow \mathrm{F}_{\nu_e,\nu_{\mathrm{T}}}(\nu)$$

Les sigles TFR ou FFT étant dans la pratique plus usités que TFD, dans la suite du texte nous utiliserons de préférence le sigle TFR.

1.2 • Caractéristiques du spectre de la marée

En raison de l'étendue du spectre de la marée, l'échantillonnage adopté peut ne pas satisfaire le théorème de Shannon. Alors, rien ne permet de déterminer si la valeur calculée par la TFR à une fréquence donnée ne provient pas en fait de composantes spectrales symétriques par rapport à un des axes d'équation $\nu = k\nu_e/2$ (repliement).

Pour l'instant, nous ne faisons qu'un usage qualitatif de ces résultats, destinés à fournir l'allure du spectre de la marée. Il est intéressant d'étudier le comportement d'une composante de marée. La figure 6.1 illustre le résultat

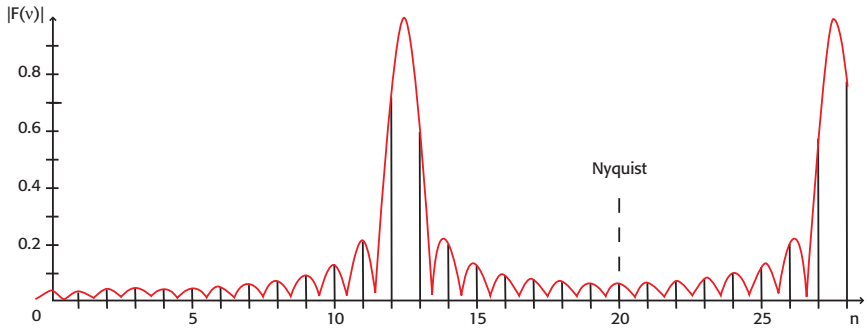


Figure 6.1 — Les deux spectres (continu et discret) sont établis à partir d'une fonction $\cos(2\pi\nu_i t)$ de période égale à $T_i = 1/\nu_i = 3{,}23t_e$, échantillonnée sur une durée $T = 40t_e$ avec un pas t_e pris pour unité de temps. L'axe des abscisses est gradué en 1/40 d'unité de fréquence $\nu_e = 1/t_e$; les valeurs sont celles du coefficient n de $\nu_n = n/T$. La courbe rouge représente le spectre continu du signal échantillonné. Les segments de couleur noire sur les abscisses entières représentent le spectre de raies correspondant. Au-delà de la fréquence de Nyquist ($\nu_N = 20/T$), le tracé permet de voir la symétrie par rapport à l'axe $\nu = \nu_N$ du spectre de la fonction échantillonnée.

d'une TFR appliquée à une composante i (en supposant $h_i = 1$ et $V_{0i} - g_i = 0$) soit $h_i(t) = \cos(2\pi\nu_i t)$, de période $T_i = 1/\nu_i = 3{,}23t_e$ où le pas d'échantillonnage t_e est pris comme unité de temps sur une durée $T = 40t_e$. L'échantillonnage choisi ici respecte le théorème de Shannon ($\nu_i < \nu_N = \nu_e/2$). Dans le domaine des fréquences positives, le spectre continu est la courbe représentative de la fonction $\left|\Lambda^*_{T,t_e}(\nu_i - \nu) + \Lambda_{T,t_e}(\nu_i + \nu)\right|$.

Cet exemple montre le biais introduit par cette technique pour la détection d'une composante périodique d'un signal. Dans le domaine $(0, \nu_N)$, on voit apparaître une vingtaine de barres dont la longueur maximale est inférieure à l'unité (valeur de la composante recherchée). La valeur de la fréquence ν_i du signal, correspondant au premier maximum du spectre continu (courbe rouge) se situe entre les deux premières barres les plus importantes. Dans le cas où la durée T serait exactement égale à un multiple n_i de la période de la composante i, le spectre révélerait alors une raie unique de longueur unité correspondant à la valeur de la composante à la fréquence $\nu_i = n_i/T$.

Le cas le plus défavorable correspond au cas où $\nu_i = (n \pm 1/2)\nu_T$. Cependant, même dans ce cas, une composante est mise en évidence par la présence de deux raies voisines de même amplitude, égale à : $1/[M\sin(\pi/2M)] \approx 2/\pi$ avec $M \gg 1$. Le plus gênant est la présence de pics secondaires risquant de masquer des composantes de faibles amplitudes.

La marée n'étant pas un phénomène périodique, il n'existe pas de durée T permettant d'obtenir une raie spectrale unique pour chaque composante,

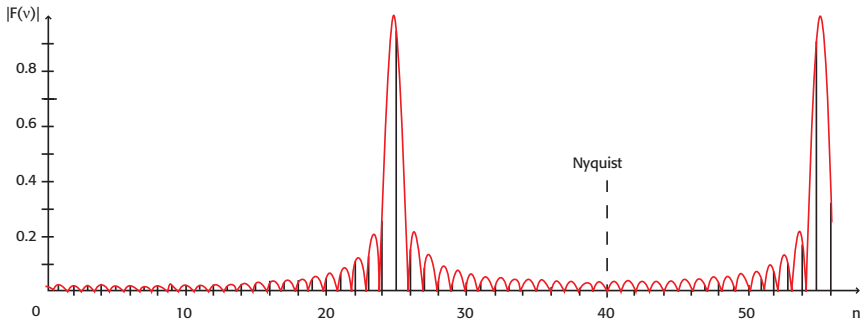


FIGURE 6.2 — Les deux spectres (continu et discret) de la même composante i sont ici obtenus avec un échantillonnage sur une durée double, soit $T = 80t_e$. L'axe des abscisses est gradué en 1/80 d'unité de fréquence (coefficient n de $\nu_n = n/80t_e$). La fréquence de Nyquist ($\nu_N = \nu_e/2$) correspond ici à $n = 40$. Noter que la barre la plus importante se rapproche du maximum du spectre continu.

il faudrait pour cela que T tende vers l'infini. Cependant il est possible, au moins pour les ondes principales, de s'approcher de ce cas idéal en choisissant une durée d'observation voisine d'un nombre entier de jours solaires, de jours lunaires et de lunaisons. Par ailleurs, plus la durée du signal à traiter est importante, meilleure est la résolution. La figure 6.2 illustre les résultats obtenus pour la même composante i examinée précédemment, échantillonnée avec un pas identique mais sur une durée double. La raie proche de la fréquence recherchée se manifeste par une signature plus importante que dans le traitement précédent.

Si le théorème de Shannon n'était pas respecté, l'échantillonnage d'une composante $\cos(2\pi\nu_j t)$ où $\nu_j = 2\nu_N - \nu_i > \nu_N$, ferait apparaître dans l'intervalle $(0, \nu_N)$ une composante à la fréquence ν_i inexistante dans le signal réel. Dans la figure 6.2, la composante j serait celle du deuxième pic, proche de la raie correspondant au coefficient $n = 55$.

L'expérience prouve qu'une durée d'observation supérieure à une trentaine d'années est nécessaire pour obtenir une résolution suffisante afin de détecter toutes les composantes significatives de la marée. Il est néanmoins possible, si l'on ne dispose pas d'une durée suffisante, de procéder par étapes, en retranchant du signal les composantes les plus importantes, dont les pics secondaires peuvent masquer les plus faibles, et en calculant ensuite la TFR du signal résultant.

La figure 6.3 illustre les caractères habituels de la marée dans ce type de représentation où apparaissent des groupements de raies, appelés espèces et séparés par des domaines où seul subsiste le bruit. Ce dernier est essentiellement d'origine météorologique. Il est surtout perceptible dans les basses

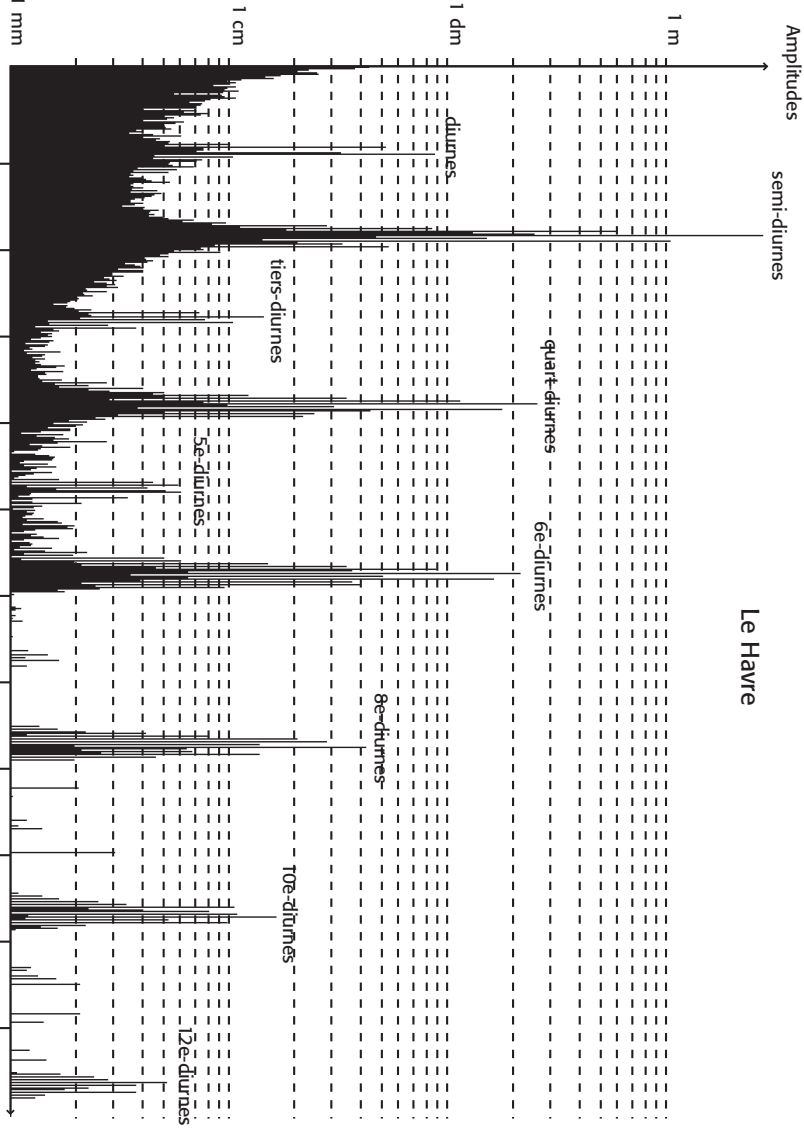


Figure 6.3 — Spectre dit de « basse résolution » obtenu par TFR (Le Havre, France). L'axe des abscisses représente la vitesse angulaire exprimée en cycles par jour (1 cpj=360° /24 h). La caractéristique fondamentale de ce spectre est sa structure en groupements de fréquences bien séparés les uns des autres, constituant les espèces de la marée. Ce spectre s'étale sur une douzaine d'espèces. On peut noter que la bande de fréquences relatives à chaque espèce est relativement étroite.

fréquences, inférieures à un ou deux cycles par jour. Les fréquences de la houle et des vagues ont été éliminées dans les données ayant servi à l'obtention de ces résultats (filtrage dû au puits de tranquillisation avec application éventuelle d'un filtre numérique supplémentaire).

L'axe des abscisses est gradué en cycles par jour (cpj du temps moyen) dont les valeurs entières donnent le numéro d'ordre de chaque espèce. Le décalage progressif de la fréquence moyenne de chaque espèce, vers des valeurs inférieures aux abscisses entières (figure 6.3), illustre le fait que les espèces sont centrées sur les harmoniques du jour lunaire $T_L = 24{,}841\,2$ h (24 h 50 min 28,3 s). Il en résulte par exemple que l'espèce qualifiée de 12e-diurne possède une fréquence centrale voisine de 11,6 cpj qui correspond à 12 cycles par jour lunaire. La figure 6.3 est l'image d'un spectre issu d'une TFR (ou TFD).

Nous avons vu qu'il y a correspondance complète entre la série temporelle des observations échantillonnées et sa série de Fourier (distribution qui donne un spectre de raies), chacune contenant exactement la même quantité d'informations.

Ainsi, il est très important de noter que la TFR est une représentation fidèle du signal observé, indépendante de la procédure ayant permis de la calculer. En effet, dans le cadre de l'analyse harmonique de la marée, seuls les domaines de fréquences contenant les raies spectrales des espèces présentent un intérêt pour la prédiction. Il en résulte que le nombre d'informations spectrales utiles est relativement restreint malgré l'étendue du spectre, et qu'en raison du principe d'équivalence évoqué plus haut, il devrait pouvoir en être de même dans le domaine temporel afin de réduire le nombre de données.

Ces considérations sont particulièrement intéressantes dans le cas d'observations de longue durée. La très grande quantité de données peut alors limiter les possibilités de traitement, notamment par le nombre important d'erreurs de chute cumulées au cours des calculs. Cette même démarche incite à traiter séparément les espèces. On scinde ainsi un problème global comportant un grand nombre d'opérations en plusieurs problèmes partiels plus simples à résoudre et permettant de ce fait, d'obtenir des solutions plus précises au sein de chaque espèce.

En effet, chaque espèce comporte un nombre assez important de raies spectrales comme l'illustre la figure 6.4 qui représente avec une meilleure définition le domaine semi-diurne de la figure 6.3.

La phase et l'amplitude d'une composante constituent les inconnues de l'analyse harmonique ; les fréquences émanant du potentiel ou d'ondes composées sont évidemment supposées connues (voir annexe D). Restreindre

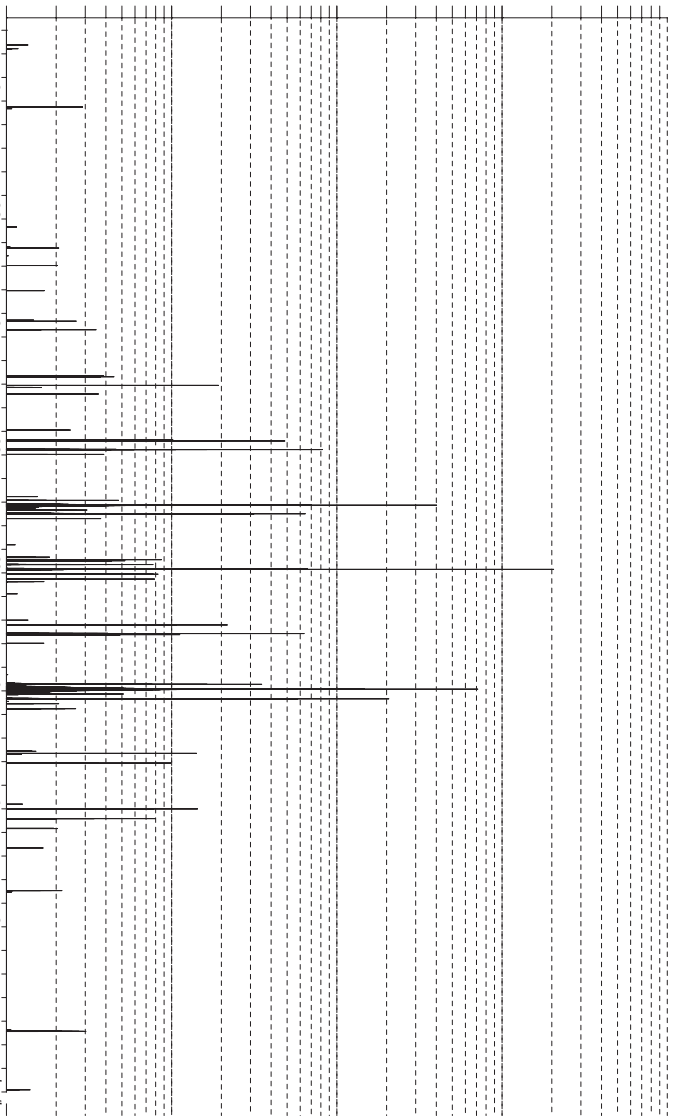


Figure 6.4 — Spectre dit de « moyenne résolution » (Le Havre, France) : spectre de l'espèce semi-diurne en fonction de la vitesse angulaire exprimée ici en degrés par heure (30°/h= *2cpj*). Chaque segment représente l'amplitude d'une composante harmonique de la marée semi-diurne. Noter que les amplitudes supérieures à quelques millimètres sont toutes comprises dans un intervalle de ±2,5°/h par rapport à l'onde M_2 (28,984 1°/h).

la résolution du problème, en se limitant chaque fois à une seule espèce, diminue considérablement le nombre d'inconnues et par conséquent la difficulté de l'opération globale. En effet, cette opération exigeant la résolution d'un système linéaire (voir chapitres IV et V), il ne serait pas toujours facile de conditionner correctement le système prenant en compte la totalité des espèces.

2 • La méthode des hauteurs réduites

Pour les raisons évoquées ci-dessus, il paraît plus judicieux de procéder à un filtrage passe-bande afin de traiter séparément chaque espèce. Nous avons vu que l'écart $\nu_{T_L} = 1/T_L$ entre fréquences centrales d'espèces voisines, correspond à un écart de vitesse angulaire d'un cycle par jour lunaire, soit 14,492 05°/h. Par ailleurs, la demi-largeur de bande relative à chaque espèce k (par rapport à la fréquence centrale $k\nu_{T_L}$) ne dépasse pas $\pm 2{,}5°/h$, soit de l'ordre de 20% de l'écart de base ν_{T_L}. Dans la figure 6.4 par exemple, nous pouvons constater que, pour l'espèce semi-diurne au Havre (France), toutes les composantes supérieures à quelques millimètres sont incluses dans cet intervalle.

Par ailleurs, nous savons qu'à un filtrage temporel correspond une convolution fréquentielle, et qu'inversement à un filtrage fréquentiel correspond une convolution temporelle. Pour la marée, nous disposons a priori de la représentation temporelle, il convient donc de construire un filtre temporel spécifique dont la convolution fréquentielle (souvent appelée fonction de transfert) présente une demi-largeur égale à 20 % environ de l'écart ν_{T_L}. D'un point de vue physique, il n'est pas possible de réaliser un filtre qui soit parfait. Cependant plusieurs filtres bien adaptés à l'analyse harmonique de la marée ont été mis au point. C'est l'objet de ce chapitre. Il abordera la définition de la « hauteur réduite », et l'analyse harmonique par espèce à partir de la méthode des « vecteurs réduits » correspondants. Les composantes harmoniques au sein de chaque espèce sont obtenues, selon le cas, soit par la résolution d'un système d'équations (aux vecteurs réduits) par la méthode des moindres carrés pour éliminer le bruit, soit par la TFR directement. Ces techniques sont utilisées par le Service hydrographique français depuis 1974.

Dans la pratique, nous avons vu que la série de Fourier d'une courbe échantillonnée se détermine à l'aide d'un algorithme de TFR. Le temps de calcul par TFR avec un ordinateur est alors minimisé lorsque le nombre d'échantillons est une puissance de deux (2^p). À partir des relevés de mesures, en général à une cadence horaire, un nouvel échantillonnage est

souvent réalisé par interpolation parabolique afin d'obtenir $M = 2^5 = 32$ valeurs par jour lunaire ($T_L = 24{,}841\,2$h). Les données ainsi recalculées sont utilisées pour l'analyse harmonique par la méthode dite des « hauteurs réduites par les vecteurs réduits à un instant déterminé ». Pour la marée, cette méthode est équivalente à l'application d'un filtre temporel qui permet d'isoler à un instant déterminé l'estimateur de la composante globale de chaque espèce. Pour que le filtre soit bien adapté au problème à résoudre, l'estimateur de cette amplitude globale (qui sera traduite ici sous sa forme complexe) doit représenter la somme des ondes constituant l'espèce à l'instant considéré.

2.1 • Définition des vecteurs réduits

Reprenons la formule harmonique de la marée dont la hauteur $h(t)$ peut s'écrire en mettant en évidence les espèces désignées ici par l'indice k (égal à la valeur du paramètre m_τ du chapitre V) :

$$h(t) = \sum_k \sum_i h_{ki} \cos(V_{0ki} + q_{ki}t - g_{ki}), \tag{6.11a}$$

ou encore :

$$h(t) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i h_{ki} \left[e^{j(V_{0ki}+q_{ki}t-g_{ki})} + e^{-j(V_{0ki}+q_{ki}t-g_{ki})} \right], \tag{6.11b}$$

avec :

h_{ki} et q_{ki}, amplitude et vitesse angulaire de la composante i de l'espèce k ;

V_{0ki}, argument à l'instant initial ($t = 0$; indice « 0 ») de cette composante qui peut être d'origine astronomique (argument du cosinus du potentiel générateur) ou résulter d'une combinaison d'arguments astronomiques donnant une composante d'interaction dans l'espèce k ;

g_{ki}, situation de la composante ; ce paramètre est toujours associé à la référence du temps utilisé (temps local, TU ou du fuseau horaire).

En introduisant l'écart de fréquence υ_{ki} entre $q_{ki}/2\pi$ et la fréquence centrale k/T_L de l'espèce k (p.m. : T_L, durée du jour lunaire), nous avons :

$$\upsilon_{ki} = q_{ki}/2\pi - k/T_L. \tag{6.12}$$

Désignons alors par $C_k(t)$ la valeur complexe (représentative d'un vecteur) donnée par la relation :

$$C_k(t) = \sum_i h_{ki} e^{j(V_{0ki}+2\pi\upsilon_{ki}t-g_{ki})}. \tag{6.13}$$

L'expression (6.11b) de la hauteur de la marée devient ainsi :

$$h(t) = \frac{1}{2}\sum_k \left[\mathrm{C}_k(t) e^{j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} + \mathrm{C}_k^*(t) e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} \right], \tag{6.14}$$

où $\mathrm{C}_k(t)$ est un nombre complexe appelé vecteur réduit de l'espèce k à l'instant t.

Nous avons vu que la demi-largeur de bande, associée à chaque espèce, est relativement étroite ($\leq$ 2,5°/h) comparée à 360°/$\mathrm{T_L}$ $\approx$ 14,5°/h, intervalle entre fréquences centrales de deux espèces voisines ($\mathrm{T_L}\,|\upsilon_{ki}| < 0{,}2$). Les vecteurs réduits $\mathrm{C}_k(t)$ varient donc lentement par rapport à la hauteur d'eau $h(t)$. Nous pouvons les interpréter comme des variations lentes de l'amplitude et de la phase associées à chaque espèce.

Ces vecteurs réduits contiennent toutes les informations relatives à chaque espèce sous réserve de pouvoir les isoler par un filtre adapté. En établissant un filtre temporel optimal, nous pouvons en attendre les avantages suivants :

— pour l'analyse de la marée astronomique, les données sont traitées plus efficacement car le spectre, en dehors des bandes de fréquences associées aux espèces, est ignoré ;

— par ailleurs, chaque espèce peut être traitée individuellement, ce qui est susceptible de transformer un problème global difficile en plusieurs problèmes plus aisés à résoudre.

2.2 • Définition des hauteurs réduites

Remarquons que l'expression (6.14) a l'allure d'une série de Fourier. Ce n'est évidemment pas une série de Fourier car les coefficients dépendent du temps, mais leur variation lente traduit le fait que la marée est presque périodique de période $\mathrm{T_L}$. Cette constatation va servir de fil conducteur pour définir un filtre temporel adapté aux observations de marée.

Il est intéressant de remarquer que la méthode des hauteurs réduites s'apparente à l'analyse semi-graphique de l'Amirauté Britannique. De ce point de vue, elle peut en être considérée comme une formalisation et une généralisation.

Considérons un instant t_0 dans le voisinage de l'instant d'une mesure $h\,(t)$, tel que l'écart maximal $|t - t_0|$ soit de l'ordre du jour lunaire. Nous appelons « hauteur de la marée à l'instant t réduite à l'instant t_0 » la fonction $\mathrm{H}\,(t_0, t)$ donnée par la relation :

$$\mathrm{H}\,(t_0, t) = \frac{1}{2}\sum_k \left[\mathrm{C}_k\,(t_0)\, e^{j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} + \mathrm{C}_k^*\,(t_0)\, e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} \right] \tag{6.15}$$

En raison des faibles valeurs des écarts de fréquence $\upsilon_{k,i}$, les vecteurs réduits sont lentement variables, et il en est de même de la variation de la hauteur réduite $\mathrm{H}(t_0, t)$ par rapport à t_0

Les fréquences centrales $k/\mathrm{T_L}$ de chaque espèce sont naturellement choisies comme fréquences centrales des filtres passe-bande que nous allons construire. Cependant, les fréquences d'échantillonnage des observations étant toujours une fraction de jour solaire (le plus souvent 1 heure), l'application stricte de la méthode suppose un rééchantillonnage des observations. Néanmoins, il est possible de l'éviter en adoptant comme fréquences centrales des filtres $k/25$ heures^{-1}, proches de $k/\mathrm{T_L}$. L'application pratique est dans ce cas grandement simplifiée et aboutit à ce qu'il est convenu d'appeler « les hauteurs réduites à midi », les instants t_0 étant choisis à midi de chaque jour. Les conséquences relatives aux écarts entre les fréquences centrales des filtres ainsi constitués et $k/\mathrm{T_L}$ ne sont pas réellement sensibles si $k \leq 12$, c'est-à-dire dans tout le spectre accessible à l'aide des observations horaires. Ce n'est plus vrai dans le cas des marées fluviales où de l'énergie est encore détectée au-delà des 30es diurnes.

Dans ce qui suit, nous restons le plus général possible.

Les hauteurs réduites $\mathrm{H}(t_0, t)$ possèdent les propriétés suivantes :

— en raison des faibles valeurs des écarts de fréquences υ_{ki}, les vecteurs réduits sont lentement variables. Il en est donc de même pour les hauteurs réduites par rapport à $\theta = t_0 - t$

— en raison de la périodicité des exponentielles complexes $e^{j2\pi\frac{k}{\mathrm{T_L}}t}$ et $e^{-j2\pi\frac{k}{\mathrm{T_L}}t}$, les hauteurs réduites sont périodiques, de période $\mathrm{T_L}$ par rapport à leur deuxième argument :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(t, t) &= h(t) \\
\mathrm{H}(t, t - \mathrm{T_L}) &= \mathrm{H}(t - \mathrm{T_L}, t - \mathrm{T_L}) = h(t - \mathrm{T_L}) \\
\mathrm{H}(t, t + \mathrm{T_L}) &= \mathrm{H}(t + \mathrm{T_L}, t + \mathrm{T_L}) = h(t + \mathrm{T_L})
\end{aligned}$$

La connaissance des hauteurs réduites présente un intérêt évident, car étant périodiques de période $\mathrm{T_L}$, les vecteurs réduits $\mathrm{C}_k(t_0)$ en sont les coefficients de la série de Fourier associée. Leur calcul est effectué en tirant parti des propriétés décrites précédemment.

La variation lente des hauteurs réduites en fonction du premier argument nous permet *a priori* de les approcher à l'aide d'un développement limité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(t_0, t) &= \mathrm{H}(t + \theta, t) \\
&= \mathrm{H}(t, t) + \theta \frac{\partial \mathrm{H}(\tau = t, t)}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\tau = t, t)}{\partial \tau^2} + \dots \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

La précision du résultat est évidemment fonction du degré du développement, mais également de la possibilité de calculer les dérivées successives de $\mathrm{H}(\tau, t)$, à partir des observations disponibles $h(t)$.

Les meilleures approximations que l'on puisse obtenir pour ces dérivées, en supposant que l'on dispose des observations comprises entre les jours $t - \mathrm{T_L}$ et $t + \mathrm{T_L}$ sont données par les formules suivantes où les dérivées sont approchées par des différences finies :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{H}(\tau = t, t)}{\partial \tau} &\approx \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{H}(t,t) - \mathrm{H}(t - \mathrm{T_L}, t)}{\mathrm{T_L}} + \frac{\mathrm{H}(t + \mathrm{T_L}, t) - \mathrm{H}(t,t)}{\mathrm{T_L}}\right] \\ &= \frac{h(t + \mathrm{T_L}) - h(t - \mathrm{T_L})}{2\mathrm{T_L}} \qquad (6.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (\tau = t, t)}{\partial \tau^2} &\approx \frac{1}{\mathrm{T_L}}\left[\frac{\mathrm{H}(t + \mathrm{T_L}, t) - \mathrm{H}(t,t)}{\mathrm{T_L}} - \frac{\mathrm{H}(t,t) - \mathrm{H}(t - \mathrm{T_L}, t)}{\mathrm{T_L}}\right] \\ &= \frac{h(t + \mathrm{T_L}) + h(t - \mathrm{T_L}) - 2h(t)}{\mathrm{T_L}^2} \qquad (6.18)\end{aligned}$$

D'où le développement limité au deuxième ordre :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t_0, t) \approx h(t) &+ (t_0 - t)\,\frac{h(t + \mathrm{T_L}) - h(t - \mathrm{T_L})}{2\,\mathrm{T_L}} \\ &+ (t_0 - t)^2\,\frac{h(t + \mathrm{T_L}) + h(t - \mathrm{T_L}) - 2h(t)}{2\,\mathrm{T_L}^2} \qquad (6.19)\end{aligned}$$

2.3 • Calcul des vecteurs réduits

En raison de la périodicité de $\mathrm{H}(t_0, t)$ par rapport au second argument, les vecteurs réduits $\mathrm{C}_k(t_0)$ sont les coefficients de la série de Fourier de cette hauteur, échantillonnée sur une durée $\mathrm{T_L}$. Dans la pratique du calcul des vecteurs réduits, les observations, souvent horaires à l'origine, peuvent être re-échantillonnées afin d'obtenir un nombre de hauteurs par jour lunaire égal à une puissance de 2, ce qui permet d'utiliser l'algorithme de calcul de TFR de Tuley-Tukey, particulièrement efficace.

Cependant, afin de calculer la fonction de transfert, et sans déroger à la généralité, il est commode de choisir t_0 comme origine temporelle, et afin d'éviter l'introduction d'un déphasage, il est en outre recommandé de mener les calculs symétriquement par rapport à cette origine. Dans la formule suivante, nous avons $\mathrm{M} = 2\mathrm{N} + 1$ (nombre impair) hauteurs réduites espacées d'un intervalle de temps $t_e = \mathrm{T_L}/\mathrm{M}$.

$$\mathrm{C}_k(0) = \frac{2}{\mathrm{M}} \sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=\mathrm{N}} \mathrm{H}(0, nt_e)\, e^{-j2\pi \frac{kn}{\mathrm{T_L}} t_e} \qquad (6.20)$$

Les vecteurs réduits sont ainsi le résultat d'un filtrage temporel prenant en compte les données d'observations entourant l'instant origine.

La fonction de transfert de ce filtre dépend de l'extension du développement (6.16). Elle est obtenue (comme toute fonction de transfert) en appliquant le filtrage à l'exponentielle complexe $e^{j2\pi\upsilon t}$. Ce calcul fait appel à l'expression d'une série géométrique et à ses dérivées successives selon le degré du filtre. Appelons FT0, FT1, FT2, ...les filtres de degrés 0, 1, 2, ...

$$\begin{aligned} \mathrm{FT0}\,(\upsilon) &= \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\sin\,(\pi\upsilon \mathrm{T_L})}{\sin\,(\pi\upsilon\, te)} \\ \mathrm{FT1}\,(\upsilon) &= \mathrm{FT0}\,(\upsilon)^2\,[\mathrm{M}\sin\pi\upsilon\mathrm{T_L}\sin\pi\upsilon\, t_e + \cos\pi\upsilon\mathrm{T_L}\cos\pi\upsilon\, t_e] \\ \mathrm{FT2}\,(\upsilon) &= \mathrm{FT0}\,(\upsilon)^3\left[1+\frac{\mathrm{M}^2-1}{2}\sin^2\,(\pi\upsilon t_e)\right] \end{aligned} \tag{6.21}$$

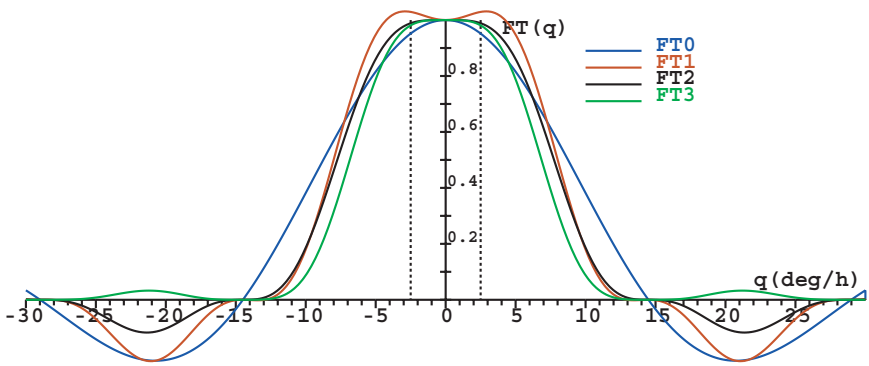


Figure 6.5 — Représentation graphique des filtres FT0, FT1, et FT2.

Sachant que pour chaque espèce, les vitesses angulaires des composantes de la marée se situent à 2,5°/h de part et d'autre de la fréquence centrale de chaque espèce, on constate que le filtre résultant du développement polynomial du 2^e^ordre est très efficace (courbe FT2 de la figure 6.5). En effet, il conserve quasi intégralement les composantes de chaque espèce et en raison des faibles valeurs de la fonction de transfert aux point situés aux fréquences $n/\mathrm{T_L}$, ce filtre élimine pratiquement l'influence des composantes associées aux autres espèces. Ce dernier point est particulièrement important et disqualifie le filtre FT0 qui autorise la contamination d'une espèce donnée par les espèces voisines. Le filtre FT1 n'est pas très mauvais de ce point de vue, mais est sensiblement moins bon dans l'intervalle [-2,5°/h,

2,5°/h], et comme il nécessite la prise en comte d'autant d'observations que FT2 (de $t_0 - (3/2)\mathrm{T_L}$, à $t_0 + (3/2)\mathrm{T_L}$) il ne présente que peu d'intérêt.

Le filtre FT3 serait légèrement meilleur que FT2, mais nécessite la prise en comte d'un jour supplémentaire (de $t_0 - 2\mathrm{T_L}$ à $t_0 + 2\mathrm{T_L}$) pour une amélioration de performances peu sensible. Néanmoins, en raison de son aptitude à atténuer le bruit entre les fréquences de marée, il a pu être appliqué avec intérêt pour l'analyse des observations de courant où ce bruit est souvent très important. Dans ce cas, la perte de deux jours au début et à la fin des observations (souvent de courte durée) peut s'avérer rédhibitoire. On y remédie par un traitement spécial des extrémités.

Considérons un instant t_0, dans le voisinage de l'instant de la mesure $h(t)$, tel que l'écart maximal $|t_0 - t|$ soit de l'ordre du jour lunaire. En posant $t_0 = t + \theta$, nous avons ainsi : $|\theta| \leq \mathrm{T_L}$. Signalons que, selon le filtre souhaité, d'autres choix de limites sont possibles. Nous appelons « hauteur de la marée à l'instant t, réduite à l'instant t_0 » la fonction $\mathrm{H}(t_0, t)$ donnée par la relation (6.16).

Bien souvent, cette hauteur est dite tout simplement « hauteur réduite ». En raison des faibles valeurs des écarts de fréquences υ_{ki}, les vecteurs réduits sont lentement variables, il en est de même de la variation de la hauteur réduite $\mathrm{H}(t_0, t)$ par rapport à $\theta = t_0 - t$.

En général, à partir d'une série de mesures, les vecteurs réduits C_k sont calculés avec un pas de temps régulier t_c. Cet intervalle t_c doit être choisi de telle sorte que le théorème de Shannon, relatif à l'échantillonnage, soit respecté. Pour tout écart υ_{ki} par rapport à la fréquence centrale correspondante $k/\mathrm{T_L}$, il nous faut donc remplir la condition : $|\upsilon_{ki}| \leq 1/2t_c$.

Or nous avons : $\max |\upsilon_{ki}| \approx \dfrac{2{,}5°/h}{360°} = \dfrac{1}{144h}$, il nous faut donc : $t_c \leq 72$ heures.

Ainsi, pour chaque espèce, le calcul d'un vecteur réduit toutes les 72 heures suffirait pour éviter les erreurs qui résulteraient du repliement du spectre dans le domaine des fréquences de marée. Pour la détermination des vecteurs réduits, nous disposons donc d'une grande latitude en ce qui concerne le choix de la cadence t_c à adopter. Cette commodité sera mise à profit pour permettre l'utilisation d'un algorithme de TFR. Un pas inférieur à 72 heures sera choisi, tout en s'assurant d'une part que le nombre de vecteurs réduits calculés sur la durée des observations soit égal à une puissance de deux, et d'autre part que le maximum de données disponibles soient prises en considération. Si les mesures comportent des lacunes, la TFR n'est pas applicable ; on calcule alors un vecteur réduit par jour lunaire, ce qui assure la prise en compte optimale d'un maximum d'observations.

Nous allons voir plus loin que l'analyse harmonique, à partir des séries de vecteurs réduits ainsi constituées, se résume à la résolution d'un nombre de systèmes d'équations linéaires, égal au nombre d'espèces à considérer. Cependant, bien que le problème du bruit ait déjà été évoqué, il est important d'examiner cette perturbation par l'analyse de quelques exemples, avant d'aborder la résolution des équations « normales » de l'analyse harmonique par espèce.

3 • Le bruit dans l'analyse de la marée

Dans les développements précédents, il a surtout été question d'une marée théorique, constituée uniquement des composantes harmoniques. Dans la réalité, la hauteur du niveau marin, enregistrée par les instruments, résulte des contributions de la marée (astronomique et radiationnelle) d'une part et, d'autre part, des effets météorologiques (pression et vent notamment) ayant une influence sur ce niveau. De plus, viennent s'ajouter les erreurs inhérentes à tout système de mesure et au puits de tranquillisation. Ainsi l'écart de la mesure du niveau marin par rapport à la marée théorique est considéré comme du bruit pour l'analyse harmonique de la marée.

L'examen de la nature du bruit est très important pour identifier l'influence des conditions météorologiques, mais également pour déceler la présence de composantes périodiques résiduelles, éventuellement naturelles, mais qui peuvent provenir aussi d'erreurs systématiques engendrées par les systèmes de mesure eux-mêmes. En effet, toute composante périodique du bruit ne peut raisonnablement avoir pour origine que deux causes principales : soit l'omission d'une composante de marée, soit la présence d'une anomalie cyclique dans le fonctionnement d'un ou plusieurs constituants du système de mesure (capteur, décodeur, transmetteur, enregistreur ou alimentation électrique).

En raison de l'influence des activités humaines et des conditions météorologiques sur ces divers instruments, le bruit a toutes les chances de présenter des périodes journalières, hebdomadaires, voire saisonnières. Parmi les facteurs prépondérants, nous pouvons citer plus particulièrement les variations de la tension électrique délivrée par le secteur ou celles de la température de l'air sur les appareils de mesure. L'analyse spectrale du bruit ou d'une « marée différence » (écart entre la hauteur mesurée et une marée théorique approchée) peut constituer un outil très utile pour compléter la liste des composantes ou pour détecter les défauts éventuels de fonctionnement de l'instrumentation.

Un exemple caractéristique nous est fourni par un défaut de fonctionnement du marégraphe à flotteur de Brest entre les années 1953 et 1978. Le système d'entraînement du tambour n'assurant pas une rotation parfaitement uniforme, ce défaut se traduisait ainsi par une modulation cyclique journalière de l'échelle des temps de la courbe de marée (graphes du même type que celui de la figure 2.5). Cette anomalie a été mise en évidence par des raies spectrales apparaissant à des fréquences ayant des nombres arguments de Doodson valides. En effet, ce type de défaut introduit des modulations de la composante M_2 de la marée, donnant des vitesses angulaires identiques à $q_{M_2} \pm q_{S_1}$, qui sont affectées respectivement des nombres arguments 364 555 et 146 554. Mais il n'était pas possible d'interpréter ces variations cycliques, notamment par l'importance des amplitudes correspondantes, ni comme des ondes émanant du potentiel générateur, ni comme des composantes d'interactions non linéaires. Ces calculs ont également mis en évidence des amplitudes anormalement élevées aux fréquences correspondant aux ondes S_1 et S_3. Ces derniers résultats sont vraisemblablement dus aux mêmes effets de modulation induite par la vitesse du tambour sur la composante S_2.

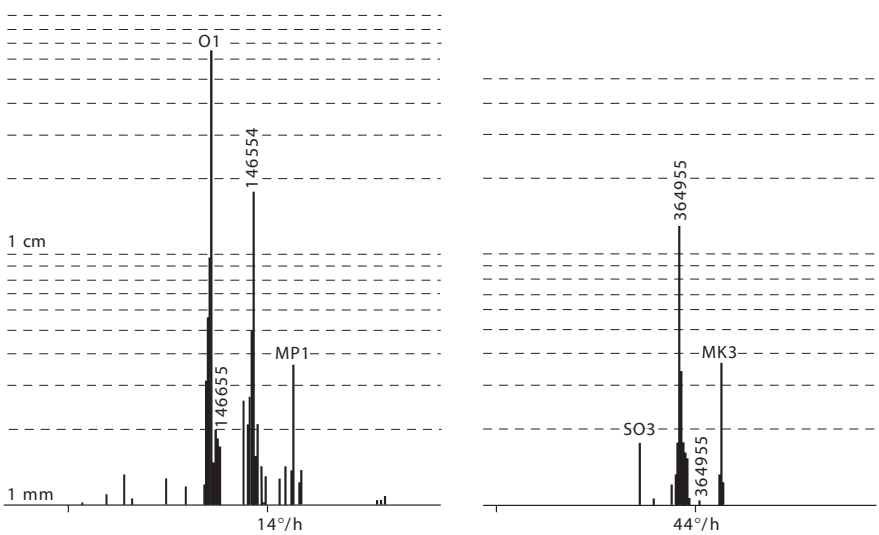


FIGURE 6.6 — Détection d'anomalies sur les mesures du marégraphe à flotteur de Brest (France) de 1953 à 1978 : les raies spectrales ayant pour nombres de Doodson 146 554 et 364 555 sont dues à un défaut de fonctionnement du mécanisme d'entraînement du tambour (variation cyclique journalière de la vitesse de défilement de la feuille d'enregistrement).

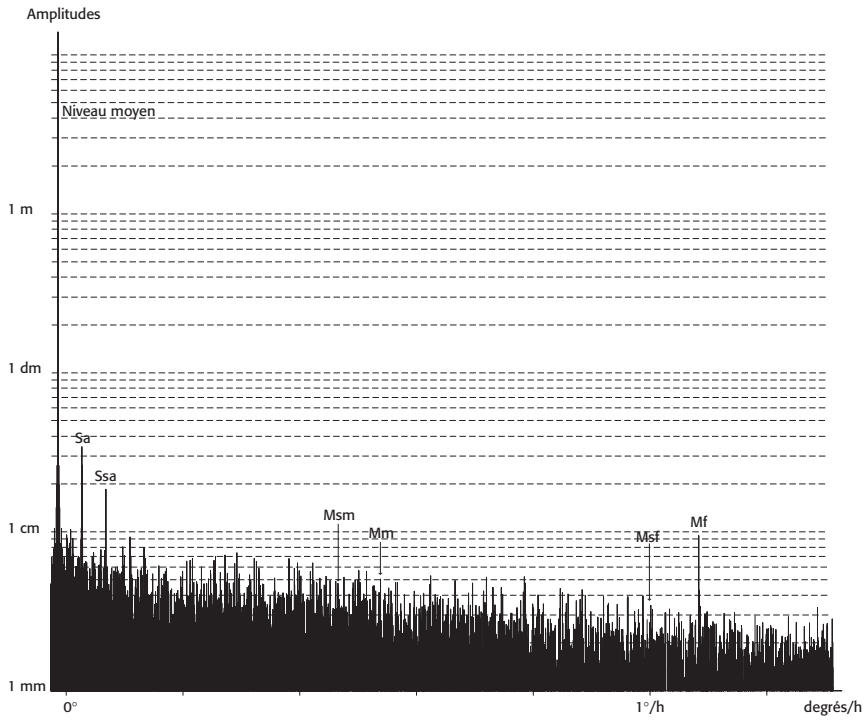


Figure 6.7 — Spectre de la marée à Brest dans le domaine des longues périodes : la structure très bruitée de ce spectre montre la difficulté de mettre en évidence les composantes harmoniques de la marée qui sont présentes dans cette bande de fréquences, notamment celles qui correspondent à Msm, Mm et Msf. Seules les ondes Sa (annuelle), Ssa (semi-annuelle) et Mf (bimensuelle) ont des composantes significatives.

Dans le domaine des basses fréquences, la figure 6.7 donne une illustration particulièrement intéressante de la nature bruit. Sans avoir recours à une estimation quantitative, il est évident que les amplitudes des composantes harmoniques Sa, Ssa et Mf sortent du bruit de fond et sont significatives dans cette partie du spectre. Toutes les autres, bien que présentes dans le potentiel générateur de la marée, se trouvent mêlées au bruit.

Il convient de noter que, dans le développement du potentiel générateur, la composante bimensuelle Mf est celle qui a le coefficient le plus important dans ce domaine des longues périodes. Cependant, en raison de leur faible coefficient dans le potentiel, les ondes Sa (annuelle) et Ssa (semi-annuelle) apparaissent avec des amplitudes inattendues. Leur présence est essentiellement liée aux effets « radiationnels ». Rappelons que les variations saisonnières, d'une part du rayonnement solaire et d'autre part des conditions météorologiques (champs de vents et de pression atmosphérique), se

manifestent sur l'évolution du niveau marin, par action directe (pression) ou indirecte (variation du niveau côtier selon le régime de vent ; dilatation de la couche l'eau superficielle). Ces effets sont généralement faibles sur les côtes de l'Atlantique Nord, mais sont plus importants par exemple dans les régions influencées par le régime des moussons. Ces influences sont beaucoup plus perceptibles dans les mers à faibles marées, à titre d'exemple, en Méditerranée, sur la côte provençale, l'onde Sa est du même ordre de grandeur que l'onde M_2 (une dizaine de centimètres).

En raison de la nature de leurs origines, les ondes Sa et Ssa ont des amplitudes qui ne sont pas constantes d'une année à l'autre. Ceci se traduit par un bruit spectral au voisinage des fréquences correspondantes. La détermination, avec une bonne précision, de leur amplitude et de leur phase moyennes nécessite de nombreuses années d'observations. Ces deux ondes, correspondant à des variations non négligeables du niveau marin, doivent être prises en compte dans les calculs précis de marée. Rappelons qu'elles constituent les composantes dominantes de la marée radiationnelle (incluse dans la définition de la marée théorique) et font partie ainsi de la liste des composantes harmoniques au même titre que celles qui sont issues du potentiel générateur de la marée. Parmi les autres composantes radiationnelles existantes et décelables, nous pouvons citer en particulier la composante solaire moyenne diurne S_1 qui a pour origine l'action des vents thermiques d'une part et, d'autre part, l'effet de la dilation diurne de l'eau superficielle sur le niveau marin. L'onde solaire semi-diurne principale S_2 a vraisemblablement une très faible composante radiationnelle, mais difficile à distinguer de la partie gravitationnelle généralement dominante.

Signalons enfin que ces ondes radiationnelles peuvent engendrer des interactions non linéaires avec les composantes gravitationnelles importantes, induisant notamment une modulation annuelle de l'amplitude de l'onde M_2. Dans ce cas, cette modulation apporte sa contribution aux deux raies spectrales de vitesses angulaires $q_{M_2} \pm q_{Sa}$, à la vitesse angulaire du périgée solaire près. Ces composantes, placées de part et d'autre de M_2 (parfois désignées par MA_2 et MB_2), sont symbolisées au Service hydrographique français par $M(KS)_2$ et $M(SK)_2$ avec les nombres arguments respectifs 256 554 et 254 556. Ces ondes font partie des composantes qui nécessitent une claire définition de leur origine, car elles sont indissociables de composantes du potentiel générateur. Ainsi, les modulations de M_2, par le bruit « météorologique » ou par les erreurs cycliques de mesure, rendent parfois la détermination de la partie gravitationnelle de ces ondes d'interaction très incertaine.

L'évolution du niveau marin en moyenne annuelle révèle un autre aspect du bruit dans le domaine des très basses fréquences. La plupart des

enregistrements de très longue durée T (plusieurs dizaines d'années) montrent une variation séculaire du niveau moyen annuel, notamment sur le site de Brest. Cette tendance se traduit dans la TFR par des composantes spectrales correspondant à la fréquence 1/T et à ses harmoniques. Or la TFR constitue une représentation fidèle du signal analysé sur cette durée. Mais, de fait, il s'agit d'une série de Fourier avec l'hypothèse implicite que la valeur T est la période du signal. Dans le cas d'une variation linéaire de ce niveau moyen sur la durée des mesures, cette évolution se traduirait par la série de Fourier de la fonction en « dents-de-scie » ayant pour période la durée des mesures. Ces composantes représentent évidemment des artefacts qu'il faut supprimer avant d'appliquer la TFR. Une des techniques consiste par exemple à corriger les hauteurs mesurées en éliminant la tendance. Celle-ci est généralement calculée par une régression linéaire appliquée aux niveaux moyens annuels mesurés.

Une autre source de bruit, très gênante, car souvent difficile à distinguer de la marée proprement dite concerne les erreurs systématiques dont font partie les mauvais calages en temps et en niveau, notamment pour les marégraphes à flotteur (chapitre II : partie 3.2).

En ce qui concerne le calage en temps, les erreurs sont assez facilement mises en évidence. La marée théorique, constituant elle-même une horloge très précise, permet d'établir une représentation temporelle dont la marée observée ne doit pas trop s'écarter. Il est ainsi possible de corriger les erreurs flagrantes, par exemple, à partir des écarts de phases journalières des vecteurs réduits des deux marées, théorique et mesurée. Mais bien que la technique soit parfaitement au point, il serait abusif d'ajuster systématiquement les observations sur une marée théorique pour deux raisons au moins : d'une part, cette dernière est elle-même issue des observations, et d'autre part il existe dans la variation du niveau une composante aléatoire qu'il n'est pas légitime d'éliminer.

Par contre, les erreurs de calage en hauteur sont plus difficiles à déceler. Les variations de niveau associées aux conditions météorologiques (vent et pression atmosphérique) sont parfois très importantes et masquent ainsi ce type d'erreur qui reste de l'ordre de quelques centimètres. Leur détection nécessiterait des études (rarement effectuées) portant sur les corrélations, soit entre le niveau observé et les conditions météorologiques relevées sur le site, ou soit entre les mesures simultanées recueillies sur le lieu à contrôler et dans un port voisin.

Ces sources de bruit, qui sont liées à l'ensemble du système de mesure, sont gênantes à cause de leur caractère systématique. Par contre, l'incertitude aléatoire (généralement centrée) attachée à la détermination de la

valeur d'une mesure individuelle ne présente généralement pas de difficulté. Par exemple, les mesures acquises à l'aide des systèmes automatiques posent le problème du bruit introduit par la numérisation de la mesure. En appelant A l'intervalle de la résolution numérique et M le nombre d'échantillons, il est démontré (Y. Desnoës, 1977) que l'imprécision résultante sur l'évaluation des constantes harmoniques serait de l'ordre de $A/\sqrt{3M}$. À raison d'un minimum de 24 mesures par jour, la valeur de M devient rapidement très grande et l'erreur correspondante devient négligeable.

4 • Analyse par la méthode des moindres carrés

Nous avons vu que la structure du filtre fréquentiel FT2(ν) (6.21), résultant de l'approximation d'ordre 2 de la hauteur réduite, donne des vecteurs réduits qui contiennent toutes les informations relatives à chaque espèce. Ainsi, l'analyse de chaque espèce k peut s'effectuer séparément à partir de séries de vecteurs réduits correspondants. Ces vecteurs, donnés par la relation (6.20), sont généralement calculés à intervalle de temps régulier t_c, au plus égal à 72 heures pour éviter un repliement du spectre. Dans cette partie du chapitre nous ne traitons qu'une espèce à la fois, ce qui nous permet, sans confusion possible, de supprimer l'indice k de l'espèce afin d'alléger les écritures.

Pour chaque espèce, nous obtenons une série limitée de vecteurs réduits. L'analyse harmonique peut alors s'effectuer selon deux méthodes principales, soit par la méthode des moindres carrés qui tient compte de la présence du bruit, ou soit par la TFR.

L'analyse harmonique par la méthode des moindres carrés consiste essentiellement à résoudre un système d'équations, dites « normales », après l'avoir bien conditionné afin qu'il ne soit pas indéterminé. Les fréquences des composantes du potentiel ou des ondes d'interaction (voir annexe C) sont des données du problème, les inconnues étant les amplitudes et les phases respectives.

4.1 • Le système des équations normales

En omettant l'indice k, le vecteur réduit donné par la relation (6.9) peut s'écrire pour l'instant t_m :

$$C(t_m) = \sum_i h_i e^{j(V_{0i} - g_i)} e^{j2\pi\upsilon_i t_m}. \tag{6.22}$$

Considérons pour une espèce déterminée, la série des vecteurs réduits calculés tous les t_c sur une durée $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_c$ et posons :

$$t_m = (m-1)t_c, \qquad \mathrm{C}(t_m) = c_m.$$
$$a_{m,i} = e^{j2\pi\upsilon_i t_m}, \qquad x_i = h_i e^{j(\mathrm{V}_{0i} - g_i)}. \tag{6.23}$$

La relation (6.22) devient alors :

$$c_m = \sum_i a_{m,i} x_i. \tag{6.24}$$

Jusqu'à présent les expressions des vecteurs réduits ont été établies en supposant des mesures de hauteur d'une marée parfaitement exacte. Dans la réalité, les mesures de niveau sont entachées d'erreurs. Après élimination des erreurs systématiques connues et des termes périodiques, autres que ceux de la marée, les vecteurs réduits c_n, calculés à partir des données ainsi corrigées, prennent en compte, outre les composantes de marée de l'espèce considérée, un terme aléatoire que nous symboliserons par :

$$b(t_m) = b_m. \tag{6.25}$$

Les précautions préalables, évoquées plus haut, tendent à conférer à ce terme aléatoire le caractère d'un bruit que nous supposons stationnaire, centré et gaussien. Bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, pour la simplicité de l'exposé nous le considérons comme un bruit « blanc » ; sa fonction de corrélation est un Dirac (au facteur près de la variance), c'est-à-dire nulle pour tout écart de temps sauf pour l'écart nul où elle a pour valeur la variance. La nature de l'hypothèse sur ce bruit est aisément acceptable pour les vecteurs réduits dont le pas d'échantillonnage temporel t_c est bien plus grand que celui des observations originales t_e. Ceci constitue un avantage supplémentaire pour la méthode des hauteurs réduites.

Désignons par M le nombre de vecteurs réduits c_m (p.m. : $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_c$) et par N le nombre de composantes harmoniques x_i (complexes) à calculer. En tenant compte du bruit (6.25), nous avons ainsi un système de M équations à N inconnues du type :

$$c_m = \sum_{i=1}^{i=\mathrm{N}} a_{m,i} x_i + b_m \tag{6.26a}$$

avec évidemment $\mathrm{N} < \mathrm{M}$. La méthode des moindres carrés consiste à rechercher la solution affectant au bruit un module minimum. En adoptant

le calcul matriciel, posons :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ c_M \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_M \end{bmatrix}$$

et le système d'équations (6.26a) peut ainsi s'écrire :

$$AX - C = -B. \tag{6.26b}$$

Le problème consistant à minimiser le bruit revient ainsi à minimiser la valeur du produit matriciel B^*B où l'exposant $*$ appliqué à une matrice signifie qu'il s'agit de la matrice adjointe, c'est-à-dire transposée et conjuguée.

Or, le produit matriciel B^*B s'exprime par :

$$B^*B = (AX - C)^* (AX - C) = X^*A^*AX - C^*AX - X^*A^*C + C^*C, \tag{6.27}$$

et le minimum du bruit est ainsi obtenu pour :

$$d\left(B^*B\right) = \left(X^*A^*A - C^*A\right) dX - dX^* \left(A^*AX - A^*C\right) = 0 \tag{6.28}$$

En notant l'équivalence des matrices suivantes :

$$\left(X^*A^*A - C^*A\right) = \left(A^*AX - A^*C\right)^*,$$

on obtient le système d'équations dites normales qui permettent de minimiser le produit B^*B. Ce système d'équations normales s'écrit donc :

$$A^*AX - A^*C = 0, \tag{6.29}$$

où X représente la solution matricielle du système linéaire de N équations à N inconnues.

Nous allons expliciter ci-dessous la formulation de l'équation matricielle (6.29). Le problème de sa résolution ne sera pas discuté en détail, mais la question du bon conditionnement du système mérite une attention particulière.

4.2 • Les critères de conditionnement du système

Dans le système (6.29), nous avons la matrice A (M lignes, N colonnes) de terme général $a_{m,n}$ et son adjointe A^* (N lignes, M colonnes) de terme

général $a^*_{m,i}$. Leur produit donne la matrice A^*A (N lignes, N colonnes) dont le terme général (n^e ligne, i^e colonne) s'exprime par :

$$\sum_{m=1}^{m=M} a^*_{m,i} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{m=M} e^{-j2\pi(\upsilon_i - \upsilon_n)t_m} \tag{6.30}$$

en rappelant que nous avons posé $a_{m,n} = e^{j2\pi\upsilon_n t_m}$.

La matrice A^*A est donc hermitienne, c'est-à-dire égale à son adjointe $\left(A^*A\right)^*$, et tous les termes de sa diagonale ($\upsilon_i - \upsilon_n = 0$) ont pour valeur M.

Ainsi, en désignant par Λ la matrice A^*A normée par M :

$$\Lambda = \frac{1}{M} A^*A \tag{6.31}$$

cette matrice, évidemment hermitienne, a tous ses termes diagonaux de valeur unité. En tenant compte de (6.30), l'expression de son terme général $\lambda_{n,i}$ (n^e ligne, i^e colonne) est donc :

$$\lambda_{n,i} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} e^{-j2\pi(\upsilon_n - \upsilon_i)t_m} \tag{6.32}$$

Nous avons vu que, souvent, la série des vecteurs réduits représente une suite de valeurs complexes tous les t_c. Comme nous avons défini $t_m = (m-1)t_c$, la relation (6.32) représente donc la TFR de la porte normée par sa largeur $T = Mt_c$ pour la fréquence $\upsilon_n - \upsilon_i$. Avec le symbolisme de la relation D.33.c (rappelée au début de ce chapitre en 1.1), le terme $\lambda_{n,i}$ peut donc s'exprimer par :

$$\lambda_{n,i} = \Lambda_{T,t_c}(\upsilon_n - \upsilon_i) = \frac{\Lambda_T(\upsilon_n - \upsilon_i)}{\Lambda_{t_c}}(\upsilon_n - \upsilon_i) \tag{6.33}$$

qui est le rapport des TFR des fonctions portes de largeurs respectives T et t_c à la fréquence $\upsilon_n - \upsilon_i$. Cette simplification ne peut être adoptée que si les observations ne comportent pas de lacunes.

Par ailleurs, en posant $\Phi = (1/M)A^*C$, le terme général de cette matrice ou vecteur (N lignes, une seule colonne) s'exprime par :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} a^*_{m,n} c_m = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} c_m e^{-j2\pi\sigma_n t_m} \tag{6.34}$$

qui est la valeur de la TFR de la série des vecteurs réduits c_m à la fréquence σ_n.

Avec les éléments ci-dessus définis, l'équation matricielle (6.29) devient :

$$\Lambda X = \Phi \tag{6.35a}$$

qui représente le système linaire de N équations à N inconnues, l'expression générale des équations étant :

$$\sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} \lambda_{i,n} x_n = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_i t_m}. \tag{6.35b}$$

Rappelons que, pour une espèce k déterminée, les paramètres c_m, x_i et υ_i représentent respectivement :

— le vecteur réduit à l'instant t_m de cette espèce : $c_m \Rightarrow \mathrm{C}_k(t_m)$;

— le vecteur (amplitude et phase) de sa composante i correspondante : $x_i \Rightarrow h_{ki} e^{i(\mathrm{V}_{0ki} - g_{ki})}$;

— l'écart entre la fréquence de la composante i et la fréquence centrale de l'espèce considérée $k/\mathrm{T_L}$: $\upsilon_i \Rightarrow (q_{ki}/2\pi) - (k/\mathrm{T_L})$

Au sein de chaque espèce k (0, longue période ; 1, diurne ; 2, semi-diurne ; 3, tiers-diurne ; etc.), la détermination des constantes harmoniques par la méthode des moindres carrés consiste donc à résoudre le système linéaire (6.35b), N étant le nombre de composantes x_i à calculer et M le nombre de vecteurs réduits c_m. On peut expliciter davantage le système (6.35b) en mettant en évidence le caractère hermitien de la matrice Λ avec $\lambda_{m,i} = \lambda^*_{i,m}$, soit :

$$\begin{aligned}
&x_1 + \lambda_{1,2} x_2 + \cdots + \lambda_{1,n} x_n \\
&\qquad + \cdots + \lambda_{1,\mathrm{N}-1} x_{\mathrm{N}-1} + \lambda_{1,\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_1 t_m} \\
&\lambda^*_{1,2} x_1 + x_2 + \cdots + \lambda_{2,n} x_n \\
&\qquad + \cdots + \lambda_{2,\mathrm{N}-1} x_{\mathrm{N}-1} + \lambda_{2,\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_2 t_m} \\
&\lambda^*_{1,n} x_1 + \lambda^*_{2,n} x_2 + \cdots + x_n \\
&\qquad + \cdots + \lambda_{n,\mathrm{N}-1} x_{\mathrm{N}-1} + \lambda_{n,\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_n t_m} \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \\
&\lambda^*_{1,\mathrm{N}-1} x_1 + \lambda^*_{2,\mathrm{N}-1} x_2 + \cdots + \lambda^*_{n,\mathrm{N}-1} x_n \\
&\qquad + \cdots + x_{\mathrm{N}-1} + \lambda_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_{\mathrm{N}-1} t_m} \\
&\lambda^*_{1,\mathrm{N}} x_1 + \lambda^*_{2,\mathrm{N}} x_2 + \cdots + \lambda^*_{m,\mathrm{N}} x_m \\
&\qquad + \cdots + \lambda^*_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}-1} + x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} c_m e^{-j2\pi\upsilon_{\mathrm{N}} t_m}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la résolution de ce système d'équations, remarquons simplement que si deux des composantes ont même fréquence, ce système

est complètement indéterminé. Sauf erreur, ce cas ne doit évidemment pas se présenter. Cependant, si deux des fréquences sont très voisines, nous sommes dans une situation proche de l'indétermination et les résultats ne sont pas obtenus avec une bonne précision. Il se pose donc la question du bon conditionnement du système.

Les représentations graphiques (figures 6.1 et 6.2) du spectre de la fonction $h_i(t) = \cos(2\pi\nu_i t)$, échantillonnée selon un même pas de temps mais sur des durées différentes, permet une approche intuitive pour traiter ce problème. Considérons donc deux ondes sinusoïdales de fréquences distinctes ($\nu_i \neq \nu_n$), échantillonnées sur un laps de temps T avec un pas t_e. Ces deux ondes admettent pour « vecteurs » respectifs $a_i e^{j2\pi\nu_i t}$ et $a_n e^{j2\pi\nu_n t}$. Dans le domaine limité par la fréquence de Nyquist ($0 < \nu < \nu_{\mathrm{N}}$), les spectres respectifs de ces vecteurs sont représentés par $a_i \left|\Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\nu - \nu_i)\right|$ et $a_n \left|\Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\nu - \nu_n)\right|$, fonctions continue de la fréquence. Dans le cas où l'écart fréquentiel $|\nu_i - \nu_n|$ serait égal à un multiple de $1/\mathrm{T}$, les deux composantes sont bien séparées. La position du maximum spectral d'un des signaux correspond à un zéro de l'autre et réciproquement. Par contre, avec un écart inférieur à la fréquence $1/\mathrm{T}$, les deux pics principaux auraient tendance à se confondre. Il est concevable alors qu'il soit difficile de les distinguer.

Afin d'éviter de rencontrer ce dernier cas de figure dans la résolution du système des équations normales, on adopte souvent le critère dit de Rayleigh. Pour tout couple de composantes i et n, appartenant à une espèce k déterminée (p.m. indice k omis ici dans les indices), ce critère consiste à ne pas prendre en compte l'une des composantes de fréquences respectives ν_i et ν_n (correspondant aux fréquences relatives υ_i et υ_n par rapport à la fréquence centrale de l'espèce considérée), si celles-ci ne satisfont pas la condition :

$$|\upsilon_i - \upsilon_n| > \frac{1}{\mathrm{T}} \tag{6.36}$$

En fait ce critère est très restrictif car nous avons vu que l'écart $|\upsilon_i - \upsilon_n| = 1/\mathrm{T}$ correspond à des valeurs nulles des spectres $\left|\Lambda_{\mathrm{T},t_c}(\upsilon - \upsilon_i)\right|$ ou de $\left|\Lambda_{\mathrm{T},t_c}(\upsilon - \upsilon_m)\right|$. Or, pour des écarts $|\upsilon - \upsilon_i|$ de l'ordre de $1/\mathrm{T}$ nous avons :

$$\left|\Lambda_{\mathrm{T},t_c}(\upsilon - \upsilon_i)\right| = \left|\frac{\mathrm{sinc}\,[(\upsilon - \upsilon_i)\mathrm{T}]}{\mathrm{sinc}\,[(\upsilon - \upsilon_i)t_c]}\right| \approx |\mathrm{sinc}\,[(\upsilon - \upsilon_i)\mathrm{T}]|\,, \tag{6.37}$$

du fait que $\mathrm{sinc}[(\upsilon - \upsilon_i)t_c] \approx 1$ quand $t_c = \mathrm{T}/\mathrm{M} \ll 1$.

En posant $\sigma = (\upsilon - \upsilon_i)\,\mathrm{T}$, fréquence normée par $\nu_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$ centrée sur υ_i, nous obtenons le spectre de la fonction porte normée $|\mathrm{sinc}(\sigma)|$. Le critère de Rayleigh se traduit alors par $|\sigma| = |\upsilon - \upsilon_i|\,\mathrm{T} > 1$. Or, au-delà de l'écart $|\sigma| = 1$, la valeur des deux premiers maximums secondaires du spectre de

cette porte est de 0,217 ; ils sont atteints pour $|\sigma| \approx 1{,}430$ (valeur proche de 1,5 pour laquelle $|\sin \pi\sigma| = 1$).

Si on accepte des écarts $|\sigma| > 1$, il n'y a pas de raison d'interdire ceux qui sont inférieurs à l'unité et donnant des valeurs de $|\mathrm{sinc}(\sigma)|$ inférieures aux deux maximums secondaires égaux à 0,217. Or cette dernière valeur est également atteinte par $|\mathrm{sinc}(\sigma)|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ pour $|\sigma| \approx 0{,}813$.

Le critère de Rayleigh peut donc être assoupli en arrondissant cette dernière valeur à 0,8. Ainsi on ne cherchera pas à résoudre le système pour tous les couples de composantes i et n de chaque espèce ne vérifiant pas la condition :

$$|\upsilon_i - \upsilon_n| = |\nu_i - \nu_n| > \frac{0{,}8}{\mathrm{T}}, \text{ ou } \mathrm{T} > \frac{0{,}8}{|1/\mathrm{T}_i - 1/\mathrm{T}_n|} \tag{6.38}$$

où T est la durée de la série des vecteurs réduits, $\mathrm{T}_i = 1/\nu_i$ et $\mathrm{T}_n = 1/\nu_n$ étant les périodes des deux composantes non séparées. Le respect de cette condition assure une diagonale dominante d'au moins 80% et un système qui peut être considéré comme bien conditionné.

Précisons enfin que ce critère n'est pas très strict. Il peut être interprété avec plus ou moins de rigueur suivant le niveau de bruit dans le domaine de fréquences analysé. Il faut garder à l'esprit, néanmoins qu'on aura intérêt, lorsque c'est possible, à choisir des périodes d'observations proches de multiples des périodes des composantes les plus importantes.

5 • Analyse par la TFR

La série des M vecteurs réduits d'une espèce k peut se traiter directement par la TFR. Revenons à l'expression (6.9) des vecteurs réduits C_k relatifs à l'espèce k. Chaque espèce étant traitée séparément, nous pouvons omettre l'indice k pour simplifier les écritures. En adoptant la même convention que précédemment pour définir x_i, soit $x_i = h_i e^{j(\mathrm{V}_{0i} - g_i)}$, il vient :

$$\mathrm{C}(t) = \sum_i h_i e^{j(\mathrm{V}_{0i} + 2\pi\upsilon_i t - g_i)} = \sum_i x_i e^{j2\pi\upsilon_i t}.$$

Nous choisirons le temps tel que $t = mt_c$ (noter le changement de convention avec 6.23) où t_c représente toujours la cadence de temps pour le calcul de 2 vecteurs réduits consécutifs d'une même espèce k, m étant le numéro d'ordre des échantillons variant de 0 à $\mathrm{M} - 1$. Par ailleurs, T étant la durée de la série, le pas de temps t_c sera choisi de telle façon que le théorème de Shannon soit respecté et que le nombre $\mathrm{M} = \mathrm{T}/t_c$ soit égal à une puissance de 2.

La TFR appliquée à la série des M vecteurs $C(mt_c)$ fournit les M/2 amplitudes complexes correspondant aux fréquences n/T avec $0 \leq n < M/2$, soit :

$$F_{T,t_c}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{t_c}{T}\sum_{m=0}^{m=M-1} C(mt_c)e^{-j2\pi\frac{n}{T}mt_c}. \tag{6.39}$$

Cette dernière relation devient avec la définition de $C(mt_c)$:

$$F_{T,t_e}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{M}\sum_i x_i \sum_{m=0}^{m=M-1} e^{-j2\pi\left[\left(\frac{n}{T}\right)-\upsilon_i)\right]mt_c}. \tag{6.40a}$$

En remarquant que les sommations en m, normées par M, sont les TFR des fonctions cycliques de vitesses angulaires $2\pi\upsilon_i$ échantillonnées dans la porte de largeur T, on en déduit :

$$F_{T,t_c}(n/T) = \sum_i x_i \Lambda^*_{T,t_c}(\upsilon_i - n/T) \tag{6.40b}$$

où la fonction $\Lambda_{T,t_c}(\sigma)$ est la transformée de Fourier (fonction continue de σ) de la porte normée de largeur T et échantillonnée tous les $t_c = T/M$. Cette dernière relation est à rapprocher de l'expression complète (6.5) de la TFR de $h(t)$ échantillonnée sur la durée T avec le pas de temps t_e.

Ainsi, avec les valeurs de n variant de 0 à $M/2 - 1$, on obtient un système de M/2 équations dont les inconnues sont les amplitudes et les phases des composantes harmoniques i de l'espèce k.

Il n'est pas utile de recourir à la méthode des moindres carrés pour résoudre ce système. Si N est le nombre d'inconnues, nécessairement égal ou inférieur à M/2, on ne retiendra dans le système à résoudre pour l'espèce k considérée que les N équations correspondant aux valeurs de n telles que, pour toute composante i, on ait :

$$\left|\upsilon_i - \frac{n}{T}\right| < \frac{1}{T}. \tag{6.41}$$

Cette procédure s'accompagne cependant d'une restriction. En effet, si deux composantes se rapportent à une même valeur de n, le système comporte deux lignes identiques conduisant à une indétermination. Ce cas peut être évité en veillant à ce que tout couple (υ_i, υ_j) de l'espèce k respecte le critère de Rayleigh (6.36), soit :

$$\left|\upsilon_i - \upsilon_j\right| > \frac{1}{T}. \tag{6.42}$$

Cette méthode n'est applicable qu'avec une série régulière de vecteurs réduits calculés avec un pas de temps constant t_c. En particulier, elle n'est pas utilisable si les observations comportent des lacunes. Son avantage réside

dans l'utilisation de la TFR qui permet de réduire notablement le temps de traitement. Notons que le critère de séparation est plus restrictif que pour la méthode des moindres carrés. Néanmoins, cette restriction est plus d'ordre technique que fondamental, et il est possible de concevoir des artifices de programmation permettant d'adopter le même critère que pour la méthode des moindres carrés.

6 • Conditions de séparation

Pour traiter l'ensemble du problème concernant l'analyse harmonique, il est nécessaire d'examiner les conséquences des conditions de séparation des composantes de marée. Il est alors commode pour résoudre cet aspect du problème d'exprimer les phases des composantes non séparées sous la forme de fonctions explicites des variables fondamentales utilisées dans le développement harmonique du potentiel générateur. Il faut cependant garder à l'esprit que cette procédure n'est qu'indicative et ne fournit de ce fait que des ordres de grandeur.

Lors de la définition de la formule harmonique de Doodson (5.7), l'argument astronomique V_i (d'une composante i de la marée) est exprimé en fonction des coefficients à affecter aux variables fondamentales et du nombre de $\pi/2$ à ajouter (ou retrancher) pour que V_i n'apparaisse que par son cosinus dans (5.7), soit :

$$\mathrm{V}_i = \overbrace{\overbrace{\overbrace{m_{\tau,i}\tau}^{\text{espèce}} + m_{s,i}s}^{\text{groupe}} + m_{h,i}h}^{\text{sous-groupe}} + m_{p,i}p + m_{\mathrm{N},i}\mathrm{N} + m_{p_1,i}p_1 + m_{\pi/2,i}\frac{\pi}{2}. \quad (6.43)$$

Par ailleurs, nous avons vu que les tableaux 5.3 et 5.4 donnent l'origine astronomique et l'agencement des variables fondamentales dans la formule (6.43) en fonction de l'ordre décroissant des vitesses angulaires respectives (ordre croissant des périodes). De plus, dans le tableau 5.4 apparaît l'ordre de grandeur ces vitesses angulaires rapportées à celle de l'angle horaire « civil lunaire » τ.

Rappelons les éléments principaux de ces paramètres astronomiques (les notations ÆH et LM correspondant respectivement à « angle horaire » et « longitude moyenne ») :

N°	Origine du paramètre	Symbole	Période
1.	ÆH « civil lunaire »	$\tau^\circ = 15^{(\circ/h)} t^{(h)} + h^\circ - s^\circ$	24,841 2 heures 1,035 050 jours
2. 3.	LM de la Lune LM du Soleil	s h	27,321 582 jours 365,242 199 jours 1 an
4. 5.	LM du périgée lunaire Opposée de la LM du nœud ascendant lunaire	p $N' = -N$	8,847 309 ans 18,612 904 ans
6.	LM du périgée solaire	p_1	20 940,2 ans 209,402 siècles

La différence des ordres de grandeur de ces périodes fondamentales (heures, jours, ans, siècles) nous permet de définir un certain nombre de règles pour séparer les composantes de marée.

Dans le cas d'une analyse harmonique par la méthode des moindres carrés, le critère donné par la relation (6.38) nous permet de fixer la durée minimale T_{min} des observations nécessaires pour séparer deux composantes. Cette durée est égale à :

$T_{min} = 22$ jours (valeur arrondie de $27{,}321 \times 0{,}8 \approx 21{,}9$) pour les composantes qui appartiennent à deux groupes voisins, se différenciant par le 2e chiffre de leur nombre argument ;

$T_{min} = 292$ jours ($365{,}242 \times 0{,}8 \approx 292{,}2$) quand elles appartiennent à deux sous groupes voisins, se différenciant par le 3e chiffre de leur nombre argument ;

$T_{min} = 7$ ans ($8{,}847 \times 0{,}8 \approx 7{,}1$), si les composantes ne diffèrent que par le 4e chiffre du nombre argument ;

$T_{min} = 15$ ans ($18{,}613 \times 0{,}8 \approx 14{,}9$), pour celles qui ne diffèrent que par le 5e chiffre du nombre argument.

À titre d'exemple, nous pouvons examiner les conditions de séparation de quelques ondes principales (voir tableaux 5.1 ou annexe D), les vitesses angulaires des composantes étant exprimées ici en cycles par jour (cpj) :

Les composantes M_2 (lunaire moyenne) et N_2 (elliptique lunaire majeure) ont pour arguments respectifs $V_{M_2} = 2\tau$ et $V_{N_2} = 2\tau - s + p$, l'écart de

vitesse angulaire est égal à $q_{M_2} - q_{N_2} = 1/27{,}32 - 1/(8{,}85 \times 365{,}24)$, soit 1/27,57 cpj ; il nous faut donc $T_{min} = 22$ jours ($27{,}57 \times 0{,}8 \approx 22{,}05$) pour séparer ces deux ondes ;

— Pour les ondes M_2 et S_2 (solaire moyenne : $V_{S_2} = 2\tau + 2s - 2h$), l'écart correspondant est $q_{S_2} - q_{M_2} = 2/27{,}32 - 2/365{,}24$, soit 1/14,16 cpj ; leur séparation nécessite une durée minimale $T_{min} = 12$ jours ($14{,}16 \times 0{,}8 \approx 11{,}32$) ;

— Pour S_2 et K_2 (déclinationnelle luni-solaire : $V_{K_2} = 2\tau + 2s$), la différence des vitesses angulaires est égale à $q_{K_2} - q_{S_2} = 2/365{,}2$, soit 1/182,6 cpj ; il faut donc un enregistrement minimum de $T_{min} = 146$ jours ($182{,}6 \times 0{,}8 \approx 146{,}09$) pour les séparer ;

— Les composantes S_2 et T_2 (elliptique solaire majeure : $V_{T_2} = 2\tau + s + p_1$) présentent, en négligeant la vitesse angulaire correspondant à p_1, un écart $q_{S_2} - q_{T_2} \approx 1/365{,}24$ cpj ; pour séparer ces deux éléments, une durée minimale $T_{min} = 292$ jours ($365{,}24 \times 0{,}8 \approx 292{,}19$) est requise pour les distinguer.

Chaque sous-groupe a reçu en général le nom de la composante la plus importante. La séparation de deux sous-groupes voisins nécessite une durée minimale de 292 jours d'observations.

Les conditions de séparation impliquant les longitudes moyennes du périgée lunaire (p) et du nœud ascendant ($N' = -N$) obligent à considérer des séries de mesures dont la durée doit être beaucoup plus importante (plusieurs années). Ce type de série est évidemment plus rarement disponible. Ainsi, en raison de la nécessité de disposer d'observations de très longues durées d'une part et, d'autre part, du fait que le développement de Darwin était incomplet dès l'origine de la méthode harmonique, le problème de la séparation des composantes concernées s'est présenté dans un contexte différent. Ce problème n'a donc pas été traité de la même façon, mais sans véritable raison fondamentale

Nous ne dirons pas grand-chose des conditions de séparation impliquant le périgée solaire (p_1). Ce cas ne se présente pas dans la pratique courante. En effet, les composantes éventuellement concernées ont de très faibles amplitudes. Par ailleurs, en raison de sa faible variation, la longitude moyenne du périgée solaire est considérée comme constante dans beaucoup d'applications.

Cependant, du fait de certaines interactions non linéaires, il existe des composantes dont la différence des arguments astronomiques ne fait intervenir que les paramètres lunaires p et N, avec pour valeur $|p - 2N|$. Ceci correspond à un écart de : $1/8{,}84 - 2/18{,}61 = 1/176{,}89$ cycles par an ; la séparation des composantes concernées nécessite alors une durée minimale

$T_{min} = 142$ ans ($176{,}89 \times 0{,}8 = 141{,}5$). Une telle durée d'observations est exceptionnelle. Elle est néanmoins disponible pour le site de Brest.

7 • Le conditionnement du système

Ainsi, l'application de la méthode des moindres carrées pour l'analyse harmonique exige une condition indispensable, celle d'assurer un bon conditionnement du système des équations normales pour sa résolution.

Puisque les fréquences de marée mal séparées introduisent des erreurs importantes sur les solutions obtenues, on se borne à ne calculer dans un premier temps que les composantes qui ont les coefficients les plus importants et qui satisfont aux critères de séparation sur la durée des observations disponibles. Les autres composantes, considérées comme des perturbations, sont évaluées après coup.

Prenons par exemple une composante majeure r mal séparée de sa voisine mineure i qui sera considérée comme une perturbation de la première. En termes de numéro d'ordre, nous supposons $i = r + 1$ Dans le système linéaire complet qui est déduit de (6.35b) pour chaque espèce k, on trouve à la ligne r :

$$\lambda^*_{1,r}x_1 + \lambda^*_{2,r}x_2 + \cdots + x_r + \lambda_{r,i}x_i + \cdots + \lambda_{r,N-1}x_{N-1} + \lambda_{r,N}x_N = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{m=M} c_m e^{-j2\pi\upsilon_r t_m}.$$

Sous cette forme, les composantes r et i ne pouvant être séparées, le système est évidemment mal conditionné. En éliminant ces composantes, on lui substitue le système où la ligne r devient :

$$\lambda^*_{1,r}x_1 + \lambda^*_{2,r}x_2 + \cdots + x'_r + \cdots + \lambda_{r,N-1}x_{N-1} + \lambda_{r,N}x_N = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{m=M} c_m e^{-j2\pi\upsilon_r t_m}. \quad (6.44)$$

La résolution de ce système ne fournit pas la valeur de l'inconnue recherchée x_r mais celle de $x'_r = x_r + \lambda_{r,i}x_i$, soit en tenant compte des conventions adoptées en (6.23) et de la relation (6.33) définissant les coefficients $\lambda_{r,i} = \lambda^*_{i,r}$:

$$\frac{x'_r}{x_r} = 1 + \frac{x_i}{x_r}\lambda_{r,i} = 1 + \frac{h_i e^{j(V_{0i}-g_i)}}{h_r e^{j(V_{0r}-g_r)}} \times \Lambda^*_{T,t_c}(\upsilon_i - \upsilon_r). \quad (6.45)$$

Selon les notations adoptées en (6.11a), (6.11b) et (6.8), l'argument astronomique $\mathrm{V}_j(t)$ à l'instant t d'une composante j appartenant à l'espèce k (omis ici dans les indices) a pour valeur :

$$\mathrm{V}_j(t) = \mathrm{V}_{0j} + q_j t = \mathrm{V}_{0j} + 2\pi(k/\mathrm{T_L} + \upsilon_j)t = \mathrm{V}_{0j} + 2\pi\nu_j t \tag{6.46}$$

où le symbole ν_j représente la fréquence $q_j/2\pi$.

Rappelons que $\Lambda_{\mathrm{T},t_c}(\upsilon_r - \upsilon_i) = \Lambda_{\mathrm{T},t_c}(\nu_r - \nu_i)$ et désignons par $t_{\mathrm{T}/2}$ l'instant défini par $t_{\mathrm{T}/2} = (\mathrm{T} - t_c)/2$, la relation (6.45) peut aussi s'écrire :

$$\frac{x'_r - x_r}{x_r} = \frac{h_i}{h_r} e^{-j(g_i - g_r)} \frac{\mathrm{sinc}\,[(\nu_i - \nu_r)\mathrm{T}]}{\mathrm{sinc}\,[(\nu_i - \nu_r)t_c]} e^{j[\mathrm{V}_i(t_{\mathrm{T}/2}) - \mathrm{V}_r(t_{\mathrm{T}/2})]}. \tag{6.47}$$

Cet exemple ne fait intervenir qu'une seule perturbation, la relation peut être généralisé sans difficulté à un nombre quelconque de composantes i non séparées d'une composante majeure r appartenant à une espèce k déterminée. On a alors :

$$\frac{x'_r - x_r}{x_r} = \sum_i \frac{h_i}{h_r} e^{-j(g_i - g_r)} \frac{\mathrm{sinc}\,[(\nu_i - \nu_r)\mathrm{T}]}{\mathrm{sinc}\,[(\nu_i - \nu_r)t_c]} e^{j[\mathrm{V}_i(t_{\mathrm{T}/2}) - \mathrm{V}_r(t_{\mathrm{T}/2})]}. \tag{6.48}$$

Afin d'évaluer la valeur de la perturbation relative, donnée par l'expression du second membre de (6.48), il est nécessaire de faire des hypothèses, d'une part sur la valeur du rapport des amplitudes h_i/h_r, d'autre part sur la différence des situations $(g_i - g_r)$.

À défaut d'autres informations, l'hypothèse la plus naturelle et la plus couramment admise est que le rapport des amplitudes h_i/h_r soit égal au rapport des coefficients correspondants $\mathrm{A}_i/\mathrm{A}_r$ du potentiel générateur :

$$\frac{h_i}{h_r} = \frac{\mathrm{A}_i}{\mathrm{A}_r}. \tag{6.49}$$

Cependant, si des constantes harmoniques précises, calculées sur une plus longue période, sont disponibles pour un site voisin, il est préférable de considérer que les rapports d'amplitude sont égaux dans les deux sites.

En ce qui concerne les hypothèses sur l'écart des situations $(g_i - g_r)$, rappelons que la situation représente le retard d'une composante de marée sur l'élément du potentiel correspondant. Les fréquences étant très proches, il est logique de considérer que les ondes de marées correspondantes présentent des écarts, souvent très proches et, dans la pratique, considérés comme nuls $(g_i - g_r \approx 0)$. Toutefois, lorsque les écarts de fréquences sont relativement importants, par exemple lorsque le problème de séparation concerne des composantes appartenant à des sous-groupes différents, il est préférable de

considérer la différence de situations proportionnelle à l'écart de fréquences. On a alors :

$$\frac{g_i - g_r}{\nu_i - \nu_r} = \mathrm{Q}. \tag{6.50}$$

Une première estimation du coefficient Q est obtenue à partir de résultats relatifs aux composantes calculées directement. Parfois, par approximations successives, on essaie d'améliorer la précision. Mais cette amélioration étant difficile à obtenir et le plus souvent illusoire, ceci fait que bien souvent on ne va pas au-delà de l'estimation faite.

8 • Calcul des facteurs nodaux

Dans le chapitre V, du fait de la perturbation de l'orbite lunaire par l'action de l'attraction solaire, nous avons vu que Darwin introduit dans son développement du potentiel (5.1) des « facteurs nodaux » pour chacune des composantes prises en considération à son époque. Pour la prédiction de la marée, il existe encore des logiciels qui utilisent les tables des facteurs nodaux, ceux-ci étant déterminés au milieu d'une année et considérés constants sur cette durée. Avec les moyens de calcul disponibles actuellement, cette méthode ne se justifie plus en raison de la possibilité de prendre en considération les facteurs nodaux instantanés.

Nous allons surtout examiner le cas des composantes dont le nombre argument diffère par le 5e chiffre. Ce cas est très important car il concerne les principales composantes lunaires qui subissent une modulation cyclique de période égale à 18,61 ans (révolution du nœud ascendant de la Lune).

Reportons-nous à l'annexe D et considérons par exemple la composante M_2 du potentiel générateur, dont les arguments (angulaire et littéral) sont $\mathrm{V}_{\mathrm{M}_2} = 2\tau$ et B ZZZ ZZZ. Dans ce dernier, la 7e lettre (Z) montre que la valeur de $\mathrm{V}_{\mathrm{M}_2}$ est associée à un cosinus ($m_{\pi/2,\mathrm{M}_2} = 0$). Le coefficient correspondant du potentiel (colonne PL de l'annexe D) est donc affecté d'un signe positif ($\mathrm{A}_{\mathrm{M}_2} = 0{,}908\ 120$). La composante, désignée par m_2 dans cette annexe, a pour argument littéral B ZZZ YZB ; elle est donc très proche de M_2. La dernière lettre (B) correspond à un coefficient négatif du cosinus ($m_{\pi/2,m_2} = 2$). Ainsi pour cette composante m_2 nous avons : $\mathrm{V}_{m_2} = 2\tau - \mathrm{N}$ et $\mathrm{A}_{m_2} = -0{,}033\ 830$.

Si les 15 années d'observations requises ($18{,}61 \times 0{,}8 \approx 14{,}9$), pour séparer ces deux composantes M_2 et m_2, ne sont pas disponibles, il est nécessaire d'appliquer la relation (6.47). Dans ce cas, nous pouvons adopter les conventions suivantes :

— les situations sont considérées égales ($g_{M_2} - g_{m_2} \approx 0$) en raisons des valeurs de fréquences qui sont extrêmement voisines ;

— en exprimant le temps en jours (T, étant la durée de la série des M vecteurs réduits : $T = Mt_c$), on désigne par $T_{M/2}$ le temps écoulé, entre le 1er janvier 2000 à midi (temps civil de Greenwich) et l'instant de la mi-série ; le début de la série se situe donc à l'instant $T_{M/2} - T/2$.

Par ailleurs, l'écart des vitesses angulaires, calculé en radians par jour (rad/j), est égal à :

$$2\pi(\nu_{m_2} - \nu_{M_2}) \approx -6{,}28/(18{,}61 \times 365{,}24) \approx -0{,}924 \cdot 10^{-5} \text{ rad/j}$$

Avec l'hypothèse (6.49) sur les amplitudes des ondes de marée correspondantes, il vient :

$$\frac{h_{m_2}}{h_{M_2}} = \frac{A_{m_2}}{A_{M_2}} = -\frac{0{,}033\ 830}{0{,}908\ 120} \approx -0{,}037.$$

La relation (6.48) s'exprime alors par (en notant que dans le calcul des sinus c'est le demi-écart des vitesses angulaires qui intervient) :

$$\frac{x'_{M_2} - x_{M_2}}{x_{M_2}} = -\frac{0{,}037}{M}\frac{\sin\left(0{,}462 \cdot 10^{-3}T\right)}{\sin\left(0{,}462 \cdot 10^{-3}t_c\right)}e^{-j(4{,}09+0{,}924\cdot 10^{-3}T_{M/2})}. \quad (6.51)$$

Remarquons que t_c est voisin de l'unité et que le sinus du dénominateur peut être assimilé à son argument, ce qui fait apparaître le produit $Mt_c = T$ et élimine l'influence de l'échantillonnage.

Si la durée d'observation est suffisamment courte, en pratique égale ou inférieure à une année, on peut également assimiler le sinus du numérateur à son argument, il en résulte :

$$\frac{x'_{M_2}}{x_{M_2}} \approx 1 - 0{,}037 \cdot e^{-j(4{,}09+0{,}924\cdot 10^{-3}T_{M/2})} = f_{M_2}e^{ju_{M_2}}. \quad (6.52)$$

Les paramètres f_{M_2} (toujours positif) et u_{M_2} constituent ce que l'on convient d'appeler les « corrections nodales » de Darwin (voir formule 5.1) de l'onde de marée M_2. Elles correspondent au facteur d'amplitude (f_{M_2}) et au déphasage (u_{M_2}) à appliquer à la composante M_2 pour tenir compte de la présence de l'onde m_2. Avec cette approximation souvent adoptée, la perturbation est assimilée à la perturbation instantanée correspondant à l'observation centrale de la série de mesures (instant $T_{M/2}$). Ce résultat n'est acceptable que pour les analyses harmoniques portant sur une durée inférieure ou égale une année. Au-delà de ce laps de temps, la précision se dégrade et la formule n'est pas applicable.

Avec les moyens de calcul actuels, cette approximation ne se justifie plus même pour des séries plus courtes. Dans tous les cas de figure, il est alors

préférable d'utiliser la formule complète qui donne la perturbation moyenne sur l'ensemble de la durée des observations.

Par contre, pour les prédictions, il est davantage recommandé de calculer les facteurs nodaux instantanés. Cela peut paraître une évidence, mais les anciennes habitudes étant bien ancrées, il existe encore (pour le calcul des annuaires de marée) des logiciels utilisant les tables de Darwin, donnant les facteurs nodaux correspondant à l'instant central de chaque année.

9 • Calcul des ondes d'interactions non linéaires

Le problème concernant la détermination des ondes de marées, résultant d'interactions non linéaires, est plus délicat à résoudre. Cette difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas de composantes correspondantes dans le potentiel générateur, qui puissent servir de support à l'hypothèse sur le rapport des amplitudes.

Dans ce cas, la méthode suivie repose sur la démarche suivante. Supposons que deux ondes de marées A et B soient perturbées respectivement par les composantes a et b. Les interactions non linéaires hydrauliques engendrent non seulement l'onde AB, mais aussi les ondes Ab, aB et ab.

En adoptant toujours les mêmes notations que dans les parties précédentes, l'écart relatif (valeur complexe) de la composante totale perturbée x_{AB}, rapporté à la plus importante des ondes d'interactions en présence, soit x_{AB} par exemple, peut s'exprimer par :

$$\frac{x'_{\mathrm{AB}} - x_{\mathrm{AB}}}{x_{\mathrm{AB}}} = \frac{x_{\mathrm{A}b}}{x_{\mathrm{AB}}} + \frac{x_{\mathrm{B}a}}{x_{\mathrm{AB}}} + \frac{x_{ab}}{x_{\mathrm{AB}}}. \tag{6.53}$$

Pour résoudre le problème, une hypothèse supplémentaire est cependant nécessaire. D'un point de vue hydrodynamique, on admet généralement que les amplitudes des ondes d'interaction sont proportionnelles aux amplitudes des composantes qui interagissent. Le terme d'amplitude étant pris ici au sens large, il s'agit de l'amplitude complexe c'est-à-dire le produit du module par l'exponentielle complexe de la phase. Le symbole $\propto$ indiquant la proportionnalité (réelle ou complexe), cette hypothèse supplémentaire nous permet d'écrire les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{AB}} &= \propto x_{\mathrm{A}} \cdot \propto x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{A}b} &= \propto x_{\mathrm{A}} \cdot \propto x_{b} \\ x_{\mathrm{B}a} &= \propto x_{\mathrm{B}} \cdot \propto x_{a} \\ x_{ab} &= \propto x_{a} \cdot \propto x_{b} \end{aligned} \tag{6.54}$$

En tenant compte de cette proportionnalité, on déduit de l'expression (6.53) :

$$\frac{x'_{\mathrm{AB}}}{x_{\mathrm{AB}}} = 1 + \frac{x_a}{x_{\mathrm{A}}} + \frac{x_b}{x_{\mathrm{B}}} + \frac{x_a x_b}{x_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{B}}},$$

soit encore :

$$\frac{x'_{\mathrm{AB}}}{x_{\mathrm{AB}}} = \left(1 + \frac{x_a}{x_{\mathrm{A}}}\right)\left(1 + \frac{x_b}{x_{\mathrm{B}}}\right). \tag{6.55}$$

Cette dernière relation est très importante car elle constitue la base du traitement des ondes d'interactions. Ainsi la correction à apporter à une composante d'interaction est égale au produit des corrections à appliquer aux composantes qui interagissent. En adoptant le même type de notation que pour les corrections nodales, nous obtenons le facteur d'amplitude et la phase de la correction à apporter, soit :

$$f_{\mathrm{AB}} e^{ju_{\mathrm{AB}}} = f_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}} e^{j(u_{\mathrm{A}} + u_{\mathrm{B}})}$$

Avec les hypothèses faites, cette règle s'applique quel que soit le degré d'interactions (double, triple,...). Elle est utilisée également pour les harmoniques supérieurs et pour les interactions faisant intervenir plusieurs fois la même composante. Nous avons par exemple :

$$f_{\mathrm{M}_4} e^{ju_{\mathrm{M}_4}} = f_{\mathrm{M}_2}^2 e^{j2u_{\mathrm{M}_2}}$$

$$f_{\mathrm{M}_6} e^{ju_{\mathrm{M}_6}} = f_{\mathrm{M}_2}^3 e^{j3u_{\mathrm{M}_2}}$$

$$f_{2\mathrm{MS}_6} e^{ju_{2\mathrm{MS}_6}} = f_{\mathrm{M}_2}^2 f_{\mathrm{S}_2} e^{j(2u_{\mathrm{M}_2} + u_{\mathrm{S}_2})}$$

L'analyse des longues séries disponibles a permis de vérifier l'exactitude des résultats obtenus par cette procédure. Cette détermination directe des ondes d'interaction valide ainsi *a posteriori* l'hypothèse (6.54) sur la proportionnalité des amplitudes complexes.

VII

Méthodes non harmoniques

1 • Introduction

La formule harmonique s'est imposée en raison de la précision qu'elle permet d'obtenir et de son aptitude à traiter tout type de marée, à l'exception des marées d'estuaire. Il faut cependant admettre que ce n'est pas très satisfaisant, car ces performances ne sont atteintes qu'au prix d'importants efforts de calcul avec un grand nombre de constantes harmoniques et de longues durées d'enregistrement.

L'argument de la précision est évidemment déterminant, mais il est utile de rappeler qu'avant la mise au point de la méthode harmonique, il existait déjà des tables de marée, élaborées à l'aide d'un nombre restreint de paramètres. La formule de Laplace en est un exemple. Avant l'avènement des ordinateurs, elle se montrait plus précise que la méthode harmonique pour le calcul de l'annuaire des côtes de France.

D'autres procédures existent et quelques exemples sont exposés dans ce chapitre. Ces méthodes sont surtout utilisées quand l'application de la méthode harmonique s'avère inadaptée, notamment dans les cas suivants :

— Pour les observations de courtes durées, le critère de séparation des composantes harmoniques de la marée nécessite des hypothèses sur les rapports des amplitudes et les différences de situations pour les composantes dont les périodes sont voisines. Ces hypothèses ne reflètent qu'approximativement la réalité, entraînant une perte de précision lorsque la durée des observations décroît, en raison de l'augmentation du nombre de composantes non séparées. L'application de la méthode harmonique exige une durée minimale d'observations égale à une demi-lunaison, soit approximativement 15 jours, mais la précision obtenue n'est pas optimale. Une année est

généralement considérée comme une durée d'observation raisonnable pour une analyse permettant des prédictions suffisamment précises qui puissent satisfaire les exigences de la navigation maritime.

— Pour les marées d'estuaire, l'analyse spectrale des hauteurs d'eau observées vers l'amont montre qu'au-delà des douzièmes-diurnes, une prolifération de composantes d'interaction rend impossible leur identification et donc l'application de la méthode harmonique.

— La cadence d'acquisition de certaines observations ne permet pas l'application de l'analyse harmonique. C'est le cas par exemple des relevés de niveau par lecture à l'échelle au voisinage des pleines et basses mers, ou des enregistrements de hauteur d'eau fonctionnant uniquement à la demande pour des travaux particuliers dans certaines zones portuaires (entretien et création de chenaux, balisage, dragage, dérochement,…).

Outre ces cas où la méthode harmonique est difficilement applicable, il existe des situations pour lesquelles les paramètres recherchés, comme les constantes de rattachement à un port de référence, peuvent être obtenus plus aisément par d'autres procédés. Pour l'étude d'un nouveau site, le principe de ces méthodes consiste généralement, à tirer parti de la connaissance préalable de la marée dans un port proche, appelé « port de référence » qui, dans le cas des estuaires, est situé de préférence près de l'embouchure. Par opposition, nous appellerons « port secondaire* » le site à étudier.

2 • Méthode des concordances

2.1 • Concordances en hauteurs des pleines et basses mers

La méthode des concordances se base sur une règle de bon sens. À une amplitude donnée de la marée au port de référence, correspondent une amplitude et un déphasage au port secondaire.

La proximité géographique n'est pas une condition restrictive pour l'application de cette méthode, cependant il faut que les marées des deux ports soient du même type. En effet, il est indispensable que les pleines mers (PM) et les basses mers (BM) du port de référence puissent être associées sans ambiguïté aux PM et BM correspondantes du port secondaire. Dans chaque port, l'âge de la marée joue un rôle important, car leur différence correspond approximativement au déphasage entre les deux marées et contribue à déterminer le choix des extremums à associer. Cela ne présente pas de difficulté pour les marées purement diurnes ou semi-diurnes. Mais pour les marées à forte inégalité diurne ou de type mixte, des écarts différents pour

les composantes diurnes et semi-diurnes peuvent entraîner des confusions et rendent cette méthode inapplicable.

Des « conditions de concordance » pourraient être recherchées a priori à partir des constantes harmoniques. Dans le cas général, ces constantes ne sont pas disponibles pour le port secondaire (c'est la raison essentielle de l'existence de cette méthode). L'exploitation, directe et empirique, des marégrammes disponibles au port secondaire donne généralement satisfaction sans difficulté par comparaison avec ceux du port de référence. De plus, cette procédure permet d'estimer l'incertitude sur les résultats obtenus.

La mise en œuvre de cette méthode consiste ainsi à rechercher graphiquement les relations entre les heures et hauteurs des PM et BM dans les deux ports. Quelques exemples d'application sont détaillés ci-dessous (figures 7.1, 7.2 et 7.3).

Le premier exemple concerne l'étude des concordances en hauteurs pour deux ports relativement éloignés (Brest et Le Havre, distants de plusieurs centaines de kilomètres, France). Les deux sites ont une marée de type semi-diurne. Cependant les interactions non linéaires, inexistantes à Brest (port de référence), sont nombreuses au Havre (port secondaire, voir spectre figure 6.3).

Dans le premier graphique (figures 7.1), l'abscisse de chaque point représente la hauteur d'une PM ou d'une BM au port de référence et l'ordonnée la hauteur de la BM ou PM qui lui est associée au port secondaire. En outre, chaque croix donne le barycentre des points, calculé sur des intervalles de hauteur (du port de référence) choisis par l'opérateur. La répartition des points, autour de ces barycentres, permet d'estimer le degré de confiance sur les hauteurs des BM ou des PM au port secondaire en fonction des éléments correspondants du port principal. Les paramètres statistiques peuvent s'obtenir par une procédure de calcul systématique. Mais il est souvent suffisant, sinon préférable, de faire cette estimation directement sur le graphique. En effet, les traitements purement automatiques ne mettent pas en évidence certains types d'anomalies parfois présentes dans les observations de marée. Ces anomalies sont difficilement détectables sans l'examen visuel du graphique. L'exploitation de cette concordance des hauteurs est très simple : à chaque hauteur de PM ou BM du port de référence, correspond une meilleure estimation de la hauteur de la PM ou BM du port secondaire. De plus ce type de graphique permet d'établir la liaison entre les hauteurs de PM et BM de vive-eau et de morte-eau moyennes du port de référence et les niveaux correspondant au port secondaire.

La concordance étant destinée à permettre les prédictions de marée du port secondaire à partir de celles du port de référence, il est légitime de se

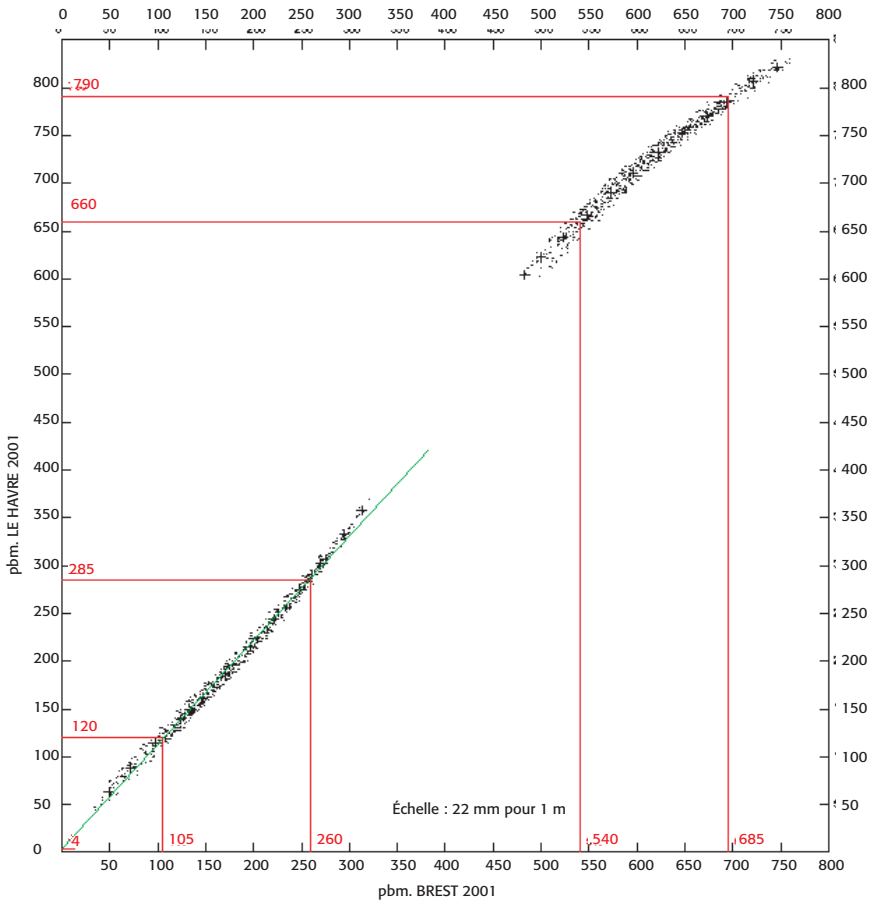


Figure 7.1 — Concordances en hauteurs (cm). L'axe des abscisses représente les hauteurs des PM et BM du port de référence en 2001 (Brest), les hauteurs correspondantes du port secondaire (Le Havre) sont portées en ordonnées. Les valeurs des hauteurs caractéristiques de Brest permettent de déterminer les valeurs correspondantes au Havre (droites de couleur rouge).

demander s'il ne faudrait pas effectuer la concordance à l'aide des prédictions, de préférence aux observations du port de référence. La réponse à cette question doit tenir compte du besoin de minimiser le bruit d'origine météorologique, responsable en partie de l'incertitude sur les résultats de la concordance. Ce bruit est surtout sensible dans le domaine des basses fréquences et se traduit essentiellement par une variation du niveau moyen journalier.

Le traitement est différent selon qu'il s'agit de ports proches ou éloignés, le critère de choix étant essentiellement affaire de jugement. Pour deux ports suffisamment proches, on peut considérer que les effets météorologiques

soient identiques. Il est alors possible d'utiliser les observations brutes. Dans les autres cas, il est préférable de procéder à un filtrage préalable pour éliminer les basses fréquences. Il convient alors de procéder aux opérations suivantes sur les observations relevées dans chaque port :

— Calculer la série des niveaux moyens journaliers centrés sur chaque hauteur observée (voir 4.1) ;

— Calculer le niveau moyen sur la durée des mesures au port secondaire (le niveau moyen étant *a priori* connu au port de référence) ;

— Corriger chaque hauteur observée de la différence entre le niveau moyen sur la durée des mesures et le niveau moyen journalier correspondant à cette observation ;

— Établir le graphique des concordances en hauteurs (PM et BM).

Dans le cas où des observations simultanées ne seraient pas disponibles (panne du marégraphe de référence, par exemple), il est toujours possible d'utiliser les PM et BM prédites au port de référence, en prenant soin d'annuler les composantes à longue période (essentiellement S*a* et S*sa*). Cette précaution est indispensable du fait que les mesures au port secondaire sont effectuées sur une durée relativement courte (avec un minimum de 15 jours cependant), et doivent subir le traitement précédent qui élimine les basses fréquences (notamment S*a* et S*sa*). Dans ce cas, la méthode des concordances ne donne pas la possibilité de prédire les composantes à longue période. Toutefois, l'introduction de ces composantes est possible a posteriori en adoptant celles du port de référence quand le port secondaire est relativement proche. Dans le cas contraire, il est nécessaire de prendre en compte cette lacune dans l'estimation de l'incertitude sur les résultats.

Il convient de noter que cette procédure, consistant à utiliser une prédiction du port de référence, ne doit être utilisée que dans les deux cas suivants :

— les observations au port de référence ne sont pas disponibles ;

— les observations simultanées existent, mais les variations des deux séries de niveaux moyens journaliers ne sont pas corrélées.

Pour établir une meilleure estimation du niveau moyen du port secondaire (sur la durée des mesures) dans le cas où les ports ne seraient pas très éloignés, il est toujours préférable dans la mesure du possible d'effectuer les concordances à partir des observations recueillies dans les deux ports, éventuellement réduites des composantes de longues périodes du port de référence.

2.2 • Concordance en heure pour le type semi-diurne

Dans le cas des marées de type semi-diurne, les pleines et basses mers de vive-eau (VE) et de morte-eau (ME) ont toujours lieu au voisinage de la même heure. La méthode utilisée pour la concordance en heure tire parti de cette propriété.

Les concordances en heures des PM et des BM aux ports de Brest et du Havre, sur la même période observations qui a permis d'établir les concordances en hauteurs (figure 7.1), sont représentées respectivement par les nuages de points des figures 7.2 (PM) et 7.3 (BM).

Dans ce type de représentation, chaque point a pour abscisse la valeur de l'heure d'une PM ou de BM au port de référence ayant lieu entre 0 heure et 12 heures, et pour ordonnée l'écart en temps des extremums associés. Comme précédemment, les barycentres des points obtenus dans des intervalles prédéfinis sont représentés par des croix.

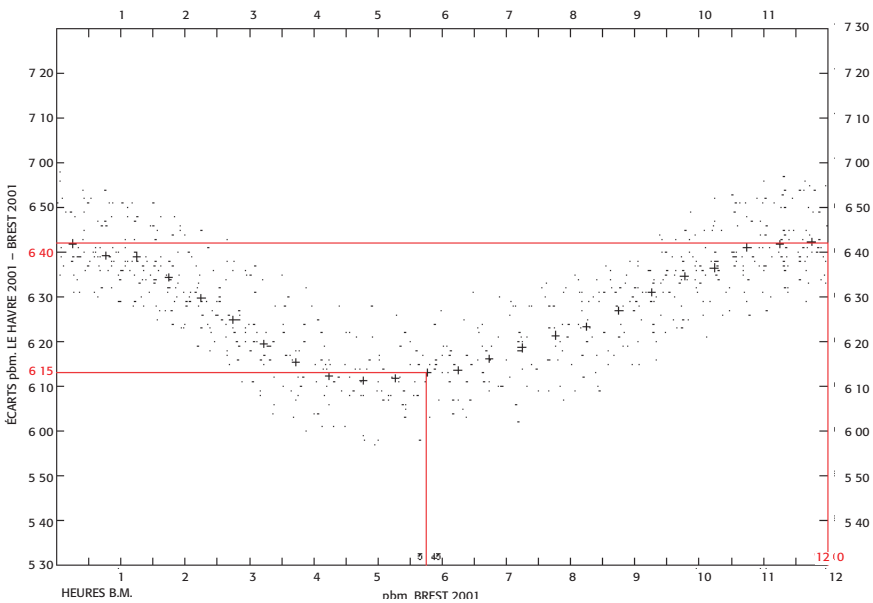


Figure 7.2 — Concordances en heures des basses mers (Brest et Le Havre).

On peut noter que la dispersion des points est ici plus importante que pour les hauteurs. Cette dispersion est liée en partie au fait que le relevé visuel de l'instant d'un extremum est toujours entaché d'erreur sur une courbe expérimentale (durée plus ou moins longue de l'étale), alors que relevé d'un extremum de hauteur est plus aisé à saisir. Malgré la prise en compte de cette cause d'erreur, la dispersion demeure importante et il n'existe pas de

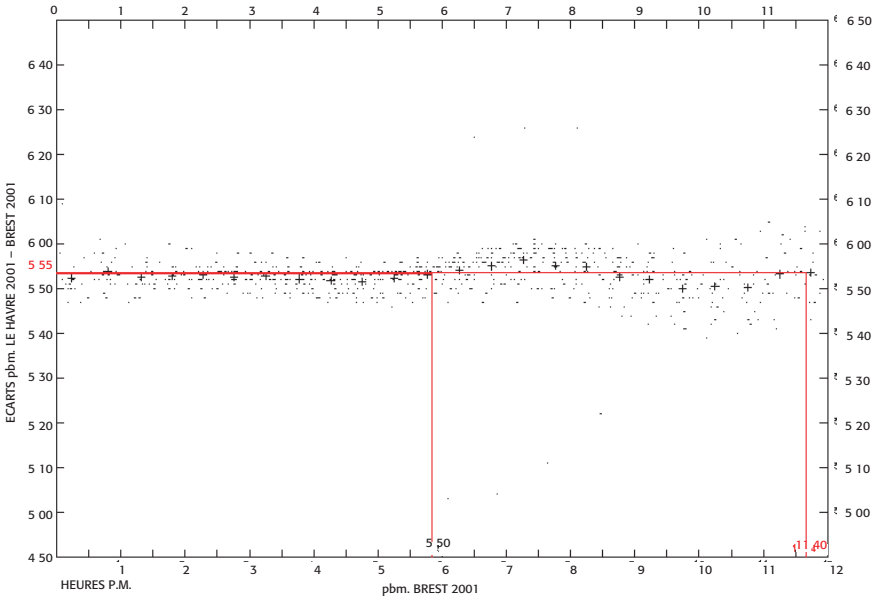


FIGURE 7.3 — Concordance en heures des basses mers (Brest, Le Havre).

relation simple entre les heures de PM ou BM du port de référence et les écarts correspondants avec le port de référence.

L'intérêt de cette représentation réside cependant dans la possibilité de trouver aisément, pour les heures des PM ou BM de vive-eau et de morte-eau du port de référence, les écarts correspondants pour le port secondaire. Ils sont repérés sur les figures par les points, intersections des droites de couleur rouge. Ce type de traitement est utilisé pour fournir, dans les annuaires de marée, les indications relatives à l'ensemble des ports qui sont rattachés à un même port de référence. En effet, cette méthode donne la possibilité d'obtenir les prédictions des PM et BM pour les ports rattachés, à partir de la prédiction des éléments correspondants dans les ports principaux. Pour les heures intermédiaires, autres que celles qui correspondent aux VE et aux ME, il n'est pas possible de donner une règle générale. À défaut d'indications plus précises, l'usage est d'adopter soit l'écart de VE, soit celui de ME, si leurs valeurs sont inférieures à deux heures, et de prendre leur moyenne pour des écarts supérieurs.

2.3 • Concordance en heure pour les autres types de marées

Lorsque la marée n'est pas purement semi-diurne, il n'est pas possible d'associer un déphasage à une heure de PM ou BM du port de référence.

L'application de la méthode des concordances exige que la correspondance entre une PM ou BM du port de référence soit établie sans ambiguïté à l'extremum correspondant du port secondaire. Si cette relation entre les extremums des deux ports est réalisable, il est alors possible (à l'aide éventuellement d'une représentation graphique) d'associer à ces hauteurs les écarts horaires correspondants. Pour les tables de corrections des annuaires, dans la majorité des cas, on n'indique que les écarts horaires des PM et des BM du port secondaire sans tenir compte de la hauteur de la marée.

2.4 • Courbe de marée

La méthode des concordances n'a été appliquée jusqu'ici qu'aux heures et hauteurs des pleines et basses mers. Si des cadences d'acquisition plus rapides sont disponibles, d'autres traitements, relevant aussi de cette procédure, sont alors possibles pour tenter de traiter la totalité des points de la courbe de marée du port secondaire.

Ainsi, il est possible d'établir des courbes types* lorsque l'on dispose par exemple d'enregistrements horaires au port secondaire. Le mode opératoire consiste à tracer sur un graphique la droite ayant pour ordonnée la hauteur d'une PM (ou d'une BM) du port de référence. Sur cette droite sont portés, heure par heure, les points ayant pour abscisses les hauteurs du port secondaire, rapportées à l'extremum correspondant (PM ou BM). Pour un cycle semi-diurne, ces points sont ainsi distribués de -6 heures à $+6$ heures autour l'extremum associé du site secondaire.

L'application de cette procédure est subordonnée à l'existence de mesures suffisamment nombreuses pour permettre une bonne détermination. Mais alors dans ce cas, le tracé des courbes types à l'aide des constantes harmoniques donne de meilleurs résultats.

3 • Méthode de la réponse

Dans l'analyse harmonique des observations du niveau marin, on ne recherche que le spectre de raies de la marée qui est une distribution de composantes ayant des fréquences connues et bien déterminées. Toute l'autre partie du signal, liée à l'action d'autres phénomènes, météorologiques ou océanographiques, présente un spectre continu qui, lui, est ignoré.

La méthode dite de la réponse, développée par Munk et Cartwright (1965), repose sur l'analyse du niveau marin considéré dans son ensemble. La hauteur d'eau $h(t)$ est traitée ici comme un signal représentant la réponse de la surface océanique (houle et vagues exclues) à une fonction d'excitation $\mathrm{U}(t)$

qui prend en considération l'ensemble des causes physiques pouvant agir sur le niveau marin (potentiel générateur de la marée, rayonnement solaire, pression atmosphérique, vent, etc.).

En raison de la non-linéarité de la réponse à la fonction d'excitation, la hauteur $h(t)$ se traduit par une série d'intégrales de convolution du type :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_n} w_n(\tau_1, \dots, \tau_n)\mathrm{U}(t-\tau_1)\dots \times \mathrm{U}(t-\tau_n)\mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n \quad (7.1)$$

Les fonctions w_n sont caractéristiques du point considéré et leur nombre est relativement limité par rapport à la méthode harmonique. Le premier terme $w_1(t) * \mathrm{U}(t)$ de cette expression correspond à la partie linéaire de la réponse, les autres permettant de prendre en compte les non-linéarités.

Dans la théorie du signal, le terme $w_1(t)$ représente la réponse impulsionnelle d'un système linéaire. Il est convenu d'appeler sa transformée de Fourier $a_1(\nu)$, la fonction de transfert du système ou admittance (complexe) :

$$a_1(\nu) = \int w_1(t)e^{-j2\pi\nu t}\mathrm{d}t.$$

Par extension, on définit les admittances a_n par :

$$a_n(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \int_{\tau_1} \cdots \int_{\tau_n} w_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)e^{-j2\pi\nu_1\tau_1} \dots \times e^{-j2\pi\nu_n\tau_n}\mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_n.$$

Le concept d'admittance permet ainsi une nouvelle approche pour la prédiction des marées. La sommation d'un grand nombre de composantes, que nécessite l'application de la méthode harmonique, est remplacée ici par l'application d'une fonction de réponse qui relie la cause (p.m. : potentiel générateur, potentiel radiationnel, actions diverses météo-océanographiques) à l'effet (les variations de hauteurs d'eau).

La fonction de réponse est calculée à l'aide des admittances. Les travaux de ces auteurs ont montré l'aptitude à prendre en compte les effets radiationnels et à fournir de bons résultats, généralement meilleurs que la méthode harmonique, mais seulement lorsque les effets non linéaires sont faibles, et au prix d'un effort de calcul que la légère amélioration apportée ne justifie pas.

La méthode de la réponse n'a jamais été utilisée pour le calcul des annuaires. Cependant la notion d'admittance, dont la signification physique est bien assimilée dans le traitement du signal, conserve la faveur de certains spécialistes.

Enfin, il est instructif de remarquer que cette méthode constitue une généralisation de la méthode de Laplace. D'un point de vue formel, le résultat de Laplace s'assimile à l'approximation linéaire appliquée aux trois premières espèces ($k = 0$, 1 et 2). Cette remarque nous conduit à examiner la méthode généralisée de la concordance par espèce.

4 • Concordance par espèce

La principale difficulté de la méthode de Munk et Cartwright provient de son ambition à traiter la totalité du spectre. Il en résulte une multitude d'opérations à effectuer qui deviennent rapidement irréalisables, particulièrement pour résoudre le problème des interactions non linéaires. Il n'en demeure pas moins que le concept est particulièrement intéressant ; rappelons qu'il consiste à rechercher la relation entre l'effet et la cause, avec possibilité de caractériser un site par un nombre restreint de paramètres, nettement inférieur à celui qui est requis pour l'analyse harmonique.

En ce sens, comme il a été signalé, cette méthode rejoint celle de Laplace qui consiste à déterminer la fonction de transfert par espèces, reliant le potentiel générateur à la hauteur d'eau. Le fait que Laplace limite l'application de sa formule aux trois espèces, représentant chacune un domaine étroit de fréquences, explique l'efficacité de la prédiction sur le site de Brest. La formule de Laplace a démontré ainsi son aptitude à fournir des très bons résultats avec des moyens de calcul rudimentaires. Cependant, son application n'est pas universelle ; cette faiblesse vient du fait que la fonction de transfert caractérise un système linéaire, donc inapte à engendrer des composantes d'interaction.

La méthode des concordances par espèces reprend l'idée de celle de la réponse, en partant de la même relation fondamentale (7.1) sous forme d'intégrales de convolutions multiples. Mais son efficacité, la rendant plus performante pour le calcul les convolutions multiples, vient du fait qu'elle ne traite que les bandes étroites de fréquences, contenant la totalité de l'énergie de la marée. Cette procédure ne constitue pas réellement une restriction, car seules ces bandes de fréquences sont utiles pour la prédiction. Le domaine de fréquences restant ne contient que du bruit qui par définition est imprédictible.

Une autre différence fondamentale avec la méthode de la réponse est le choix de la fonction d'entrée. Ses auteurs ont choisi très logiquement la force génératrice afin d'obtenir des relations ayant un caractère général. Cependant, ce choix est aussi source de difficulté, car la complexité de la

réponse de l'océan à l'excitation de la force se répercute sur la « fonction de réponse ». Il paraît ainsi plus judicieux de choisir une fonction d'entrée qui soit la plus voisine possible de la réponse.

Ces choix étant faits, la méthode des concordances par espèces s'est révélée efficace pour traiter les marées d'estuaires. Cette procédure est actuellement opérationnelle pour calculer l'annuaire de marée dans l'estuaire de la Gironde (France), de l'embouchure au Verdon jusqu'à Bordeaux, 90 km en amont (voir figure 1.8).

4.1 • Concordances par espèces : formulation de la méthode

Cette méthode a surtout été mise au point pour traiter les marées d'estuaire, l'analyse harmonique étant inapte à les prédire correctement.

Le concept de base repose sur deux constats :

— la marée à l'embouchure est peu déformée et peut être prédite sans difficulté par la méthode harmonique ;

— il existe une relation entre la marée à l'embouchure de l'estuaire et la marée en amont.

Désignons alors :

— la hauteur de la mer observée à l'instant t en un port de référence (R) situé à proximité de l'embouchure par $h_{\mathrm{R}}(t)$;

— et par $h_{\mathrm{S}}(t)$ le niveau observé au même instant en amont de l'estuaire sur un site déterminé que nous appellerons « port secondaire » (S).

En dehors d'autres contributions extérieures (fluviales ou atmosphériques), la relation la plus générale entre ces deux marées est donnée par la formule de convolution multiple semblable à (7.1) où $\mathrm{U}(t)$ est remplacé par $h_{\mathrm{R}}(t)$:

$$h_{\mathrm{S}}(t) = \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_n} w_n(\tau_1, \dots, \tau_n)\, h_{\mathrm{R}}(t-\tau_1) \dots \times h_{\mathrm{R}}(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1 \dots \mathrm{d}\tau_n$$

Reprenons la démarche qui a conduit à la méthode des hauteurs réduites. Nous avons vu que les résultats obtenus ont été très efficaces pour l'analyse harmonique. Cette procédure repose essentiellement sur les remarques suivantes :

— En raison de l'équivalence des deux distributions, spectrale et temporelle, du signal, le fait de se limiter aux bandes de fréquences étroites de la marée aboutit à la possibilité de ne prendre en considération qu'une quantité restreinte de données temporelles ;

— En outre, la possibilité de traiter les espèces séparément permet de transformer le problème global, difficile à résoudre dans son ensemble, en plusieurs calculs beaucoup plus simples.

La notion de vecteurs réduits de l'espèce k à l'instant t a été définie au chapitre VI par la formule (6.10) que nous rappelons ici :

$$h(t) = \frac{1}{2}\sum_k \left[\mathrm{C}_k(t) e^{j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} + \mathrm{C}_k^*(t) e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{T_L}} t} \right]$$

où $\mathrm{T_L}$ est la durée du jour lunaire. Les composantes d'une même espèce k (longues périodes, diurnes, semi-diurnes, etc.) sont toutes représentées par le vecteur d'expression complexe $\mathrm{C}_k(t)$ dont le module et la phase varient lentement avec le temps.

Désignons alors par $\mathrm{R}_k(t)$ et $\mathrm{S}_k(t)$ les vecteurs réduits de l'espèce k à l'instant t, respectivement au port de référence (R) et au port secondaire (S). Dans le cas d'une marée d'estuaire, si $\max k_{\mathrm{R}} + 1$ est le nombre d'espèces, décelées par la méthode harmonique, au port de référence situé à l'embouchure, le nombre $\max k_{\mathrm{S}} + 1$ au port secondaire est toujours nettement supérieur ($\max k_{\mathrm{S}} > \max k_{\mathrm{R}}$). À titre d'exemple, une douzaine d'espèces sont présentes dans le spectre de la marée au Verdon (embouchure de la Gironde), mais on en décèle trois fois plus à Bordeaux (90 km en amont).

La formulation, d'une part, de la convolution multiple en termes de vecteurs réduits et, d'autre part, l'identification (terme à terme) des coefficients relatifs aux exponentielles (complexes) nous conduisent à la relation qui nous donne $\mathrm{S}_k(t)$. Cette relation représente la somme des éléments suivants qui sont classés selon le nombre m de vecteurs réduits $\mathrm{R}_{n_i}(t)$ qui interagissent entre eux tels que :

$$\sum_{i=1}^{i=m} n_i = k. \tag{7.2}$$

Ainsi les termes de cette somme représentant $\mathrm{S}_k(t)$ sont :

$m = 1$: un seul vecteur réduit ($n_1 = k$; interaction nulle : $m - 1 = 0$) :

$$\int w_1(\tau)\mathrm{R}_k(t-\tau) e^{-j2\pi \frac{k\tau}{\mathrm{T_L}}} \mathrm{d}\tau;$$

$m = 2$: ensemble des paires telles que $n_1 + n_2 = k$ (interaction simple) :

$$\sum_{n_1+n_2=k} \iint_{\tau_1\tau_2} w_2(\tau_1,\tau_2)\mathrm{R}_{n_1}(t-\tau_1)\mathrm{R}_{n_2}(t-\tau_2) e^{-j2\pi \frac{n_1\tau_1+n_2\tau_2}{\mathrm{T_L}}} \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2;$$

$m = 3$: ensemble des interactions doubles telles que $n_1 + n_2 + n_3 = k$:

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=k} \iiint w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\mathrm{R}_{n_1}(t-\tau_1)$$
$$\times\, \mathrm{R}_{n_2}(t-\tau_2)\mathrm{R}_{n_3}(t-\tau_3)e^{-j2\pi\frac{n_1\tau_1+n_2\tau_2+n_3\tau_3}{\mathrm{T_L}}}\,\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_3.$$

La série se poursuit en prenant en compte toutes les interactions possibles. Le vecteur réduit $\mathrm{S}_k(t)$ du port secondaire peut alors s'exprimer sous une forme plus condensée par :

$$\mathrm{S}_k\,(t) = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \sum_{\Sigma n_i=k} \int_{\vec{\tau}} \left[\prod_{i=1}^{m} \mathrm{R}_{n_i}\,(t-\tau_i)\right] w_m(\vec{\tau})e^{-j2\pi\frac{\vec{n}\,\vec{\tau}}{\mathrm{T_L}}}\,\mathrm{d}\vec{\tau} \qquad (7.3)$$

Dans cette relation (7.3), rappelons que le paramètre m représente le nombre de vecteurs réduits $\mathrm{R}_{n_i}(t)$ interagissant entre eux, la somme des indices n_i satisfaisant la relation (7.2).

En outre, si $\mathrm{K_R} = \left\{-\max k_\mathrm{R},\ldots,0,\ldots,\max k_\mathrm{R}\right\}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs (correspondant aux fréquences centrales, positives ou négatives, des espèces du port de référence), nous avons pour tout n_i : $n_i \in \mathrm{K_R}$.

Quant aux vecteurs réduits $\mathrm{S}_k(t)$, ils sont calculés pour tout $k \in \left[0,\max k_\mathrm{S}\right]$. Ainsi, pour obtenir l'ensemble des interactions de tous les groupes de m vecteurs $\mathrm{R}_{n_i}(t)$, on effectue la somme de tous les produits possibles de m vecteurs réduits du port principal, dont les indices n_i remplissent la condition (7.2). Enfin, pour chaque ensemble $\{n_i\}$ satisfaisant à cette dernière condition, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ sont définis par les composantes respectives suivantes : $\vec{n} \Rightarrow (n_1,\ \ldots\ ,n_m)$ et $\vec{\tau} \Rightarrow (\tau_1,\ \ldots\ ,\tau_m)$.

4.2 • Concordances par espèces : hypothèses simplificatrices

Les formules ainsi établies pour le calcul des vecteurs réduits $\mathrm{S}_k(t)$ au port secondaire ne sont pas utilisables sans certaines hypothèses simplificatrices.

Une première hypothèse, désignée par les auteurs de la méthode de la réponse sous le nom de *credo of smoothness*, suppose que la relation entre la marée du port de référence et celle du port secondaire est une fonction lentement variable de la fréquence. Elle se traduit donc par des réponses impulsionnelles w_m très « pointues ». Dans le cas d'une impulsion réduite à une constante complexe (amplitude et phase constantes), on obtient un Dirac $\delta(t-\mathrm{d}_{i,m})$, pondéré par un coefficient constant complexe. Les d_{im}représentent les temps de retards du signal (le vecteur réduit en S) sur les différentes causes (ensemble des vecteurs réduits en R). En raison de la variation lente des vecteurs réduits, nous pouvons considérer les vecteurs $\mathrm{R}_{n_i}(t-\tau_{i,m})$ comme constants dans l'intervalle de définition des réponses

impulsionnelles $w_m(\ldots, \tau_{i,m}, \ldots)$. Ces vecteurs peuvent donc être sortis des intégrales de convolution.

Nous obtenons ainsi pour le vecteur réduit de l'espèce k au port secondaire S :

$$\mathrm{S}_k(t) = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{Q}_{m,k} \sum_{\Sigma n_i = k} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{R}_{n_i}\left(t - \mathrm{d}_{im}\right), \tag{7.4}$$

avec :

$$\mathrm{Q}_{m,k} = \int_{\vec{\tau}} w_m(\vec{\tau}) e^{-j2\pi \frac{\vec{n}\,\vec{\tau}}{\mathrm{T_L}}} \mathrm{d}\vec{\tau}$$

Dès lors, la seconde hypothèse simplificatrice s'appuie sur la signification physique des temps de retard d_{im} . Ils sont assimilables à des temps de propagations des différentes ondes. En réalité, dans les estuaires, la propagation des ondes est dispersive et la vitesse de propagation apparente dépend de la fréquence. Mais, en raison de la variation lente des vecteurs réduits, des valeurs précises des d_{im} ne sont pas nécessaires. On admet généralement qu'ils sont tous égaux à un retard constant d_{RS}, pour un couple de ports (R, S), dont l'évaluation est faite par une moyenne de mesures approximatives du temps de propagation des extremums de la marée entre les ports R et S. La comparaison entre les mesures et les prédictions en S, faites à partir des $\mathrm{R}_{n_i}(t - \mathrm{d}_{\mathrm{RS}})$, montre qu'une valeur précise de cette durée d_{RS} n'est pas requise ; ce qui justifie *a posteriori* cette deuxième hypothèse.

Ainsi avec ces deux hypothèses, l'expression finale du vecteur réduit $\mathrm{S}_k(t)$ de l'espèce k du port secondaire à l'instant t, se traduit par la formule suivante :

$$\mathrm{S}_k(t) = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{Q}_{m,k} \sum_{\Sigma n_i = k} \prod_{i=1}^{i=m} \mathrm{R}_{n_i}\left(t - \mathrm{d}_{\mathrm{RS}}\right) \tag{7.5}$$

Dans un premier temps, le calcul des vecteurs réduits issus des mesures dans les deux ports, nous fournit un système d'équations qui permet de déterminer les coefficients $\mathrm{Q}_{m,k}$ par la méthode des moindres carrés.

Une fois calculés, ces coefficients $\mathrm{Q}_{m,k}$ sont utilisés pour déterminer de manière plus précises les vecteurs réduits $\mathrm{S}_k(t)$ du port secondaire afin d'en établir les prédictions nécessaires. En effet, rappelons que l'hypothèse de départ pour cette méthode de concordance par espèces repose sur la possibilité d'avoir une très bonne prédiction de la marée au port de référence, et donc de calculer les vecteurs réduits $\mathrm{R}_{n_i}(t - \mathrm{d}_{\mathrm{RS}})$ intervenant dans la formule (7.5).

Cette méthode permet d'introduire des entrées supplémentaires et offre ainsi la possibilité de prendre en compte, par exemple, le débit $D_0(t)$ des cours d'eau, considéré ici comme une composante à longue période ($k = 0$).

4.3 • Concordances par espèces : applications

Nous examinons ci-après les deux principales applications de cette méthode par le Service hydrographique français : la prédiction des marées d'estuaires et le traitement des observations de courte durée à proximité des zones de sondage.

Dans ce type d'applications, afin de rendre les coefficients $Q_{m,k}$ adimensionnels, les vecteurs réduits (des paramètres pris en compte : hauteur de la marée, débit des cours d'eau, etc.) sont rapportés à leur module moyen sur la durée totale T des mesures prises en considération (opérateur $\overline{|x(t)|_T}$). Pour simplifier les écritures, nous convenons ainsi des correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} S_k &\Rightarrow S_k(t)/\overline{|S_k(t)|_T} \\ R_n &\Rightarrow R_n(t - d_{RS})/\overline{|R_n(t)|_T} \\ D_0 &\Rightarrow D_0(t)/\overline{|D_0(t)|_T} \end{aligned}$$

Les vecteurs réduits du port secondaire sont calculés pour l'instant t et ceux du port de référence à l'instant $t - d_{RS}$, la durée d_{RS} étant le temps nécessaire à la marée pour se propager du port de référence R au port secondaire S. En général, une valeur précise n'est pas nécessaire et un écart de l'ordre d'une heure n'entraîne pas de variations sensibles des résultats.

4.3.1 • Marées d'estuaire

Les exemples suivants ne concernent que les marées semi-diurnes. Le nombre maximum M de vecteurs réduits R_n interagissant entre eux est obtenu à partir de l'analyse spectrale au port secondaire.

Prenons par exemple le cas de la Seine : le port du Havre est le site de référence et Rouen le port secondaire où des composantes sont détectables jusqu'aux 36es diurnes. Cela signifie que la formulation doit inclure les interactions jusqu'au dix-huitième ordre pour R_2.

Dans les équations qui vont suivre, rappelons que l'indice affecté à tout vecteur réduit représente le numéro de l'espèce considérée. Pour le coefficient $Q_{m,k}$, le premier indice représente le nombre de vecteurs qui interagissent, le second est égal à la valeur de l'espèce k du vecteur S_k à calculer. Par ailleurs, il convient de noter que chaque interaction du vecteur réduit R_2 avec son conjugué R_2^* introduit une contribution proportionnelle à $R_2^* R_2$ d'espèce zéro ($k = 0$).

Il vient ainsi :

$$S_0 = Q_{0,0}R_0 + Q_{1,0}^{(D)}D_0 + \sum_{m=1}^{9} Q_{2m,0}|R_2|^{2m},$$

$$S_1 = \left[Q_{0,1} + Q_{2,1}|R_2|^2\right] R_1,$$

$$S_2 = \left[Q_{1,2}R_0R_2 + \left(Q_{1,2}^{(D)}D_0 + \sum_{m=1}^{9} Q_{2m+1,2}\,|R_2|^{2m}\right)\right] R_2$$

$$S_3 = \left[Q_{0,3} + Q_{2,3}|R_2|^2\right] R_3,$$

$$S_{2n} = \left[Q_{1,2n}^{(D)}D_0 + \sum_{m=0}^{9} Q_{2m+n,2n}|R_2|^{2m}\right] R_2^n \quad (n > 1),$$

Dans cet exemple concernant la Seine, le débit du fleuve D_0 n'intervient que par son interaction du premier ordre avec les vecteurs réduits R_2^n. En revanche, l'application de cette méthode pour la Loire a nécessité la prise en compte des interactions du débit jusqu'au troisième ordre.

En amont de l'estuaire, l'application de cette méthode nécessite le calcul d'un grand nombre de coefficients dont la détermination précise s'avère souvent difficile. Dans le cas où la précision des termes d'ordre supérieurs est médiocre, on évite d'utiliser la formule complète.

Une bonne analyse suppose la prise en compte de toutes les situations possibles. Les observations à traiter devraient comporter tous les domaines d'amplitudes associés aux différentes valeurs du débit. Des observations comportant des valeurs extrêmes de débit (crue et étiage) sont particulièrement intéressantes. En pratique, une durée minimale d'une année de mesures (marée et débit) est nécessaire, mais plusieurs années sont souhaitables.

4.3.2 • Analyse de série de mesures de courtes durées

Dans le cas d'observations en mer ouverte à proximité des côtes ou estuaires, des composantes harmoniques sont rarement détectées au-delà des dixièmes diurnes. La formulation est alors simplifiée et adaptée au type de marée.

Le développement, présenté ci-après à partir des formules (7.5), est utilisé pour les marées semi-diurnes. Il est le résultat en grande partie du fruit de l'expérience. Seuls sont pris en considération les vecteurs dont les inter-

actions engendrent des composantes connues. Le choix du port de référence (R) se portera sur celui, parmi les plus proches du site à étudier (S), qui dispose des composantes permettant la meilleure prédiction. Dans cette application, le débit fluvial n'intervient plus. Cependant, il est toujours possible de modifier les formules pour prendre en compte les paramètres météorologiques, vent et pression atmosphérique, par exemple. Rappelons que les vecteurs réduits normés S_k et R_n sont considérés respectivement aux instants t et $t - d_{RS}$, le terme d_{RS} est le temps de propagation de la marée de R vers S. On obtient ainsi pour une marée de type semi-diurne :

$$\begin{aligned}
S_0 &= Q_{0,0} + Q_{1,0}R_0 + Q_{2,0}R_2^*R_2,\\
S_1 &= Q_{1,1}R_1 + Q_{2,1}R_2R_1^* + Q_{3,1}R_2^*R_2R_1,\\
S_2 &= Q_{1,2}R_2 + Q_{2,2}R_0R_2 + Q_{3,2}R_2^*R_2^2,\\
S_3 &= Q_{1,3}R_3 + Q_{2,3}R_2R_1 + Q_{3,3}R_2^*R_2R_3,\\
S_4 &= Q_{1,4}R_4 + Q_{2,4}R_2^2 + Q_{4,4}R_2^*R_2^3,\\
S_6 &= Q_{1,6}R_6 + Q_{2,6}R_2R_4 + Q_{3,6}R_2^3 + Q_{5,6}R_2^*R_2^4\\
S_8 &= Q_{1,8}R_8 + Q_{2,8}R_4^2 + Q_{4,8}R_2^4 + Q_{6,8}R_2^*R_2^5,\\
S_{10} &= Q_{1,10}R_{10} + Q_{2,10}R_4R_6 + Q_{5,10}R_2^5 + Q_{7,10}R_2^*R_2^6.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Cette méthode s'est révélée particulièrement efficace pour traiter les mesures, d'une durée de l'ordre d'un mois. Elle est actuellement utilisée en routine par le Service hydrographique français pour traiter les observations obtenues à proximité des zones de sondages hydrographiques. Notons toutefois une restriction à cette utilisation : la proximité d'un point amphidromique diurne ou semi-diurne est incompatible avec le *credo of smoothness* et cette méthode est à éviter.

En ce qui concerne les prédictions au port secondaire, nous avons vu que cette méthode repose d'abord sur la connaissance préalable avec une bonne précision des constantes harmoniques du port de référence. À partir de ces éléments, il est possible de déterminer les vecteurs réduits $R_n(t)$.

Ensuite, à partir des mesures au site S, on détermine les vecteurs réduits à partir des hauteurs observées (voir chapitre VI). Les relations (7.6) établies ci-dessus permettent dans un premier temps de calculer les coefficients $Q_{m,k}$ (adimensionnels) par une méthode des moindres carrées. Les coefficients $Q_{m,k}$ ainsi obtenus sont rétablis dans leur dimension respective (les nouveaux $Q_{m,k}$ ont pour dimension $L^{-(m-1)}$, puissances inverses de longueur). Les mêmes relations (7.6) sont à nouveau utilisées pour calculer directement

les vecteurs réduits $S_k(t)$ du port secondaire à partir de ceux du port principal $R_n(t - d_{RS})$. Chaque étape étant réversible, il est possible, dès lors, d'établir les prédictions sur le site étudié.

En effet, les hauteurs réduites du site S sont calculées à l'aide de la TFR inverse à partir des $S_k(t)$. Rappelons que l'efficacité de la TRF est maximale si le nombre de valeurs M est une puissance de 2. On choisit habituellement $M = 2^7 = 128$ valeurs par jour lunaire $T_L = 24{,}8412$ heures, ce qui donne un pas de calcul $t_c = 11{,}64$ minutes.

Ainsi au port secondaire, la hauteur de la marée à l'instant $t = mt_c$, réduite à l'instant t_o (voir chapitre VI, relation 6.22), s'exprime par :

$$H(t_o, mt_c) = S_0(t_o) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=M/2-1} \left[S_k(t_o) e^{j2\pi \frac{k}{T_L} mt_c} + S_k(t_o) e^{-j2\pi \frac{k}{T_L} mt_c} \right].$$

Les hauteurs prédites sont finalement obtenues par interpolation parabolique (7.7) :

$$\begin{aligned} h(mt_c) = {} & H(t_o, mt_c) \\ & + \frac{t_o - mt_c}{2T_L} [H(t_o + T_L, mt_c) - H(t_o - T_L, mt_c)] \\ & + \frac{(t_o - mt_c)^2}{2T_L^2} [H(t_o + T_L, mt_c)] \\ & + [H(t_o - T_L, mt_c) - 2H(t_o, mt_c)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

On obtient ainsi 128 hauteurs prédites par jour lunaire, soit une hauteur toutes les 11,64 minutes, ce qui permet sans difficulté d'obtenir par interpolations les hauteurs pour une heure donnée, ainsi que les heures et hauteurs des PM et BM.

Ce procédé est utilisé pour les prédictions à partir des constantes harmoniques. Il est très efficace du fait que la contribution des composantes harmoniques n'est calculée qu'une fois par jour lunaire (aux instants t_o et $t_o \pm T_L$), au lieu de 128 fois si l'on voulait obtenir le même résultat par simple application de la méthode harmonique.

Notons enfin que les coefficients $Q_{m,k}$ (rétablis dans leur dimension propre) peuvent être utilisés pour calculer les constantes harmoniques du port secondaire. C'est particulièrement évident pour les coefficients $Q_{1,k}$ qui sont relatifs à la correspondance linéaire entre les mêmes ondes de marée des deux ports.

Nous allons voir par un simple exemple comment il est possible de tirer parti des autres coefficients $Q_{m,k}$. Prenons le cas de la détermination de la composante MS_4 au site secondaire S. Le coefficient $Q_{2,4}$ permet de calculer

la contribution des composantes semi-diurnes (luni-solaires) du port principal à la composante quart-diurne du site à étudier.

En désignant par le couple (h_i, g_i) les constantes harmoniques (amplitude et situation) d'une onde i au port de référence et par $(h_j^{\mathrm{S}}, g_j^{\mathrm{S}})$ celles d'une onde j au site secondaire, la composante MS_4 dans ce dernier lieu est ainsi déterminée par la relation :

$$h_{\mathrm{MS}_4}^{\mathrm{S}} e^{-jg_{\mathrm{MS}_4}^{\mathrm{S}}} = \mathrm{Q}_{1,4} h_{\mathrm{MS}_4} e^{-jg_{\mathrm{MS}_4}} + \mathrm{Q}_{2,4} h_{\mathrm{M}_2} e^{-jg_{\mathrm{M}_2}} h_{\mathrm{S}_2} e^{-jg_{\mathrm{S}_2}}$$

La connaissance des coefficients $\mathrm{Q}_{m,k}$ et des constantes harmoniques du port de référence permet ainsi de calculer aisément l'ensemble des constantes harmoniques du port secondaire.

VIII

Valeurs caractéristiques et composantes de marée

Les prédictions de hauteurs de marée ne sont pas les seuls besoins exprimés par les usagers d'un port. D'autres caractéristiques fondamentales constituent des renseignements complémentaires nécessaires à des applications particulières. Le calcul de ces caractéristiques était effectué traditionnellement avec des données obtenues à l'aide de moyens rudimentaires. Actuellement, la meilleure connaissance des constantes harmoniques et leur utilisation permettent de déterminer ces paramètres caractéristiques avec plus de précision.

Nous avons vu au chapitre V que les principales composantes harmoniques semi-diurnes (M_2, S_2, N_2 et K_2) et diurnes (K_1, O_1, P_1 et Q_1) contiennent l'essentiel du signal de marée, de l'ordre de 80 % à 90 %. La seule prise en compte de ces ondes permet de déterminer avec une bonne précision les caractéristiques fondamentales recherchées pour la marée d'un port déterminé.

1 • Étude des caractéristiques de la marée d'un port

1.1 • Principales caractéristiques de la marée semi-diurne

Le tableau 8.1 donne les caractéristiques des principales composantes semi-diurnes. Les coefficients sont ceux du potentiel générateur, rapportés au plus important, celui de la composante lunaire moyenne M_2.

Les arguments sont ceux du cosinus dans la formule harmonique de la marée. Pour plus de clarté, nous utilisons pour chaque composante i les

situations absolues κ_i. Ces éléments sont traditionnellement exprimés en degrés. Cependant le temps t est toujours exprimé en heure. Rappelons que l'emploi des situations absolues implique l'utilisation du temps civil local t (en heures).

Les paramètres h, s et p représentent respectivement les notations classiques des longitudes moyennes (longitude moyenne : en degrés d'angle sauf indication contraire) du Soleil, de la Lune et du périgée lunaire, le temps lunaire moyen s'exprimant en degrés par la relation : $\tau° = 15^{°/h} t^h + h° - s°$. Par ailleurs, les vitesses angulaires de ces différents paramètres, ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t &= q_{\mathrm{M}_2}/2 \approx 14{,}492°/h, \\ \mathrm{d}s/\mathrm{d}t &\approx 0{,}549°/h, \\ \mathrm{d}h/\mathrm{d}t &= q_{Sa} \approx 0{,}041°/h, \\ \mathrm{d}p/\mathrm{d}t &\approx 0{,}004°/h, \end{aligned}$$

avec q_i vitesse angulaire (exprimée ici en °/heure) de la composante i. Pour la marée semi-diurne, nous allons définir ainsi un certain nombre de caractéristiques, tout particulièrement l'établissement moyen, l'âge de la marée, l'établissement d'un port (qu'il ne faut pas confondre avec l'établissement moyen) et les vives-eaux d'équinoxe.

1.1.1 • Marée moyenne semi-diurne : établissement moyen

Les coefficients du potentiel présentent une hiérarchie qui, sauf au voisinage des points amphidromiques, se retrouve dans les amplitudes des composantes correspondantes de la marée. Ainsi, les caractères fondamentaux de la marée semi-diurne sont imposés par l'onde M_2 dont l'amplitude est généralement dominante. Cette onde représente la marée engendrée par la Lune moyenne qui, rappelons-le, est l'astre fictif qui décrirait une orbite circulaire dans le plan de l'équateur à vitesse constante, le rayon et la période étant respectivement la distance moyenne et la période de révolution de la Lune réelle. Sa contribution à la marée totale est :

$$h_{\mathrm{M}_2}(t) = h_{\mathrm{M}_2} \cos(2\tau - \kappa_{\mathrm{M}_2}) \tag{8.1}$$

qui s'exprime aussi par :

$$h_{\mathrm{M}_2}(t) = h_{\mathrm{M}_2} \cos\left[30t + 2(h - s) - \kappa_{\mathrm{M}_2}\right].$$

Par définition de l'angle horaire « civil lunaire », les passages de la Lune moyenne dans le plan méridien supérieur ou inférieur du lieu correspondent aux valeurs de τ égales à un multiple de 180° : soit $\tau = 180°k$ avec k entier relatif. La relation (8.1) nous donne le maximum de l'onde M_2 pour

TABLEAU 8.1 — Principales composantes de la marée semi-diurne.

Symbole de la Composante	Coefficient relatif du potentiel	Nombre argument de l'onde de marée	Argument en degré (t en heures)
M_2	1,000	B ZZZ ZZZ	$2\tau - \kappa_{M_2} = 30t + 2(h - s) - \kappa_{M_2}$
S_2	0,466	B BXZ ZZZ	$2\tau + 2s - 2h - \kappa_{S_2} = 30t - \kappa_{S_2}$
N_2	0,192	B YZA ZZZ	$2\tau - s + p - \kappa_{N_2} = 30t + 2(h - s) - s + p - \kappa_{N_2}$
K_2	0,127	B BZZ ZZZ	$2\tau + 2s - \kappa_{K_2} = 30t + 2h - \kappa_{K_2}$

$\tau = (\kappa_{M_2}/2) + 180°k$, c'est-à-dire avec un retard, appelé établissement moyen (symbolisé par E_m et égal à κ_{M_2}/q_{M_2}), après le passage de la Lune dans le plan méridien. En tenant compte de la valeur de q_{M_2}, nous obtenons l'établissement moyen exprimé en heures par :

$$E_m = \kappa_{M_2}/28{,}984 \text{ heures.} \tag{8.2}$$

Notons que l'établissement moyen E_m ne fait intervenir que la composante M_2. Mais en raison du caractère dominant de cette onde, ce paramètre E_m est assez représentatif du retard de la pleine mer semi-diurne réelle par rapport au passage de la Lune dans le plan méridien (supérieur ou inférieur). Cette notion de retard, d'un caractère pratique évident, est bien antérieure à la méthode harmonique. Elle apparaît cependant ici comme un sous-produit de cette méthode.

1.1.2 • Vives-eaux semi-diurnes, âge de la marée, établissement d'un port

La composante solaire moyenne S_2 représente, tout comme M_2 pour la Lune, la marée engendrée par le Soleil moyen, astre fictif qui décrirait une orbite circulaire dans le plan de l'équateur à une vitesse constante, mais à la distance moyenne et avec la même période de révolution que le Soleil vrai.

Sa contribution à la marée totale est :

$$h_{S_2}(t) = h_{S_2} \cos(30t - \kappa_{S_2}) \tag{8.3}$$

Le passage du Soleil s'effectue à midi au méridien supérieur du lieu ($t = 12$ h) et à minuit au méridien inférieur ($t = 0$). La pleine mer de cette onde d'amplitude h_{S_2} suit ces passages de $\kappa_{S_2}/30$ heures. Ainsi les deux pleines mers quotidiennes de l'onde S_2 ont lieu chaque jour à $\kappa_{S_2}/30$ et à $\kappa_{S_2}/30+12$ heures locales et les basses mers à $\kappa_{S_2}/30 + 6$ et $\kappa_{S_2}/30 + 18$ heures locales. L'amplitude de S_2 étant sensiblement inférieure à celle de M_2, son action peut être interprétée comme une modulation de la composante lunaire moyenne. Leur superposition passe par un maximum lorsqu'elles sont en phase, c'est-à-dire lorsque :

$$30t + 2(h - s) - \kappa_{M_2} = 30t - \kappa_{S_2} \qquad \text{(modulo 360°)},$$

ce qui donne :

$$s - h = \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} \qquad \text{(modulo 180°)} \tag{8.4}$$

Les écarts des longitudes moyennes de la Lune et du Soleil vérifiant (8.4) définissent les vives-eaux semi-diurnes. De plus, lorsque $s = h$ (modulo 180°), le Soleil et la Lune sont situés dans le même plan méridien. Ces instants sont appelés syzygies. Ils correspondent aux Pleines Lunes (opposition) et

aux Nouvelles Lunes (conjonction). Ainsi, les vives-eaux suivent les syzygies avec un retard T_2, appelé âge de la marée semi-diurne. En tenant compte du fait que $2d(s-h)/dt = 1{,}016$, l'âge de la marée semi-diurne s'exprime en heures par :

$$T_2 \approx \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{1{,}016} \text{ heures}$$

Les mortes-eaux semi-diurnes ont lieu lorsque M_2 et S_2 sont en opposition de phase, c'est-à-dire lorsque :

$$s - h = \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} + 90° \qquad \text{(modulo 180°)}.$$

Les mortes-eaux suivent les quadratures (premier quartier et dernier quartier) avec le même retard T_2. Les vives-eaux et les mortes-eaux se suivent ainsi à intervalles réguliers égaux à :

$$\frac{180}{d(s-h)/dt} = \frac{180}{0{,}508} = 354{,}37 \text{ heures} \Rightarrow 14{,}77 \text{ jours}.$$

L'établissement du port est par définition l'heure de la pleine mer les jours de pleine et nouvelle lunes (syzygie) ; cette heure est comptée en temps vrai local, et s'entend de la pleine mer qui suit le midi vrai, c'est-à-dire la pleine mer du soir,. Selon que la syzygie a lieu à 0 heure du matin ou à 24 heures du soir, l'heure de la peine mer présente des écarts par rapport à une valeur moyenne. pour cette raison, on convient d'adopter pour la définition de l'établissement une syzygie ayant lieu à midi vrai. Cependant, la pleine mer ne coïncide pas avec la pleine mer de S_2. Elle est proche de celle de M_2, mais le déphasage de M_2 et S_2 variant très lentement ($q_{s_2} - q_{M_2} \approx 1{,}016°/h$), on peut admettre que ces deux ondes sont approximativement en phase au moment de la pleine mer. Ainsi, l'heure de la pleine mer est peu différente de la pleine mer de l'onde S_2.

Soit $h(t)$ la marée réduite aux ondes M_2 et S_2, nous avons :

$$h(t) = h_{M_2}\cos(q_{M_2}t - \kappa_{M_2}) + h_{S_2}\cos(q_{S_2}t - \kappa_{S_2})$$

La pleine mer a lieu à l'instant t_{pm} tel que :

$$\sin(q_{M_2}t_{pm} - \kappa_{M_2}) + \frac{q_{S_2}h_{S_2}}{q_{M_2}h_{M_2}}\sin(q_{S_2}t_{pm} - \kappa_{S_2}) = 0. \tag{8.5}$$

L'instant de la pleine mer de S_2 étant égal à $\dfrac{\kappa_{S_2}}{q_{S_2}}$, posons :

$$t_{pm} = \kappa_{S_2}/q_{S_2} + \delta t_0. \tag{8.6}$$

En faisant l'approximation :

$$q_{M_2}\delta t_0 \approx q_{S_2}\delta t_0,$$

nous déduisons de la relation (8.5) :

$$\tan q_{S_2}\delta t_0 \approx \frac{\sin\left[\kappa_{M_2} - (q_{M_2}/q_{S_2})\kappa_{S_2}\right]}{(q_{S_2}h_{S_2}/q_{M_2}h_{M_2}) + \cos\left[\kappa_{M_2} - (q_{M_2}/q_{S_2})\kappa_{S_2}\right]}. \qquad (8.7)$$

Le jour de la syzygie, nous avons $h = s$ (modulo 180°). La Lune et le Soleil passent ensemble dans le plan méridien du lieu (supérieur et/ou inférieur). Nous avons vu que l'heure approchée (8.6) de la pleine mer est $t_{pm} \approx \kappa_{S_2}/q_{S_2} = \kappa_{S_2}/30$ à δt_0 près. On appelle alors l'établissement E_P du port P, l'heure de la pleine mer un jour de syzygie qui aurait lieu à midi vrai. Ce paramètre s'exprime en heures à partir de la relation (8.6) avec δt_0 donné par l'approximation (8.7), soit :

$$E_P \approx \frac{1}{q_{S_2}}\Big\{\kappa_{S_2} + \arctan\frac{\sin[\kappa_{M_2} - (q_{M_2}/q_{S_2})\kappa_{S_2}]}{(q_{S_2}h_{S_2}/q_{M_2}h_{M_2}) + \cos[\kappa_{M_2} - (q_{M_2}/q_{S_2})\kappa_{S_2}]}\Big\}. \qquad (8.8)$$

Pour le calcul de E_P, on prend habituellement l'approximation de Laplace, soit : $q_{M_2}/q_{S_2} \approx 29/30$. E_p a une définition différente de E_m défini par 8.6, mais leurs valeurs sont proches.

1.1.3 • Vives-eaux semi-diurnes de périgée lunaire

Rappelons que l'onde de marée N_2 est appelée composante elliptique majeure ; elle est en phase avec l'onde M_2 lorsque (voir tableau 8.1) :

$$s - p = \kappa_{M_2} - \kappa_{N_2} \qquad \text{(modulo 360°)}.$$

Or $d(s - p)/dt \approx 0{,}545°/h$, cet événement a lieu avec un retard de $(\kappa_{M_2} - \kappa_{N_2})/0{,}545$ heures après le passage de la Lune à son périgée ($s = p$ modulo 360°). Ces deux ondes sont en opposition de phase avec le même décalage temporel par rapport à son passage à l'apogée ($s - p =$ 180° modulo 360°). La période de modulation est égale à :

$$\frac{360}{d(s-p)/dt} \approx \frac{360}{0{,}545} = 660{,}6 \text{ heures} \Rightarrow 27{,}5 \text{ jours}.$$

Cette valeur est à comparer à la période de succession des vives-eaux et des mortes-eaux (14,77 jours). Ainsi, lorsque l'onde N_2 tend à augmenter l'amplitude d'une vive-eau, la vive-eau suivante sera approximativement diminuée d'autant et réciproquement. Les ondes M_2, S_2 et N_2 sont en phase si l'on a simultanément :

$$s - h = \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} \qquad \text{modulo 180°}, \qquad (8.9a)$$

$$s - p = \kappa_{M_2} - \kappa_{N_2} \qquad \text{modulo 360°}. \qquad (8.9b)$$

En toute rigueur, un tel événement est impossible, car les différences de longitudes moyennes $s - h$ et $s - p$ n'ont pas de période commune. Si cette situation venait à se produire à une date déterminée, il faudrait attendre un temps infini pour qu'elle se réalise à nouveau. Cependant, remarquons que $h - p$, dont la période est voisine de 412 jours, varie lentement en comparaison de $s - h$, dont la période est voisine du mois (29,531 jours). En reformulant le système (8.9a 8.9b) en faisant apparaître explicitement $h - p$, il vient :

$$h - p = \frac{3\kappa_{M_2} - \kappa_{S_2} - 2\kappa_{N_2}}{2} \qquad \text{modulo } 180°. \tag{8.10a}$$

$$s - p = \kappa_{M_2} - \kappa_{N_2} \qquad \text{modulo } 360° \tag{8.10b}$$

Ce nouveau système (8.10a et 8.10b) peut recevoir l'interprétation suivante. Considérons l'instant où le Soleil passe au voisinage du périgée ou de l'apogée de l'orbite de la Lune, la différence $h - p$ satisfait la relation (8.10a). Dès lors, le moment de la vive-eau la plus proche de cette date correspond à un maximum d'amplitude des vives-eaux. En effet, la Lune passe alors au voisinage de son périgée et la différence $s - p$ vérifie (8.10a). Ces événements définissent les vives-eaux de périgée dont la période est égale à :

$$\frac{180}{\mathrm{d}(h-p)/\mathrm{d}t} = \frac{180}{0{,}036426} = 4941{,}43 \text{ heures } \Rightarrow 205{,}89 \text{ jours.}$$

1.1.4 • Vives-eaux d'équinoxe

Les éléments donnés dans le tableau 8.1 nous permettent d'exprimer la contribution de l'onde K_2 à la marée, soit par :

$$h_{K_2}(t) = h_{K_2} \cos\left(30t + 2h - \kappa_{K_2}\right), \tag{8.11a}$$

soit par :

$$h_{K_2}(t) = h_{K_2} \cos\left(2\tau + 2s - \kappa_{K_2}\right). \tag{8.11b}$$

L'argument du cosinus de K_2, s'écrivant de deux façons différentes, peut recevoir deux interprétations distinctes :

— Selon (8.11a), l'onde K_2 est considérée comme une modulation semi-annuelle (variant avec la déclinaison du Soleil qui a la période du paramètre $2h$) de l'onde S_2 ;

— Selon (8.11b), l'onde K_2 est une modulation de la composante M_2 variant avec la déclinaison de la Lune dont la période est de 13,66 jours (périodicité du paramètre $2s$).

Ainsi, l'onde K_2 a deux origines distinctes, l'une solaire, l'autre lunaire, ce qui justifie son appellation de « composante déclinationnelle luni-solaire ». Cette onde K_2 est également appelée onde sidérale car elle présente deux

pleines mers et deux basses mers par jour sidéral (période de rotation de la Terre).

Elle est en phase avec l'onde M_2 lorsque nous avons :

$$s = \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{M_2}}{2} \qquad \text{modulo } 180°.$$

À la différence des situations près, cela se produit lorsque la Lune passe au voisinage de l'équateur. Lorsque le Soleil est également au voisinage de l'équateur, c'est-à-dire aux moments des équinoxes, les vives-eaux correspondantes sont plus importantes. On a alors :

$$h = \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{S_2}}{2} \qquad \text{modulo } 180°$$

Ce sont les vives-eaux d'équinoxe. Notons que les composantes K_2 et S_2 ayant des périodes très voisines, leurs situations κ_{K_2} et κ_{S_2} sont généralement très voisines. En toute rigueur, la Lune et le Soleil ne passent jamais simultanément à l'équateur. Mais la longitude moyenne du Soleil h, ayant une période d'un an, soit 13,36 fois supérieure à celle de s, varie peu entre deux lunaisons. Il en résulte que la vive-eau la plus voisine de l'équinoxe a une amplitude très proche de celle de la vive-eau qui aurait lieu à l'instant de l'équinoxe même.

1.1.5 • Marée de vive-eau équinoxiale de périgée

Lorsque les ondes M_2, S_2, N_2 et K_2 sont en phase (cette situation ne peut être qu'approchée), il se produit une marée de vive-eau exceptionnelle, dite équinoxiale de périgée. Son amplitude est alors égale à la somme des amplitudes suivantes :

$$h_{M_2} + h_{S_2} + h_{K_2} \cos\left(2h + \kappa_{S_2} - \kappa_{K_2}\right) \\ \pm h_{N_2} \cos\left\{p - h + \left[(3\kappa_{M_2} - \kappa_{S_2} - 2\kappa_{N_2})/2\right]\right\}.$$

Le signe plus ou moins devant la contribution de la composante N_2 vient du fait que cette composante a alternativement une contribution positive ou négative, d'une vive-eau à la suivante.

1.2 • Principales caractéristiques de la marée diurne

Les principales composantes diurnes sont présentées dans le tableau 8.2 ; les coefficients sont ceux du potentiel générateur, rapportés au plus important qui est celui de la composante K_1.

Les nombres arguments sont ceux du cosinus dans la formule harmonique. Comme pour les ondes de la marée semi-diurne, les situations absolues κ_i sont utilisées en association avec le temps civil local t.

TABLEAU 8.2 — Principales composantes de la marée diurne (pour mémoire : $\tau^\circ = 15^{\circ/h} t^h + h^\circ - s^\circ$).

Symbole de la composante	Coefficient relatif du potentiel	Nombre Argument	Argument en degré de l'onde de marée (N.B. : t en heures)
K_1	1,000	A AZZ ZZA	$\tau + s + 90 - \kappa_{K_1} = 15t + h - \kappa_{K_1} + 90$
O_1	0,710	A YZZ ZZY	$\tau - s - 90 - \kappa_{O_1} = 15t + h - 2s - \kappa_{O_1} - 90$
P_1	0,331	A AXZ ZZY	$\tau + s - 2h - 90 - \kappa_{P_1} = 15t - h - \kappa_{P_1} - 90$
Q_1	0,138	A XZA ZZY	$\tau - 2s + p - 90 - \kappa_{Q_1} = 15t + h - 3s + p - \kappa_{Q_1} - 90$

La contribution de l'onde K_1 à la marée est :

$$h_{K_1} \cos(15t + h + 90 - \kappa_{K_1}) = h_{K_1} \cos(\tau + s + 90 - \kappa_{K_1}). \qquad (8.12)$$

Elle présente une pleine mer et une basse mer par jour sidéral (23 h 56 min). Comme pour l'onde K_2, les deux expressions de l'argument permettent deux interprétations différentes. Cette onde résulte de la superposition d'une composante solaire et d'une composante lunaire induites par les variations des déclinaisons respectives de la Lune et du Soleil. Pour cette raison, elle est dénommée « déclinationnelle lunisolaire ». En ce qui concerne l'onde O_1 dite « lunaire principale », sa contribution à la marée peut s'écrire :

$$h_{O_1} \cos\left(15t + h - 2s - \kappa_{O_1} - 90\right) = h_{O_1} \cos\left(\tau - s - 90 - \kappa_{O_1}\right). \quad (8.13)$$

Les formulations des arguments des cosinus, dans les seconds membres de (8.12) et (8.13), mettent clairement en évidence la symétrie des composantes du potentiel K_1 et O_1 par rapport à la composante « lunaire moyenne » diurne M_1 (en général très peu importante). Ainsi, tout comme la composante lunaire K_1, l'onde O_1 est induite également par les variations de déclinaison de la Lune.

On peut remarquer également que la composante P_1 dont la contribution à la marée est $h_{P_1} \cos(15t - h - 90 - \kappa_{P_1})$ est symétrique de K_1 par rapport à la composante solaire moyenne S_1. L'onde P_1 est induite par les variations de la déclinaison du Soleil comme la composante solaire de K_1.

Les déclinaisons de la Lune et du Soleil sont à l'origine des marées diurnes. Celle du Soleil varie, entre des extrêmes pratiquement constants $-23°26'21''$ et $+23°26'21''$.

En revanche, les extremums de la déclinaison de la Lune sont très variables en fonction de la position du nœud ascendant N. L'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur est maximale (28°36), lorsque le nœud ascendant est voisin du point vernal, et minimale (18°20) lorsque le point N est proche de l'équinoxe d'automne. Les amplitudes des composantes lunaires diurnes subissent donc une modulation de période égale à 18,613 ans, durée de la révolution du nœud ascendant sur l'écliptique de point vernal à point vernal (voir annexe B §2).

1.2.1 • Caractéristiques des vives-eaux diurnes

En raison de l'importance des coefficients des composantes K_1 et O_1 (voir tableau 8.1), les « vives-eaux diurnes » ont lieu lorsque les ondes K_1 et O_1 sont en phase. Les arguments des ondes de marée correspondantes nous donnent ainsi la condition :

$$s = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} - 90 \qquad \text{modulo } 180°$$

La vive-eau diurne a donc lieu, à la différence de situation près, au voisinage du passage de la Lune par ses tropiques ($s = 90$ modulo 180°). La valeur absolue de sa déclinaison est alors maximale.

Par contre, la morte-eau diurne a lieu au voisinage du passage de la Lune à l'équateur.

Les vives-eaux diurnes se succèdent ainsi tous les :

$$\frac{180}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{180}{0{,}549} = 327{,}85 \text{ heures} \Rightarrow 13{,}66 \text{ jours.}$$

Elles suivent le passage de la Lune à ses tropiques d'un intervalle de temps T_1, appelé « âge de la marée diurne » et égal à :

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\kappa_{\mathrm{K}_1} - \kappa_{\mathrm{O}_1}}{2\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\kappa_{\mathrm{K}_1} - \kappa_{\mathrm{O}_1}}{1{,}098} \text{ heures.}$$

La pleine mer ne coïncide généralement pas avec l'instant de la vive-eau diurne. Cependant l'écart entre ces deux événements est au maximum de 12 heures. Or la différence de phase des ondes K_1 et O_1, qui est nulle au moment de la vive-eau diurne, est relativement faible au moment de la pleine mer la plus proche. L'instant t_{pm} de la pleine mer (temps civil local) est donc peu différent de l'heure de la pleine mer de K_1 :

$$t_{pm} \approx \frac{\kappa_{\mathrm{K}_1} - h}{15} - 6 \text{ heures.}$$

Deux vives-eaux diurnes successives étant séparées de 13,661 jours (327,859 heures) et la vitesse angulaire $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ étant de 0,041°/h (0,985°/j) les heures des pleines mers avancent donc de $327{,}859 \times 0{,}041/15 \approx 0{,}90$ heure, soit de 54 minutes d'une vive-eau à la suivante. À partir des relations (8.12) et (8.13), la marée réduite aux deux ondes K_1 et O_1 aux instants t_{ved} de vives-eaux diurnes (ondes en phase) peut s'exprimer par (p.m. : argument du cosinus en degrés) :

$$h(t_{ved}) = (h_{\mathrm{O}_1} + h_{\mathrm{K}_1}) \cos\left\{\tau - \left[(\kappa_{\mathrm{K}_1} + \kappa_{\mathrm{O}_1})/2\right] + k \times 180\right\},$$

où le coefficient $k = 0$ lors du tropique boréal et $k = 1$ lors du tropique austral.

Le paramètre $\mathrm{E} = (\kappa_{\mathrm{K}_1} + \kappa_{\mathrm{O}_1})/2$ est parfois désigné par le terme « établissement diurne ».

1.2.2 • Caractéristiques des vives-eaux diurnes de solstice

La contribution de l'onde P_1 à la marée peut s'exprimer par :

$$h_{\mathrm{P}r_1}(t) = h_{\mathrm{P}_1} \cos(15t - h - \kappa_{\mathrm{P}_1} - 90).$$

Ainsi, les ondes K_1 et P_1 sont en phase lorsque

$$h = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{P_1}}{2} - 90 \qquad \text{modulo } 180°.$$

À la différence des situations près, généralement petite pour ces deux composantes de périodes voisines, cela se produit au voisinage des solstices, soit :

— $h = 90°$ pour le solstice d'été,

— $h = 270°$ pour le solstice d'hiver.

Au moment des équinoxes ($h = 0°$ à l'équinoxe de printemps et $h = 180°$ à l'équinoxe d'automne), ces deux ondes sont en opposition de phase.

Les vives-eaux diurnes sont donc renforcées au voisinage des solstices et atténuées au voisinage des équinoxes.

Notons que les variations relatives des amplitudes se renforçant au voisinage de l'équinoxe, la marée diurne peut alors disparaître complètement au moment des mortes-eaux.

1.2.3 • Caractéristiques des vives-eaux de périgée

L'onde Q_1 est la composante elliptique majeure diurne. Elle est en phase avec O_1 lorsque nous avons :

$$s - p = \kappa_{O_1} - \kappa_{Q_1} \qquad \text{modulo } 360°$$

soit : $\dfrac{\kappa_{O_1} - \kappa_{Q_1}}{\mathrm{d}(s-p)/\mathrm{d}t} = \dfrac{\kappa_{O_1} - \kappa_{Q_1}}{0{,}545}$ heures après le passage de la Lune à son périgée ($s - p = 0°$ modulo $360°$). Ces deux ondes sont en opposition de phase avec le même décalage de temps après le passage cet astre à son apogée ($s-p = 180°$ modulo $360°$). Tout comme l'onde N_2 (elliptique majeure semi-diurne) vis-à-vis de la lunaire moyenne M_2 (8.10b), l'onde Q_1 se présente comme une modulation de O_1, lunaire principale, avec une période égale à :

$$360/\left[\mathrm{d}(s-p)/\mathrm{d}t\right] \approx 360/0{,}545 = 660{,}6 \text{ heures } \Rightarrow 27{,}52 \text{ jours},$$

valeur à comparer à la période de succession des vives-eaux et des mortes-eaux (13,66 jours). Si l'onde Q_1 tend à augmenter l'amplitude d'une vive-eau diurne, la vive-eau suivante sera approximativement atténuée d'autant, et réciproquement.

Considérons maintenant le cas où les trois ondes K_1, O_1 et Q_1 seraient en phase. Nous aurions :

$$s = (\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1})/2 + 90 \qquad \text{modulo } 360° \qquad (8.14a)$$

$$p = (\kappa_{K_1} + 2\kappa_{Q_1} - 3\kappa_{O_1})/2 + 90 \qquad \text{modulo } 360°. \qquad (8.14b)$$

En toute rigueur, cette réalisation est impossible, car les longitudes moyennes s et p n'ont pas de période commune. Si un tel événement avait

lieu à une date donnée, il faudrait attendre un temps infini pour qu'il se reproduise de nouveau. Cependant, nous pouvons remarquer que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t \ll \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, c'est-à-dire que la longitude moyenne du périgée lunaire p (période : 8,847 ans) évolue très lentement par rapport à celle de la Lune s (période : 27,321 jours).

Les expressions (8.14a) et (8.14b) peuvent recevoir alors l'interprétation suivante. Lorsque le périgée lunaire est voisin des solstices d'été ($p \approx h = 90°$) et d'hiver ($p \approx h = 270°$), ce qui se produit avec une périodicité voisine de 4,424 ans, les vives-eaux diurnes des solstices sont renforcées. Ces événements définissent les « vives-eaux de périgée diurnes ».

1.2.4 • Amplitude des vives-eaux diurnes

Avec l'ensemble des éléments définis précédemment, l'amplitude totale de la vive-eau diurne (passage de la Lune à ses tropiques) réduite à ses quatre principales composantes (K_1, O_1, P_1, et Q_1) s'exprime en première approximation par :

$$h_{K_1} + h_{O_1} - h_{P_1}\cos(2h + \kappa_{P_1} - \kappa_{K_1}) \\ \pm h_{Q_1}\sin\left\{p - \left[(\kappa_{K_1} + 2\kappa_{Q_1} - 3\kappa_{O_1})/2\right]\right\}$$

Le signe « $\pm$ » devant la contribution de l'onde Q_1 traduit le fait que cette composante a pour effet d'augmenter et diminuer alternativement les vives-eaux successives.

1.3 • Ondes d'interactions non linéaires

Il n'est pas possible de réaliser une étude exhaustive portant sur l'influence exercée par les ondes d'interactions sur les extremums de la marée. L'absence de linéarité introduit des facteurs complexes interdisant de formuler des règles générales. Il est cependant possible d'examiner, au moins qualitativement, l'influence des ondes quart-diurnes qui sont souvent prépondérantes.

La marée est le résultat de la superposition d'un grand nombre de composantes harmoniques. Cependant, durant un laps de temps relativement court (la journée par exemple), tout se passe sensiblement comme si elle était la somme des différentes espèces, chaque espèce étant représentée par une fonction sinusoïdale. Avec cette hypothèse, nous pouvons examiner le cas de la marée semi-diurne en présence de composantes d'interaction quart-diurnes, on pourra par exemple examiner la marée réduite aux ondes M_2 et M_4, représentatives des marées moyennes relatives à ces espèces soit donc :

$$h(t) = h_{M_2}\cos(2\tau - \kappa_{M_2}) + h_{M_4}\cos(4\tau - \kappa_{M_4}). \qquad (8.15)$$

Les extremums ont lieu pour les valeurs de τ telles que $\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t = 0$, soit :

$$h_{\mathrm{M}_2} \sin(2\tau - \kappa_{\mathrm{M}_2}) + 2h_{\mathrm{M}_4} \sin(4\tau - \kappa_{\mathrm{M}_4}) = 0. \tag{8.16}$$

Nous pouvons procéder par une première approximation en supposant que l'amplitude $h_{\mathrm{M}_4} \ll h_{\mathrm{M}_2}$. Avec cette hypothèse, l'extremum de la marée réduite aux ondes M_2 et M_4 est proche de celui de la marée $\mathrm{M}_2(\pm h_{\mathrm{M}_2})$.

Soit τ_{ex} la valeur de τ correspondant à un extremum de la composante M_2, nous avons alors :

$$\tau_{ex} = (\kappa_{\mathrm{M}_2}/2) + k \times 90°,$$

où le coefficient k est pair pour les pleines mers et impair pour les basses mers.

L'instant de l'extremum de la marée réduite (8.15) est tel que $\tau = \tau_{ex} + \vartheta$. La relation (8.16) devient ainsi :

$$(-1)^k h_{\mathrm{M}_2} \sin 2\vartheta + 2h_{\mathrm{M}_4} \sin(4\vartheta + 2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4}) = 0. \tag{8.17a}$$

Selon l'hypothèse de départ, l'écart ϑ doit être faible et la relation (8.17a) devient en première approximation avec ϑ exprimé en radians :

$$\vartheta[(-1)^k \frac{h_{\mathrm{M}_2}}{h_{\mathrm{M}_4}} + 4\cos(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}4})] + \sin(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}4}) \approx 0, \tag{8.17b}$$

ce qui donne la formule approchée pour ϑ en degrés :

$$\vartheta = -\frac{\sin(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4})}{(-1)^k \frac{h_{\mathrm{M}_2}}{h_{\mathrm{M}_4}} + 4\cos(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4})} \times \frac{180°}{\pi}. \tag{8.17b}$$

On vérifie *a posteriori* que l'hypothèse $h_{\mathrm{M}_2} \gg h_{\mathrm{M}_4}$ justifie l'approximation sur la faiblesse de l'écart ϑ. Cette dernière expression (8.17b) montre que les ondes quart-diurnes ont pour effet de modifier les heures des extremums de la marée semi-diurne. La correction à appliquer aux pleines mers (k pair) est opposée à celle qui est affectée aux basses mers (k impair).

Cette correction dépendant aussi de $\sin(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4})$, l'heure de la pleine mer est avancée ($\vartheta < 0$) ou retardée ($\vartheta > 0$) selon que le signe de $2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4}$ est positif ou négatif. Pour les extremums de la hauteur $h(t)$ donnée par (8.15), nous pouvons considérer qu'en première approximation nous avons :

$$h(\tau_{ex} + \vartheta) \approx h(\tau_{ex}),$$

ce qui donne :

$$h(\tau_{ex} + \vartheta) \approx (-1)^k h_{\mathrm{M}_2} + h_{\mathrm{M}_4} \cos(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4})$$

Il est important de noter que la correction de hauteur $h_{\mathrm{M}_4} \cos(2\kappa_{\mathrm{M}_2} - \kappa_{\mathrm{M}_4})$ a le même signe pour les pleines ou basses mers de l'onde M_2. Ce

résultat est important car il montre que la moyenne des extremums de la marée observée ne permet pas d'accéder à la moyenne des hauteurs $\overline{h(t)}$.

1.4 • Les différents types de marée

Dans le chapitre I concernant les généralités sur la marée, nous avons présenté les marégrammes (figure 1.6) selon la classification française en quatre types de marée : semi-diurne, à inégalités diurnes, mixte et diurne. Cette classification ayant une part d'arbitraire, ceci explique l'existence d'autres classifications. La force génératrice de la marée est composée essentiellement des termes diurnes et semi-diurnes qui se retrouvent dans la marée sous forme de composantes correspondantes avec des amplitudes plus ou mois marquées et des phases différentes.

Pour simplifier, considérons le cas de la marée réduite aux composantes diurne et semi-diurne. Dans l'hypothèse (justifiée ici) où les amplitudes et les phases varient lentement pendant un cycle diurne de marée, ces paramètres peuvent être considérés constants sur ce laps de temps.

Si les couples (h_1, φ_1) et (h_2, φ_2) représentent respectivement les amplitudes et phases des composantes diurne et semi-diurne, nous avons :

$$h(t) = h_1 \cos(\tau - \varphi_1) + h_2 \cos(2\tau - \varphi_2),$$

et, en posant : $r = h_1/h_2$, $\theta = \tau - (\varphi_2/2)$, $\alpha = \varphi_1 - (\varphi_2/2)$, il vient :

$$h(t) = h_2 \left[r \cos(\theta - \alpha) + \cos 2\theta \right].$$

On peut démontrer alors que :

— si $r \geq 4$, il y a toujours une pleine mer et une basse mer par jour ;

— si $r \leq 2$, il y a toujours deux pleines mers et deux basses mers par jour ;

— si $2 < r < 4$, le nombre de pleines et basses mers par jour (soit 2, soit 4) dépend de α.

La démonstration de ces résultats, qui n'ont pas un caractère fondamental, nécessite des développements mathématiques qu'il n'est pas nécessaire de reproduire ici. La détermination du nombre de pleines mers et de basses mers par jour suppose le calcul de r et θ. Ces paramètres, très variables, sont donc difficilement utilisables pour une classification. On préfère utiliser un critère moins rigoureux mais d'utilisation plus simple. La classification adoptée en France (F) comprend quatre types en fonction de la valeur du coefficient R_F, rapport des sommes des amplitudes des deux principales ondes diurnes (K_1 et O_1) et semi-diurnes (M_2 et S_2), soit :

$$R_F = \frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}}.$$

Ainsi, nous avons :

— le « type semi-diurne » pour : $R_F < 0{,}25$,

— le « type semi-diurne à inégalités diurnes » pour : $0{,}25 \leq R_F < 1{,}5$,

— le « type mixte » pour : $1{,}5 \leq R_F < 3$,

— le « type diurne » pour : $R_F \geq 3$

En Grande-Bretagne (GB), la composante M_2 n'est pas prise en considération et le coefficient R_{GB} est défini par :

$$R_{GB} = \frac{\pi}{2} \times \frac{h_{S_2}}{h_{K_1} + h_{O_1}}.$$

La classification adoptée dans ce pays est réduite à deux types :

— le type semi-diurne pour : $R_{GB} > 1$,

— le type diurne pour : $R_{GB} < 1$,

Dans d'autres pays, très souvent on adopte trois types (semi-diurne, mixte et diurne), mais avec des critères pouvant varier d'un pays à l'autre.

2 • Niveaux caractéristiques extrêmes

Avant d'examiner les conditions donnant les pleines mers extrêmes, rappelons que la formule harmonique de la marée (voir chapitre V) peut s'écrire en fonction de t, temps civil local, selon l'expression :

$$h(t) = Z_{00} + \sum_{i=1}^{i=N} h_i \cos(V_i - \kappa_i). \tag{8.18}$$

Dans cette expression, Z_{00} est le niveau moyen, les paramètres h_i, V_i et κ_i représentant respectivement l'amplitude, l'argument du cosinus (dans le développement du potentiel générateur) et la situation absolue de la composante i. La situation absolue κ_i et le temps civil local sont utilisés ici par souci d'homogénéité avec le choix fait au début de ce chapitre. Signalons pour mémoire que le paramètre κ_i représente le retard de l'onde, exprimé en degré, par rapport à la composante associée du potentiel. Pour obtenir ce retard exprimé en temps, il suffit de diviser κ_i par la vitesse angulaire dV_i/dt exprimée en degrés par heure. Ainsi l'ensemble des éléments Z_0, h_i et κ_i sont constants en un lieu donné. Seul l'argument V_i dépend du temps et s'exprime à l'aide les variables fondamentales (τ, s, h, p N et p_1) par l'expression (voir 6.2) :

$$V_i = m_{\tau,i}\tau + m_{s,i}s + m_{h,i}h + m_{p,i}p + m_{N',i}N' + m_{p_1,i}p_1 + m_{\pi/2,i}\frac{\pi}{2}$$

l'unité d'angle étant ici le radian et l'élément $m_{\pi/2,i}$ représentant le nombre de $\pi/2$ radians à ajouter pour que le coefficient du cosinus soit positif.

Cet argument peut se mettre ainsi sous la forme :

$$V_i = \overrightarrow{M}_i \times \overrightarrow{X} + m_{\pi/2,i}\frac{\pi}{2} \tag{8.19}$$

le symbole « × » représentant le produit scalaire.

Il en résulte que l'onde i est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{M}_i$ ayant pour composantes $\left[m_{\tau,i}, m_{s,i}, m_{h,i}, m_{p,i}, m_{N,i}, m_{p_1,i}\right]$ et que l'argument V_i peut être considéré comme une fonction linéaire du vecteur $\overrightarrow{X}$ ayant pour composantes les variables fondamentales $\left[\tau, s, h, p, N', p_1\right]$. Cette formulation va nous permettre d'aborder l'étude des hauteurs de marée extrêmes.

2.1 • Le problème des marées extrêmes

Compte tenu de cette dernière relation (8.19), la hauteur $h(t)$ donnée par (8.18), peut être considéré comme une fonction Ψ du vecteur $\overrightarrow{X}$. Bien que cette fonction Ψ soit de période 2π par rapport à chacune des variables fondamentales (composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$), elle n'est pas elle-même une fonction périodique du fait que les variables fondamentales aient des périodes incommensurables entre elles. Il en résulte qu'un vecteur déterminé $\overrightarrow{X}$ ne peut se réaliser en un temps fini. On ne cherchera donc pas la solution du problème sous la forme d'une fonction explicite du temps, mais d'une fonction de chacune de ces variables indépendantes, qui constituent autant de degrés de liberté du système. Or, les valeurs extrêmes de hauteur sont obtenues lorsque $\overrightarrow{grad}\,\Psi = 0$.

Cette condition peut encore se traduire par les équations :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial s} = \frac{\partial\Psi}{\partial h} = \frac{\partial\Psi}{\partial p} = \frac{\partial\Psi}{\partial N'} = \frac{\partial\Psi}{\partial p_1} = 0.$$

Ces égalités constituent un système d'équations que leur caractère transcendant interdit de résoudre directement. Si le symbole x désigne une variable fondamentale, il est nécessaire à partir d'une solution approchée $\overrightarrow{X}_0$ de recourir à des approximations successives du premier ordre telles que :

$$\frac{\partial\Psi\left(\overrightarrow{X}\right)}{\partial x} \approx \frac{\partial\Psi\left(\overrightarrow{X}_0\right)}{\partial x} + \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{X}_0\right)\frac{\partial^2\Psi\left(\overrightarrow{X}_0\right)}{\partial x^2}. \tag{8.20}$$

Alors, le nouveau vecteur $\overrightarrow{X}$ obtenu par l'annulation du second membre de (8.20) constitue une meilleure approximation, soit :

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_0 - \frac{\partial\Psi\left(\overrightarrow{X}_0\right)}{\partial x} \Big/ \frac{\partial^2\Psi\left(\overrightarrow{X}_0\right)}{\partial x^2},$$

sous réserve cependant d'un bon choix de $\overrightarrow{X}_0$ assurant la convergence des approximations successives.

Le problème consiste donc à rechercher la solution approchée $\overrightarrow{X}_0$, c'est-à-dire à déterminer les valeurs des composantes $[\tau, s, h, p, N', p_1]$ donnant une hauteur suffisamment proche d'une hauteur extrême pour que la convergence vers cette solution soit assurée.

2.2 • Recherche de la solution approchée

En raison de la difficulté du problème, il convient dès le départ de séparer les deux types semi-diurne et diurne de la marée, chaque type de marée nécessitant un traitement particulier. Les cas litigieux, représentés en général par les types mixtes ou à fortes inégalités diurnes, sont examinés en leur faisant subir les deux précédents traitements (diurne et semi-diurne) afin de permettre le choix de la meilleure solution.

Pour aborder cette question, l'idée de base réside dans le fait que les amplitudes des composantes de marée sont généralement fonctions croissantes des coefficients correspondants du potentiel générateur, décalées dans le temps de l'âge de la marée. Cette règle est toujours vraie quand les composantes d'interactions non linéaires sont faibles ou négligeables. Les marées pour lesquelles cette condition n'est pas remplie feront l'objet d'un traitement particulier. Ayant un mouvement très lent ($dp_1/dt < 2°$/siècle), le périgée solaire est considéré comme étant fixe ; on adoptera la valeur constante $p_1 = 283°$ qui est celle du début du XXIe siècle. Rien ne s'opposerait, au prix d'un léger allongement du temps de calculs, à prendre en compte son mouvement. Cependant, les valeurs extrêmes ainsi calculées ne seraient atteintes que dans une quarantaine de siècles, ce qui ne présente aucun intérêt pratique dans la vie actuelle.

2.2.1 • Niveaux extrêmes de la marée diurne

Le nœud ascendant de la Lune joue un rôle différent pour les composantes diurnes et semi-diurnes. Nous avons déjà rappelé plus haut que l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur est maximale (28°36) lorsque le nœud ascendant est au point vernal ($N = 0°$) et minimale (18°20) à l'équinoxe d'automne ($N = 180°$). Or, les ondes diurnes sont d'autant plus importantes que la déclinaison est importante. On choisira donc pour le maximum diurne une valeur initiale de N égale à 0°. L'action maximale pour la marée diurne est obtenue lorsque les astres remplissent les conditions suivantes (variables fondamentales exprimées ici en radians) :

— Les deux déclinaisons sont maximales, soit : $s = h = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

— La Lune est à son périgée (voir 1.2.3) : $p = s + 2k\pi$,

— La Lune passe au méridien du lieu : $\tau = 2k\pi$ (pleine mer), $\tau = \pi + 2k\pi$ (basse mer).

Mais le maximum d'amplitude de la marée diurne ne se produit pas au même instant du fait de l'âge de cette espèce, qui se traduit par un certain retard de la marée sur l'action des astres. Pour tenir compte de ce retard, il convient de compléter les relations précédentes. Les constantes harmoniques du lieu nous en donnent la possibilité. En effet, les arguments des quatre principales composantes diurnes (K_1, O_1, P_1 et Q_1) fournissent alors les quatre relations nécessaires pour rechercher les valeurs de τ, s, h, et p répondant aux conditions initiales données ci-dessus. En tenant compte des expressions des arguments du 8.1 et en posant $\phi_i = V_i - \kappa_i$ (argument du cosinus de l'onde i), nous obtenons le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_{K_1} &= \tau + s - \kappa_{K_1} + \pi/2 \\
\phi_{O_1} &= \tau - s - \kappa_{O_1} - \pi/2 \\
\phi_{P_1} &= \tau + s - 2h - \kappa_{P_1} - \pi/2 \\
\phi_{Q_1} &= \tau - 2s + p - \kappa_{Q_1} - \pi/2
\end{aligned}$$

La résolution de ce système nous permet d'obtenir une première solution approchée. Les valeurs correspondantes des paramètres sont affectées de deux indices : le premier égal à 0 pour « valeur initiale », le second à 1 pour « marée diurne » :

$$\begin{aligned}
\tau_{0,1} &= \frac{\kappa_{O_1} + \kappa_{K_1}}{2} + k_\tau \pi \\
s_{0,1} &= \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k_s \pi \\
h_{0,1} &= \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{P_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k_h \pi \\
p_{0,1} &= \frac{2\,\kappa_{Q_1} + \kappa_{K_1} - 3\,\kappa_{O_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k_p \pi
\end{aligned} \tag{8.21}$$

l'ensemble des coefficients du type k_j étant des entiers relatifs.

Afin de déterminer les pleines mers et les basses mers extrêmes, le processus itératif sera mis en œuvre tour à tour avec les 8 conditions initiales (nombre d'arrangements avec répétition : $2^3 = 8$), correspondant à l'attribution des valeurs 0 ou 1 aux trois coefficients k_τ, k_s et k_h, en notant :

— que la valeur de k_τ est paire pour les pleines mers et impaire pour les basses mers ;

— et que, le maximum d'action ayant lieu au voisinage du passage de la Lune au périgée, on peut adopter $k_p = k_s$.

2.2.2 • Niveaux extrêmes de la marée semi-diurne

En ce qui concerne les composantes semi-diurnes, le choix de la condition initiale pour la longitude moyenne du nœud ascendant N = −N' est moins évident. En effet, la vive-eau extrême recherchée intervenant au voisinage du passage de la Lune à l'équateur, la valeur de l'inclinaison de l'orbite ne présente pas a priori la même importance. Néanmoins, compte tenu des irrégularités de la propagation de la marée, le maximum d'amplitude ne correspond pas exactement au passage de l'astre à l'équateur et les composantes semi-diurnes sont alors plus importantes lorsque la déclinaison est faible. On choisira donc pour le maximum semi-diurne, une valeur initiale de N égale à 180° (nœud au point équinoxial d'automne) qui correspond aux variations les plus faibles de la déclinaison de la lune. Le maximum d'action pour la marée semi-diurne correspond alors aux conditions suivantes :

— les astres à l'équateur : $h = s + k\pi$,

— la Lune à son périgée : $p = s + 2k\pi$,

— la Lune au méridien (pleines mers) : $\tau = k\pi$

— la Lune à ses tropiques (basses mers) : $\tau = \pi/2 + k\pi$.

Comme dans le cas de la marée diurne, les conditions initiales recherchées sont déduites à partir des arguments ϕ_i des quatre principales composantes de la marée semi-diurne (M_2, S_2, N_2, K_2). Le tableau 8.1 nous donne :

$$\begin{aligned}
\phi_{M_2} &= 2\tau - \kappa_{M_2} \\
\phi_{S_2} &= 2\tau + 2s - 2h - \kappa_{S_2} \\
\phi_{N_2} &= 2\tau - s + p - \kappa_{N_2} \\
\phi_{K_2} &= 2\tau + 2s - \kappa_{K_2}
\end{aligned}$$

En adoptant les mêmes conventions que pour la marée diurne, mais avec l'indice 2 pour semi-diurne, on en déduit les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
\tau_{0,2} &= \frac{\kappa_{M_2}}{2} + k_\tau \frac{\pi}{2} \\
s_{0,2} &= \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{M_2}}{2} + k_s \pi \\
h_{0,2} &= \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{S_2}}{2} + k_h \pi \\
p_{0,2} &= \frac{2\,\kappa_{N_2} + \kappa_{K_2} - 3\,\kappa_{M_2}}{2} + k_p \pi
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Rappelons :

— que la valeur de k_τ est paire pour les pleines mers et impaire pour les basses mers,

— et que le maximum d'action ayant lieu au voisinage du passage de la Lune à son périgée, on peut alors adopter l'égalité $k_p = k_s$.

Ainsi, comme pour le cas diurne, le processus itératif sera mis en œuvre tour à tour avec les 8 conditions initiales, correspondant aux valeurs de k_τ, k_s et k_h égales à 0 ou 1.

2.2.3 • Niveaux extrêmes de la marée à forte inégalité diurne ou mixte

Il est à craindre, dans ce cas, qu'un niveau extrême de marée puisse ne pas correspondre à un point de convergence du processus itératif.

Rappelons que la hauteur, exprimée sous sa forme Ψ (fonction de $\overrightarrow{X}$), est périodique par rapport à chacune des variables fondamentales (période 2π). À titre d'exemple, prenons le cas de h, longitude moyenne du Soleil. En période de vive-eau, la marée semi-diurne passe par un maximum au voisinage des équinoxes ($h \approx k\pi$), tandis que la diurne passe par un maximum au voisinage des solstices ($h \approx \pi/2+k\pi$). En fixant les autres variables astronomiques à leur valeur initiale, la superposition des deux marées, diurne et semi-diurne, se traduit par la somme de deux sinusoïdes (fonction de h) approximativement en opposition de phase. Le maximum de cette somme est atteint soit pour $h \approx k\pi$, soit pour $h \approx \pi/2+k\pi$, selon l'importance relative des amplitudes, diurne et semi-diurne, au voisinage de leur valeur maximale respective. Ainsi, en choisissant pour h des conditions initiales voisines de $k\pi/2$ avec k prenant successivement les quatre valeurs 0, 1, 2 et 3, on est sûr de couvrir toutes les possibilités. Le même raisonnement peut s'appliquer à s, longitude moyenne de la Lune. Pour la variable τ, temps civil lunaire, le nombre de valeurs initiales à lui attribuer sera donc égal à 2 si le rapport $r = h_1/h_2 \geq 4$ (marée de type diurne ; voir plus haut §1.4) et égal à 4 pour les autres cas. En ce qui concerne p, longitude moyenne du périgée lunaire, il convient de noter que les deux composantes de marée (diurne et semi-diurne) subissent, toutes les deux, un maximum d'action au moment du passage de la Lune à son périgée. Le fait que les âges de marée (diurne T_1 et semi-diurne T_2 qui sont de l'ordre de quelques jours) soient différentes n'a pas d'importance pratique, T_1 et T_2 étant négligeables vis-à-vis de la période de p ($\approx$ 8,85 ans). Le choix d'une valeur initiale de p proche de s peut être adopté sans inconvénient. Ainsi, dans le cas où la marée est du type à forte inégalité diurne ou mixte, il résulte des considérations précédentes que cette marée doit subir séparément les deux traitements (diurne et semi-diurne) pour obtenir l'extremum recherché.

2.2.4 • Niveaux extrêmes des ondes de petits fonds

Lorsque les ondes quart-diurnes ou sixième-diurnes sont importantes, des phénomènes de dédoublement des pleines ou basses mers sont généralement présents. Le processus itératif peut conduire à un résultat qui ne correspond pas nécessairement à une pleine ou basse mer extrême. La démarche à suivre consiste alors, dans un premier temps, à déceler les situations où ce type de phénomène risque de se produire. Ensuite, le cas échéant, on augmente en conséquence le nombre de valeurs initiales de la variable τ.

La procédure est identique à celle qui consiste à rechercher le nombre de pleines et basses mers selon la valeur du rapport $r = h_1/h_2$ (voir 1.4), h_1 et h_2 représentant respectivement les amplitudes, diurne et semi-diurne.

Avec les mêmes conventions, en désignant par h_n l'amplitude de la composante *n-ième* diurne, on recherchera systématiquement 8 pleines et basses mers si $h_4/h_2 > 0$, 25 et 16 pleines et basses mers si $h_6/h_2 > 0{,}0625$.

2.3 • Vive-eau moyenne

Selon une norme généralement adoptée, la vive-eau moyenne est souvent définie, en particulier pour les ports où les observations sont peu nombreuses, à l'aide des deux composantes principales semi-diurnes d'une part et diurnes d'autre part.

Nous adoptons ici les sigles suivants pour définir les hauteurs des pleines (PM) ou basses mers (BM) de vive (VE) ou morte-eau (ME) :

— PMVE : pour la hauteur de la pleine mer de vive-eau ;
— PMME : pour celle de la pleine mer de morte-eau ;
— BMME : pour celle de la basse mer de morte-eau ;
— BMVE : pour celle de la basse mer de vive-eau.

Nous obtenons ainsi avec Z_0 désignant le niveau moyen :

— pour la marée semi-diurne :
  — PMVE $= Z_0 + (h_{M_2} + h_{S_2})$,
  — PMME $= Z_0 + (h_{M_2} - h_{S_2})$,
  — BMME $= Z_0 - (h_{M_2} - h_{S_2})$,
  — BMVE $= Z_0 - (h_{M_2} + h_{S_2})$;
— pour la marée diurne :
  — PMVE $= Z_0 + (h_{K_1} + h_{O_1})$
  — BMVE $= Z_0 - (h_{K_1} + h_{O_1})$

Pour les marées à fortes inégalités diurnes ou mixtes, la formulation adoptée est un peu plus compliquée. Elle fait intervenir le déphasage entre la composante semi-diurne moyenne et la composante diurne en période de vive-eau.

Ces formules présentent l'avantage de la simplicité. En les considérant comme des définitions, elles acquièrent un caractère incontestable. Cependant, les valeurs obtenues ne sont pas satisfaisantes, tout au moins pour définir la moyenne de ces hauteurs spécifiques. En effet, ces formules ne donnent pas les mêmes résultats que ceux qui sont obtenus lorsqu'on effectue la moyenne des hauteurs de pleines ou basses mers observées en situation de vive ou morte-eau. Le fait par exemple que la PMVE, définie comme moyenne, ne soit pas identique à la moyenne des pleines mers de vive-eau est souvent source de confusion. Examinons par exemple le cas du Havre où la marée est du type semi-diurne. Nous obtenons pour ce port, les résultats suivants :

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= 487{,}7 \text{ cm} \\ h_{M_2} &= 261{,}6 \text{ cm} \\ h_{S_2} &= 87{,}6 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\text{PMVE} \approx 837 \text{ cm} \\ &\text{BMVE} \approx 139 \text{ cm} \end{aligned}\right.$$

Or les hauteurs moyennes des pleines mers et des basses mers de vive-eau sont respectivement 790 cm et 120 cm. Les écarts de 47 cm et 19 cm respectivement pour les pleines et basses mers de vive-eau sont trop importants pour adopter la similitude de ces deux modes de détermination.

Le risque de confusion est réel. En fait dans les ports où les interactions non linéaires sont importantes, la formulation simplifiée est inadaptée. Dans le cas précis du Havre, par exemple, nous avons PMVE $\approx$ 837 cm, valeur qui est très proche de la hauteur maximale théorique (842 cm), ce qui ne correspond évidemment pas à la réalité (790 cm).

La raison essentielle de l'inadéquation de la formule simplifiée pour définir une vive-eau moyenne vient du fait que les composantes d'interaction non linéaire jouent un rôle non négligeable qui n'est pas pris en compte. Par ailleurs, l'argument de la simplicité n'est plus déterminant avec les moyens de calculs actuels. Ces moyens permettent aisément de prendre en compte toutes les composantes harmoniques d'un port qui sont nécessaires à l'obtention rapide d'une solution exacte. Cependant, il convient d'attirer l'attention sur le point important concernant la définition de ce que l'on appelle vive-eau et morte-eau.

Rappelons que les vives-eaux semi-diurnes ont lieu au voisinage du moment où l'écart $s - h = (\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2})/2 + k\pi$ (voir 1.1.3). Les hauteurs moyennes de pleines mers et de basses mers de vive-eau sont donc les moyennes des hauteurs de pleines mers et de basses mers voisines de ces instants. Si la moyenne porte sur une durée suffisamment longue, toutes les composantes dont l'argument astronomique n'est pas de la forme $k_1\tau + k_2\left(s - h\right)$ sont éliminées (k_1 et k_2 étant des entiers relatifs). Il subsiste

évidemment M_2 et S_2, mais également toutes les composantes d'interactions non linéaires faisant intervenir ces dernières composantes. Nous pouvons citer par exemple : MS_f, $2MS_2$, $2SM_2$, M_4, MS_4, ondes composées qui ne sont pas prises en compte dans les formules simplifiées présentées plus haut. Il en est de même (voir 1.2.1) pour les vives-eaux diurnes qui ont lieu au voisinage du moment où la longitude moyenne de la Lune satisfait la condition :

$$s = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Toutes les composantes, dont l'argument astronomique n'est pas de la forme $k_1\tau + k_2 s$, sont éliminées dans la moyenne. Il subsiste naturellement les composantes principales K_1 et O_1, mais également les ondes composées OQ_2, K_2, MK_3, ...

Ainsi, les calculs peuvent être menés exactement comme pour les marées extrêmes. Cependant on veillera à ne prendre en compte que les composantes qui ne s'éliminent pas dans la moyenne ; c'est-à-dire celles dont l'argument astronomique est de la forme $k_1\tau + k_2\left(s - h\right)$ pour la marée semi-diurne, ou $k_1\tau + k_2 s$ pour la diurne.

Dans le processus itératif, les pleines et basses mers sont calculées au même instant que le maximum d'amplitude. S'agissant d'un calcul de moyenne, il faut, en toute rigueur tenir compte des variations de $s - h$ dans le cas semi-diurne et de s dans le cas diurne pendant un demi cycle de marée de part et d'autre de la pleine mer et de la basse mer.

Or, nous avons :

— pour la semi-diurne, une durée de cycle égale à $T_{M2} = 12{,}42$ heures avec : $\mathrm{d}(s - h)/\mathrm{d}t = 0{,}5079479°/\text{heure}$;

— pour la diurne, une durée de cycle égale à $T_{M1} = 24{,}84$ heures avec : $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 0{,}5490165°/\text{heure}$.

En supposant une variation sinusoïdale de l'amplitude de part et d'autre du maximum, il convient d'appliquer les facteurs correctifs pour chacun des types :

— pour le semi-diurne :

$$c_2 = \frac{1}{T_{M2}} \int_{-T_{M2}/2}^{T_{M2}/2} \cos\left\{\left[\mathrm{d}(s - t)/\mathrm{d}t\right] t\right\} \mathrm{d}t = 0{,}9995 \approx 1,$$

— pour le diurne :

$$c_1 = \frac{1}{T_{M1}} \int_{-T_{M1}/2}^{T_{M1}/2} \cos\left[(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)t\right] \mathrm{d}t = 0{,}9976 \approx 1.$$

Ces corrections, très proches de l'unité, sont négligées dans la pratique.

2.4 • Mortes-eaux extrêmes

Les conditions initiales de la solution approchée pour la recherche des niveaux extrêmes de morte-eau sont à l'opposé de celles des vives-eaux caractéristiques.

Pour les marées diurnes, on se situe au voisinage de l'opposition de phase des ondes K_1 et O_1 au moment de la déclinaison nulle des deux astres ($h = s = k\pi$) et du passage de la Lune à l'apogée ($p = s + \pi + 2k\pi$), ce qui se traduit par les conditions initiales suivantes (à comparer avec le système 8.21) :

$$\begin{aligned}
\tau_{0,1} &= \frac{\kappa_{O_1} + \kappa_{K_1}}{2} + \frac{\pi}{2} + k_\tau \pi \\
s_{0,1} &= \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} + k_s \pi \\
h_{0,1} &= \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{P_1}}{2} + k_h \pi \\
p_{0,1} &= \frac{2\,\kappa_{Q_1} + \kappa_{K_1} - 3\,\kappa_{O_1}}{2} + k_p \pi
\end{aligned} \tag{8.23}$$

La valeur de N n'a que peu d'importance car la déclinaison de la Lune est proche de zéro. Cependant, il est préférable de choisir une valeur initiale proche de N = 180°, correspondant à l'inclinaison minimale de l'orbite de la Lune.

Pour les marées semi-diurnes, on se place au voisinage de l'opposition de phases des ondes M_2 et S_2 au moment :

— de la déclinaison maximale de la Lune, soit : $s = \pi/2 + k\pi$ et N= 0,

— de la déclinaison minimale du soleil, soit : $h = k\pi$,

— du passage de la Lune à son apogée, soit : $p = s + \pi + 2k\pi$.

Cette disposition des astres se traduit par les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
\tau_{0,2} &= \frac{\kappa_{M_2}}{2} + k_\tau \frac{\pi}{2} \\
s_{0,2} &= \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{M_2}}{2} + \frac{\pi}{2} + k_s \pi \\
h_{0,2} &= \frac{\kappa_{K_2} - \kappa_{S_2}}{2} + k_h \pi \\
p_{0,2} &= \frac{2\,\kappa_{N_2} + \kappa_{K_2} - 3\kappa_{M_2}}{2} - \frac{\pi}{2} + k_s \pi
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Ces conditions (8.24) sont à comparer à celles de (8.22) correspondant aux niveaux extrêmes de vives-eaux. Ainsi, les algorithmes mis au point pour les vives-eaux peuvent être utilisés pour les mortes-eaux, avec toutefois quelques modifications pour tenir compte du fait que les mortes-eaux extrêmes peuvent être d'amplitude nulle.

2.5 • Mortes-eaux moyennes

Pour le calcul des niveaux caractéristiques des mortes-eaux moyennes, les raisonnements précédents, développés pour les vives-eaux peuvent s'appliquer sans changement, en modifiant simplement les valeurs initiales de $s-h$ pour les mortes-eaux semi-diurnes et de s pour les mortes-eaux diurnes. Nous avons vu (1.1.2) que les mortes-eaux semi-diurnes ont lieu au voisinage du moment où les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil sont en quadrature de phase à la différence de situations $\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}$ près, soit :

$$s - h = \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

En situation de mortes-eaux, les hauteurs moyennes de pleines mers d'une part et de basses mers d'autre part sont donc les moyennes des hauteurs de pleines mers et de basses mers voisines de ces instants. Si la moyenne de ces hauteurs est effectuée sur une durée suffisamment longue, toutes les composantes dont l'argument astronomique n'est pas de la forme $k_\tau\tau + k_{s-h}\left(s-h\right)$ sont éliminées (les k_j étant des entiers relatifs). Il subsiste naturellement les ondes principales M_2 et S_2, mais également toutes les composantes d'interactions non linéaires faisant intervenir ces deux principales ondes semi-diurne (par exemple : MS_f, $2MS_2$, $2SM_2$, M_4, MS_4) qui ne sont pas prises en compte dans les formules simplifiées donnant les PM et BM de ME présentées au 2.3. Quant aux mortes-eaux diurnes, elles ont lieu au voisinage de l'instant où :

$$s = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} + k\pi.$$

Toutes les composantes dont l'argument n'est pas de la forme $k_\tau\tau + k_s s$ sont éliminées dans la moyenne des mortes-eaux diurnes. Tout comme pour les semi-diurnes, il y retrouve les deux ondes principales diurnes K_1 et O_1, avec également toutes les ondes composées correspondantes : OQ_2, K_2, MK_3, ...

2.6 • Coefficient de marée

Pour comparer les marnages des divers ports (voir 3.2), Laplace a caractérisé chaque port par une unité de hauteur : « l'unité de hauteur est la valeur moyenne de l'amplitude (demi-marnage) de la plus grande marée qui suit l'instant de la pleine ou de la nouvelle lune, vers les syzygies d'équinoxe ».

La notion de coefficient résulte directement de cette définition. Rappelons que par convention, on attribue le coefficient 100 amplitude moyenne des vives-eaux qui suivent la syzygie la plus voisine de l'équinoxe, d'où la formule :

$$\mathrm{C} = 100\,\frac{h_{pm} - \mathrm{N}_{mm}}{\mathrm{U}}$$

dans laquelle nous avons :

— le coefficient de marée : C,

— la hauteur de la pleine mer : h_{pm},

— le niveau de mi-marée : N_{mm},

— l'unité de hauteur : U.

En pratique, le coefficient est calculé à partir des seules composantes semi-diurnes. Le succès en France de cette notion de coefficient vient du fait qu'il fournit très rapidement une indication sur l'amplitude de la marée. Ce n'est évidemment qu'une indication relative, mais très largement utilisée par tous les familiers des zones côtières françaises de la Manche et de l'Atlantique. Le coefficient présente de plus l'intérêt de permettre des calculs rapides de hauteurs d'eau ou de courants. En effet, les tables de correction des annuaires pour calculer les hauteurs de marée dans les ports secondaires, et les atlas de courants fournissent des éléments pour des situations de vive-eau moyenne et de morte-eau moyenne qui correspondent respectivement aux coefficients 95 et 45. Connaissant le coefficient de la marée en cours, il est très aisé d'effectuer une règle de trois conduisant à une bonne estimation des hauteurs ou des courants correspondants.

En étant conscients de l'approximation de ces valeurs, les navigateurs peuvent alors adopter ce coefficient (qui n'est calculé que pour Brest) et l'appliquer pour toutes les côtes atlantiques de France, à l'exception éventuellement des ports de la Mer du Nord. Dans cette dernière zone, les variations relatives de l'amplitude de la marée sont sensiblement plus faibles qu'à Brest. Cependant, il ne serait pas prudent pour la navigation d'appliquer le coefficient de Brest à des zones trop éloignées. D'ailleurs, cela n'aurait aucun sens pour les types de marée autres que le semi-diurne. Mais, en raison de l'intérêt pratique de ce type de coefficient, il est possible de lui donner à partir de la formule harmonique une définition de portée plus universelle, c'est-à-dire applicable à tous les types de marée.

2.7 • Calcul du coefficient par la formule harmonique

Selon l'idée de Laplace, qu'il convient de conserver, le coefficient de marée est une mesure de l'amplitude de la marée, rapportée à l'unité de hauteur U. Nous venons de voir que cette référence est l'amplitude moyenne des vives-eaux d'équinoxe. Le terme de « moyenne » a une grande importance pour définir la durée sur laquelle cette moyenne doit être établie. Ceci suppose a priori que toutes les contributions extrêmes, dues aux mouvements du périgée lunaire (p) et du nœud ascendant (N), doivent s'annuler. Ce qui implique que cette moyenne soit effectuée sur une durée suffisamment longue (le saros

serait une durée optimale). Cela signifie que dans la formule harmonique, toutes les ondes de marée, dont l'argument astronomique dépend de p ou de N, s'éliminent dans la moyenne.

Cependant, pour généraliser cette notion de coefficient, il convient de définir l'unité de hauteur U applicable à tout type de marée et pas seulement pour le semi-diurne aux vives-eaux d'équinoxe. Or, le mode de calcul des marées extrêmes se prête naturellement à une définition de l'unité de hauteur définie à l'aide des composantes dont les arguments astronomiques ne dépendent pas des longitudes moyennes p et N.

En effet, en appliquant un mode opératoire identique à celui du calcul de marées extrêmes, il suffit de rechercher le maximum Ψ_{U}, valeur de la fonction Ψ pour $\overrightarrow{\mathrm{X}} = \overrightarrow{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}$ où $\overrightarrow{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}$ est le vecteur de composantes $[\tau, s, h]$.

Plus qu'à une notion de hauteur, le coefficient défini par Laplace se rapporte davantage à l'amplitude de la marée $h_{pm}-\mathrm{N}_{mm}$. Cependant cette notion d'amplitude, facilement concevable pour les types essentiellement diurne ou semi-diurne, est plus difficile à cerner dans le cas de marées semi-diurnes à forte inégalité diurne. Afin d'éviter de définir un coefficient risquant de subir de fortes variations au cours d'une même journée, on substitue à la notion de hauteur ou d'amplitude, celle de « variabilité », assimilée en statistique à une valeur proportionnelle à l'écart type (racine carrée de la variance).

En désignant par $h_{k,\mathrm{U}}$ l'amplitude de l'espèce k, qui correspond au maximum Ψ_{U} ($k = 1$ pour les composantes diurnes, $k = 2$ pour les semi-diurnes, …), l'unité de hauteur U peut se traduire alors par la relation :

$$\mathrm{U} = \sqrt{\sum_k h_{k,\mathrm{U}}^2}$$

En appelant h_k l'amplitude de l'espèce k à un instant donné, le coefficient C au même instant peut ainsi se définir par la formule :

$$\mathrm{C} = 100\frac{\sqrt{\sum_k h_k^2}}{\mathrm{U}}. \tag{8.25}$$

Cette définition n'est pas identique à celle qui est adoptée pour le calcul du coefficient de Laplace. Cependant, dans le cas précis du site de Brest, les amplitudes des ondes diurnes et d'interactions sont relativement faibles devant l'amplitude de l'espèce semi-diurne. Il en résulte pour ce port que les résultats obtenus par les deux formules sont très voisins : les différents tests effectués sur des coefficients compris entre les valeurs extrêmes n'ont pas révélé d'écarts supérieurs à une unité. En raison de la portée très générale de la formule (8.25), il est ainsi possible de l'adopter pour définir un coefficient

de marée à caractère universel. Remarquons que les amplitudes h_k ne sont autres que les modules des vecteurs réduits C_k.

2.8 • Exemples d'application pour différents types de marée

Quatre ports (Brest, Honolulu, Do-Son et Nagasaki) sont choisis à titre d'exemples pour montrer les résultats de calcul de certains paramètres de la marée, définis dans ce chapitre.

2.8.1 • Brest 48° 23′ N , 4°30′ W

Type :	**marée semi-diurne**		
Niveau moyen :	402,0 cm		
Âge diurne :	97,3 heures		
Âge semi-diurne :	38,1 heures		
Pleines mers		**Basses mers**	
Supérieure :	779,1 cm	Inférieure :	17,0 cm
Coef. 100 :	720,8 cm	83,3 cm	
VE moyenne :	690,9 cm		109,4 cm
ME moyenne :	521,0 cm		278,4 cm
Inférieure :	457,3 cm	Supérieure :	342,9 cm
heures (UT+1,0 h) :			
PMVE :	05 h 33 min	BMVE : 00 h 13 min	
PMME :	23 h 42 min	BMME : 17 h 40 min	

2.8.2 • Honolulu : 21° 18′ N, 157° 52′ W

Type :	**marée semi-diurne à inégalité diurne**		
Niveau moyen :	24,0 cm		
Âge diurne :	10,8 heures		
Âge semi-diurne :	−4,0 heures		
Pleines mers		**Basses mers**	
Supérieure :	80,0 cm	Inférieure :	−13,7 cm
Coef. 100 :	71,4 cm	−8,9 cm	
VE moyenne :	61,5 cm	−1,0 cm	
ME moyenne :	28,7 cm	22,5 cm	
Inférieure :	24,0 cm	Supérieure :	24,0 cm
Heures (UT-10,0 h) :			
PMVE :	04 h 11min	BMVE :	20 h 28 min

2.8.3 • Do-Son : 20° 40′ N, 106° 48′ E

Type :	**Marée diurne**		
Niveau moyen :	186,0 cm		
Âge diurne :	50,2 heures		
Âge semi-diurne :	51,4 heures		
Pleines mers		**Basses mers**	
Supérieure :	408,8 cm	Inférieure :	−24,5 cm
Coef. 100 :	364,4 cm	18,3 cm	
VE moyenne :	333,7 cm	39,7 cm	
ME moyenne :	186,1 cm	185,5 cm	
Inférieure :	186,0 cm	Supérieure :	186,0 cm

2.8.4 • Nagasaki : 32° 44′ N, 129° 52′ E

Type :	**Marée semi-diurne à inégalité diurne**		
Niveau moyen :	164,0 cm		
Âge diurne :	18,0 heures		
Âge semi-diurne :	25,5 heures		
Pleines mers		**Basses mers**	
Supérieure :	337,4 cm	Inférieure :	−48,6 cm
Coef. 100 :	317,0 cm	−19,4 cm	
VE moyenne :	286,2 cm	39,9 cm	
ME moyenne :	206,2 cm	142,6 cm	
Inférieure :	164,0 cm	Supérieure :	164,0 cm
Heures (UT+9,0 h) :			
PMVE :	08 h 58 min	BMVE :	15 h 02 min

3 • Niveaux extrêmes

Les variations du niveau de la mer dans les échelles de temps allant de quelques heures à quelques années sont la manifestation de deux phénomènes qui se superposent :

— les mouvements aléatoires, d'origine essentiellement météorologique (mais parfois tectonique : tsunami), appelés surcotes-décotes et symbolisés habituellement par : $SD(t)$;

— la marée astronomique, phénomène déterministe et dont la prédiction $h_a(t)$ est fournie par les annuaires de marée ; Z_{00} étant la cote du niveau

moyen nominal (convention internationale) par rapport au zéro hydrographique (voir chapitre IX pour la définition des différentes niveaux moyens), la prédiction s'exprime par :

$$h_a(t) = \mathrm{Z}_{00} + \sum_i h_i \cos(\mathrm{V}_i - \kappa_i).$$

Ainsi le niveau observé de la mer s'exprime usuellement par :

$$h(t) = \mathrm{Z}_{00} + \sum_i h_i \cos(\mathrm{V}_i - \kappa_i) + \mathrm{SD}(t)$$

Il en résulte que le niveau des plus hautes mers, dont une composante est aléatoire, est une notion qui n'a de sens que si son évaluation s'effectue en termes de probabilité. On est alors conduit à chercher l'intervalle moyen de temps, dit période de retour*, qui sépare deux évènements rares présentant des niveaux de mer supérieurs à un certain seuil.

Exprimé de cette manière, le problème semble se limiter à un simple calcul de moyenne. Cependant, pour que la moyenne soit significative, il faut disposer de durées d'observations très supérieures aux périodes de retour recherchées. Compte tenu des observations disponibles, on ne pourrait guère estimer des périodes de retour supérieures à deux ou trois ans dans la plupart des cas.

Il est toutefois possible de traiter efficacement ce problème pour les ports où plus de 10 années d'observations de marée sont disponibles en tirant parti du fait que les surcotes-décotes et la marée sont des phénomènes très largement indépendants. En effet, si l'on dispose de nombreuses observations de marée, il peut être aisé de calculer les lois de probabilité régissant des événements rares mais non exceptionnels comme les grandes vives-eaux ou les surcotes très importantes. Mais la simultanéité des deux types d'événements peut n'avoir jamais été observée. Pourtant, la période de retour correspondant à ce type de phénomène rarissime peut se calculer avec un bon degré de confiance en combinant les lois de probabilité liées d'une part à la marée, et d'autre part aux surcotes. Les figures 8.1 et 8.2 (a et b) montrent, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour Brest. La figure 8.1 présente la probabilité pour une pleine mer prédite d'être égale à une valeur donnée à 1 cm près.

Le problème qui se pose à propos des surcotes est le calcul de la probabilité associée à une surcote supérieure à une valeur donnée. Une difficulté vient du fait que des surcotes très importantes mais rarissimes ne peuvent pas être ignorées. Des événements qui n'ont jamais été observés doivent être pris en compte à l'aide d'un modèle d'extrapolation. Le modèle choisi est appelé « loi de Gumbel » ; cette loi est très utilisée pour l'estimation des

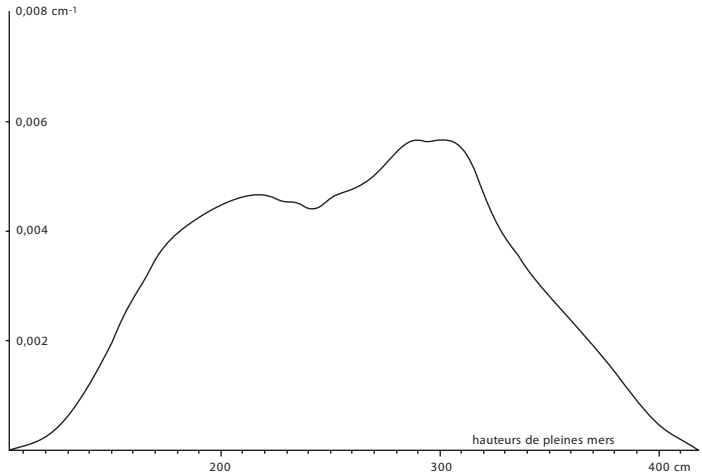


Figure 8.1 — Brest, France : Courbe représentative de la fonction $f(\varsigma)$, densité de probabilité des hauteurs de pleines mers ς (en abscisses). Elle donne la probabilité (en ordonnées) pour qu'une pleine mer ait une hauteur comprise entre ς et $\varsigma + \delta\varsigma$ avec $\delta\varsigma = 1$ cm.

crues des fleuves et rivières. L'application de ce modèle à la plus longue série disponible de mesures de hauteur (120 années à Brest) a démontré la très bonne adaptation de cette loi pour le niveau marin.

La loi de Gumbel résulte de l'étude des valeurs extrêmes prises par une variable aléatoire au cours de tirages indépendants. L'analyse de ce type de variables ou de celles concernant le dépassement de divers seuils, a été abordée par Fisher et Tuppet et complétée par Gumbel. La loi retenue n'est qu'un cas particulier parmi celles qui sont déduites de la théorie des probabilités. Il s'est avéré qu'elle convenait très bien au phénomène de crues, ce qui explique son succès. Rappelons que si $\mathrm{F}(\varsigma)$ est la fonction de répartition de la surcote ς, considérée comme variable aléatoire, cette fonction représente la probabilité ($\mathrm{P}r$) pour que les valeurs prises par la variable aléatoire soit inférieure à une valeur donnée ς_0, soit : $\mathrm{F}(\varsigma) = \mathrm{P}r(\varsigma < \varsigma_0)$.

Si pour toutes valeurs de ς (variable définie de $-\infty$ à $+\infty$), la fonction $\mathrm{F}(\varsigma)$ possède une dérivée $f(\varsigma)$ telle que

$$\mathrm{F}(\varsigma_0) = \int_{-\infty}^{\varsigma_0} f(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma,$$

la fonction $f(\varsigma)$ définit la densité de probabilité ; c'est-à-dire la probabilité pour que la surcote prenne une valeur comprise entre ς et $\varsigma + \mathrm{d}\varsigma$.

La loi de Gumbel s'exprime alors par la fonction :

$$\mathrm{F}(\varsigma) = \exp\left[-\exp(a\varsigma + b)\right],$$

où a et b sont des paramètres à déterminer.

Ainsi, en désignant par $S(\varsigma_0)$ la probabilité d'observation d'une surcote supérieure à ς_0, nous avons : $S(\varsigma_0) = Pr(\varsigma > \varsigma_0) = 1 - F(\varsigma_0)$, soit,

$$S(\varsigma) = 1 - \exp\left[-\exp(a\varsigma + b)\right]. \tag{8.26}$$

Pour la validation expérimentale de cette loi, les points observés sont portés dans un système de coordonnées (ς, Y), dit de Gumbel, où l'ordonnée Y est liée à ς par la relation :

$$Y(\varsigma) = \log\left\{-\log\left[1 - S(\varsigma)\right]\right\}. \tag{8.27}$$

Il s'avère en outre que, grâce au traitement séparé de la marée et des surcotes, le choix du modèle d'extrapolation n'est pas réellement critique pour l'estimation des périodes de retour des hauteurs extrêmes.

La figure 8.2 (haut) présente la probabilité $S(\varsigma_0) = Pr(\varsigma > \varsigma_0)$ pour qu'une surcote ς excède une certaine valeur ς_0, dans le système de coordonnées (8.27) défini par Gumbel. Si la loi définie par la relation (8.26) était respectée, les points expérimentaux, donnant ici un tracé en escaliers, auraient été alignés. La droite en pointillée est celle qui passe au mieux dans le nuage des points expérimentaux. Les deux courbes en traits fins, de part et d'autre de la droite en pointillé, limitent la zone où doivent se situer 90% de points expérimentaux si le modèle d'extrapolation est bien choisi.

La figure 8.2 (bas) est le résultat de la combinaison des lois de probabilité des surcotes et des pleines mers prédites (marée). Si nous désignons par $f(z)$ la densité de probabilité de la hauteur de pleine mer prédite z, la probabilité pour que la hauteur prédite z prenne une valeur comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, s'exprime donc par : $f(z)\,\mathrm{d}z$. De plus nous pouvons signaler que le domaine de z est borné par les valeurs $z_{\min}$ et $z_{\max}$ qui représentent les extremums des pleines mers prédites.

Les surcotes ς étant *a priori* indépendantes des hauteurs prédites z, la probabilité d'observation $Pr(\eta_0)$ d'une hauteur de mer supérieure à η_0 s'obtient ainsi par le produit de convolution :

$$P_n(\eta_0) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(z) S(\eta_0 - z)\mathrm{d}z$$

Avec une marée de type semi-diurne, il y a en moyenne 705,8 pleines mers par an. Ainsi en moyenne, le nombre de pleines mers observées supérieures à la valeur η_0 est de $705{,}8 \times P(\eta_0)$ par an. La période de retour $T_R(\eta > \eta_0)$, exprimée en années, d'une hauteur extrême observée $\eta > \eta_0$ est donc :

$$T_R(\eta > \eta_0) = \frac{1}{705{,}8 \times Pr(\eta_0)} \text{ ans}$$

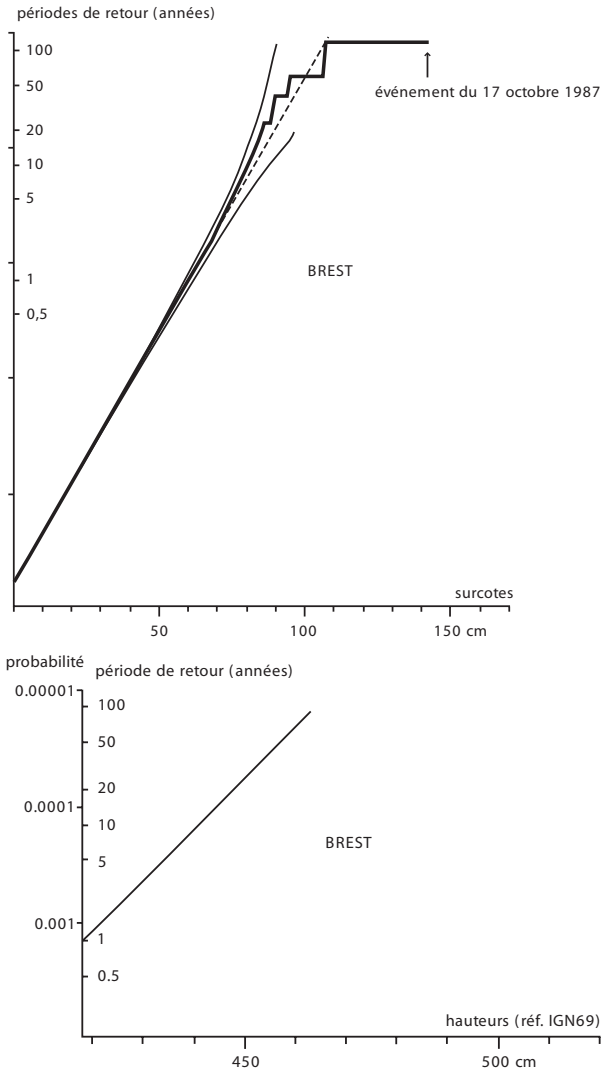


Figure 8.2 — Brest, France : Ces deux graphiques présentent dans le système de coordonnées de Gumbel, les probabilités (avec périodes de retour associées) pour qu'une surcote d'une part (haut) et qu'un niveau extrême (pleine mer et surcote) d'autre part (bas) dépasse une valeur donnée.

La fonction $P_n(\eta)$ donne les probabilités d'observer des hauteurs de pleines mers supérieures à une valeur donnée, qui peuvent ainsi se traduire en termes de périodes de retour associées. On s'est volontairement limité à la présentation des hauteurs supérieures à la hauteur de marée astronomique maximale (on évite ainsi de traiter les décotes).

Il convient de signaler que l'estimation des périodes de retour peut se calculer, dans certaines conditions, à partir de mesures de hauteur de durée supérieure au mois. Actuellement, les travaux effectués aux points de sondages hydrographiques, à l'aide de capteurs de pression posés sur le fond, permettent l'obtention de telles séries de mesure. Il est dès lors possible de tirer profit des relations, existant entre ces mesures et les hauteurs observées simultanément au port de référence le plus proche, afin d'estimer les lois de probabilité nécessaires au calcul des périodes de retour des marées extrêmes en ces points. En raison des caractéristiques de la variabilité spatiale des phénomènes étudiés, il faut s'assurer que la répartition géographique de ces sites présente une densité suffisante pour calculer par interpolation, ces valeurs en tout point de la région étudiée. Dans certaines zones, on dispose ainsi de cartes donnant les lignes d'égales hauteurs de niveaux extrêmes.

Un exemple de tracé des hauteurs atteintes par la mer pour une période de retour de 75 ans est présenté pour la Mer d'Iroise et la rade de Brest (figure 8.3). Cet exemple est le résultat de l'exploitation de toutes les données disponibles dans cette zone pour cartographier les niveaux extrêmes correspondant à la période de retour donnée.

Le calcul des incertitudes sur les valeurs obtenues est également possible. Les résultats mettent souvent en évidence certaines lacunes du réseau de mesures et permettent de déceler les zones où des observations de marée supplémentaires sont souhaitables.

4 • Les différents « niveaux moyens »

Il faut reconnaître que la notion de niveau moyen (souvent noté NM) de la hauteur $h(t)$ observée est ambiguë. Elle renvoie en effet intuitivement à une grandeur caractéristique supposée constante. Or, par définition même, les valeurs de NM sont fondamentalement variables puisqu'elles dépendent à la fois de l'instant central t_n du laps de temps choisi et de la durée T de ce dernier :

$$\mathrm{NM}_{t_n,\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{t_n-\mathrm{T}/2}^{t_n+\mathrm{T}/2} h(t)\mathrm{d}t. \tag{8.28}$$

De plus, en ce qui concerne la marée, cette ambiguïté est accentuée par le fait que l'appellation « niveau moyen » n'est pas attribuée à la moyenne (8.28) des hauteurs observées $h(t)$. Cette appellation est davantage réservée à un filtrage de données, plus élaboré que la moyenne mathématique (8.28) qui représente le cas particulier du filtrage de $h(t)$ par la porte symétrique de largeur T.

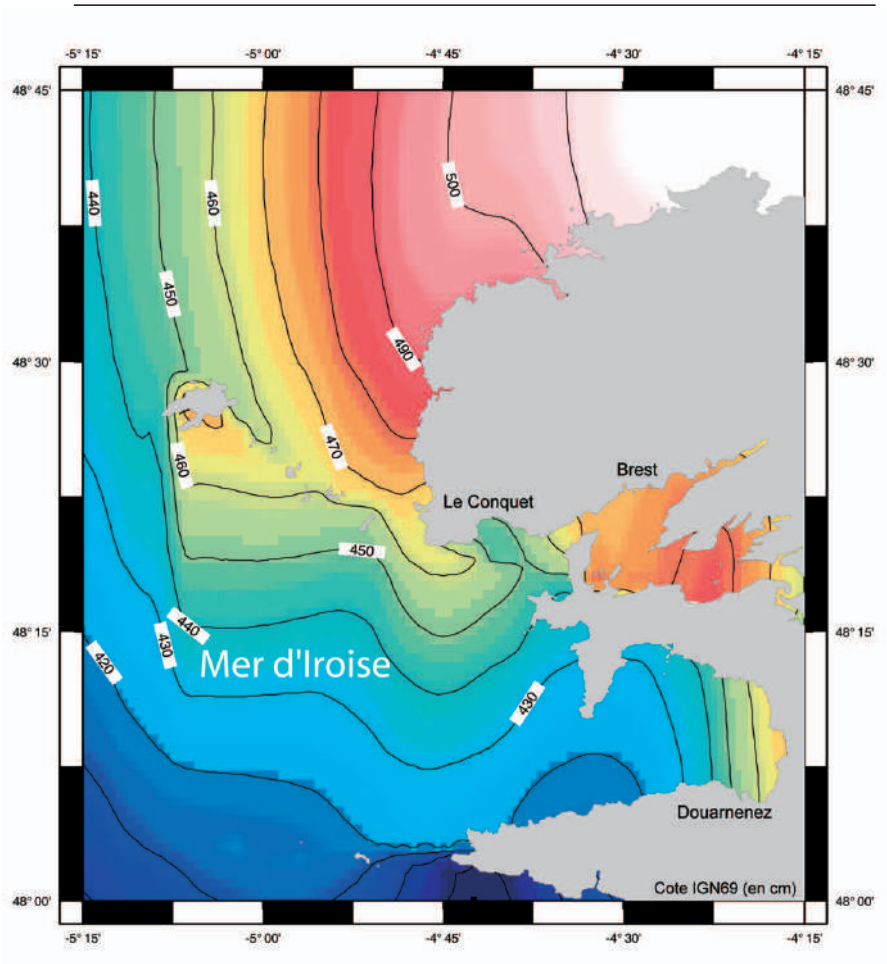


Figure 8.3 — Mer d'Iroise et rade de Brest (France) : cartographie des lignes de mêmes niveaux extrêmes correspondant à une période de retour 100 ans. La hauteur est donnée par rapport à la cote IGN 69 en cm.

Selon un usage bien établi en marégraphie, il est convenu d'appeler niveau moyen le résultat d'une opération sur les hauteurs mesurées tendant à éliminer la marée astronomique. Cet usage s'est imposé notamment pour la définition des différents niveaux moyens, dont le niveau moyen journalier. En effet, la durée du jour du temps solaire moyen (24 h) n'est pas exactement la période de la marée ($T_{M_1} \approx 2T_{M_2} \approx 24{,}84$ h), la simple moyenne sur 24 mesures horaires laisse un résidu contenant des composantes de marée très gênantes pour les études statistiques du niveau moyen journalier.

4.1 • Le niveau moyen journalier

Pour les besoins de la connaissance des variations lentes du niveau de la mer, le filtrage numérique des mesures $h(t_n + mt_e)$, échantillonnées selon un pas de temps t_e(de part et d'autre d'un instant t_n), consiste à réaliser l'opération dite de filtrage défini par :

$$\overline{h}(t_n) = \sum_{m=\mathrm{M}_i}^{m=\mathrm{M}_j} w(mt_e)h(t_n - mt_e) \tag{8.29}$$

où $w(mt_e)$ est le filtre $w(t)$ échantillonné tous les t_e par la distribution porte de largeur $(\mathrm{M}_j - \mathrm{M}_i)t_e$ centré sur l'instant $(\mathrm{M}_j + \mathrm{M}_i)t_e/2$, en général différent de zéro.

En appliquant ce filtre à l'exponentielle $e^{-j2\pi\nu t}$, on obtient directement la fonction de transfert $\mathrm{FT}(\nu)$:

$$\mathrm{FT}(\nu) = \sum_{m=\mathrm{M}_i}^{m=\mathrm{M}_j} w(mt_e)e^{-j2\pi\nu(t_n - mt_e)}.$$

La fonction de transfert $\mathrm{FT}(\nu)$ doit être réelle. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le filtre $w(t)$ soit symétrique (fonction paire) et échantillonné par une distribution porte centrée sur l'origine. Il nous faut donc :

— d'une part : $w(mt_e) = w(-mt_e)$,

— d'autre part : $\mathrm{M}_i = -\mathrm{M}_j = \mathrm{M}$, $t_n = 0$.

En désignant respectivement $w(mt_e)$ et $w(-mt_e)$ par a_m et a_{-m} (en notant que $a_m = a_{-m}$), l'expression de la fonction de transfert d'un filtre numérique symétrique peut s'exprimer par :

$$\mathrm{FT}(\nu) = a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} a_m \cos(2\pi\nu mt_e). \tag{8.30}$$

S'agissant d'un calcul du niveau moyen, le filtre doit restituer sans modification une hauteur qui serait constante (indépendante du temps). Ainsi la fonction de transfert doit être égale à l'unité pour la fréquence nulle, soit :

$$a_0 + 2\sum_{m=1}^{m=\mathrm{M}} a_m = 1.$$

Le choix des coefficients a_m permet en théorie d'attribuer au filtre les caractéristiques désirées. Supposons, par exemple, que l'on désire un filtre dont la valeur de la fonction de transfert (8.30) soit imposée en M points. Une solution serait de résoudre le système de $\mathrm{M} + 1$ équations à $\mathrm{M} + 1$ inconnues permettant de calculer les coefficients a_m. Cette procédure n'est

cependant pas réaliste pour calculer un niveau moyen. Le filtre idéal serait un filtre passe-bas dont la fonction de transfert serait la porte symétrique de largeur $2\nu_0$ dans le domaine des fréquences ($\nu_0 > 0$).

On s'aperçoit que, pour atténuer les oscillations introduites par une telle fonction de transfert entre les fréquences imposées, le filtre correspondant ne peut être approché que par un très grand nombre de coefficients. Or, chacun de ces coefficients est affecté à une grandeur observée, ce qui signifie que pour approcher le filtre idéal, il est nécessaire de prendre en compte un grand nombre d'observations de part et d'autre de l'instant t_n auquel le filtre est appliqué. Il est évident qu'un compromis doit être établi. D'une part, on ne cherchera pas nécessairement à approcher le filtre idéal, mais on s'attachera de préférence à lui attribuer certaines caractéristiques jugées primordiales pour le problème à résoudre. En ce qui nous concerne, l'élimination des composantes de la marée est l'objectif prioritaire. D'autre part, on fixera une limite supérieure pour le nombre de coefficients à prendre en considération. L'examen des filtres proposés par différents auteurs montre qu'un consensus implicite se soit dégagé : le nombre maximum de coefficients $a_m(t_e = 1h)$ est fixé à $\mathrm{M}_{\max} + 1 = 36$. Comme $a_m = a_{-m}$ ce nombre de valeurs permet de réaliser un filtrage dont la hauteur moyenne journalière est attribuée à l'instant de la mi-journée d'un jour donné, en prenant en compte les mesures disponibles sur trois jours (la veille, le jour même et le lendemain, soit 72 heures).

Le tableau 8.3 donne les coefficients des différents filtres couramment utilisés pour le calcul des niveaux moyens journaliers (p.m. : ces filtres sont symétriques). Le filtre W_{25} est la moyenne de 25 valeurs horaires. La période de la marée, plus proche de 25 que de 24 heures, ce filtre est plus efficace que la moyenne de 24 hauteurs horaires. De plus, il permet de centrer le calcul sur midi de chaque jour. D'une mise en œuvre très aisé, ce filtre est cependant moins efficace que celui de Doodson qui possède la même qualité de simplicité. De nos jours, avec l'utilisation des moyens informatiques, le critère de simplicité n'est plus déterminant pour le calcul de la hauteur moyenne journalière.

D'une manière générale, l'efficacité de ces filtres est jugée d'après leur aptitude à atténuer les composantes de marée. Les coefficients de résidu des ondes principales sont présentés dans le tableau 8.4. La comparaison de ces résultats avec ceux déduits de la méthode des hauteurs réduites (HR : dernière colonne du tableau 8.4) est instructive. Cette dernière est la seule à donner des coefficients de résidu qui sont nuls pour l'onde dominante M_2 et les suivantes (M_3, M_4, M_6, M_8).

Tableau 8.3 — Principaux filtres numériques pour le calcul du niveau moyen journalier à partir de valeurs horaires du niveau marin. Le nombre de valeurs prises en considération pour chaque filtre est toujours un nombre impair, égal à $1 + 2m_{\max}$.

heure	W_{25}	Doodson	Munk	Godin	Demerliac
m	$25a_m$	$30a_m$	$10^7 a_m$	$14\,400a_m$	$24\,576a_m$
0	1	0	395 287	444	768
1	1	2	386 839	443	766
2	1	1	370 094	440	762
3	1	1	354 118	435	752
4	1	2	338 603	428	738
5	1	0	325 633	419	726
6	1	1	314 959	408	704
7	1	1	300 054	395	678
8	1	0	278 167	380	658
9	1	2	251 492	363	624
10	1	0	234 033	344	586
11	1	1	219 260	323	558
12	1	1	208 050	300	512
13		0	195 518	276	465
14		1	180 727	253	435
15		0	165 525	231	392
16		0	146 225	210	351
17		1	122 665	190	325
18		0	101 603	171	288
19		1	85 349	153	253
20			72 261	136	231
21			60 772	120	200
22			47 028	105	171
23			30 073	91	153
24			13 307	78	128
25				66	105
26				55	91
27				45	72
28				36	55
29				28	45
30					32
31				15	21
32				10	15
33				6	8
34				3	3
35				1	1

Tableau 8.4 — Coefficients de résidu pour les principales ondes de marée obtenus par les différents filtres utilisés pour le calcul de « niveau moyen journalier ».

ondes	W_{25}	Doodson	Munk	Godin	Demerliac	HR
Q_1	0,074 31	0,010 41	0,007 40	0,001 03	0,001 62	0,002 76
O_1	0,032 80	0,002 99	0,001 41	0,000 19	0,000 43	0,003 38
P_1	−0,037 38	−0,000 13	−0,000 96	0,000 00	0,000 00	−0,000 19
K_1	−0,042 60	0,000 15	−0,000 74	0,000 00	0,000 00	−0,000 30
N_2	−0,012 79	0,001 71	0,000 89	0,000 04	−0,000 16	−0,000 14
M_2	0,006 42	-0,000 58	0,000 02	0,000 01	−0,000 04	0,000 00
S_2	0,040 00	0,000 00	−0,000 20	0,000 00	0,000 00	0,000 84
K_2	0,042 55	0,000 33	−0,000 15	0,000 00	0,000 00	0,001 06
M_3	−0,006 50	−0,009 09	−0,000 08	0,000 01	0,000 04	0,000 00
M_4	0,006 62	0,002 59	0,000 30	0,000 01	0,000 00	
MS_4	0,021 16	0,004 84	0,000 00	0,000 01	0,000 42	
M_6	0,006 99	−0,001 98	−0,000 39	0,000 01	−0,000 07	0,000 00
M_8	0,007 55	−0,003 84	−0,000 06	0,000 01	−0,003 63	0,000 00

4.2 • Les niveaux moyens mensuels et annuels

Les calculs de niveaux moyens mensuels et annuels sont issus simplement des moyennes arithmétiques des niveaux moyens journaliers. Ces moyennes constituent de nouveaux filtrages qui atténuent les coefficients de résidu résultant des filtres pour les niveaux journaliers. Les nouveaux coefficients de résidu sont ceux du tableau 8.4, (sauf pour S*a* et M*f*) multipliés par les facteurs correspondants dont la liste est indiquée dans le tableau 8.5, selon la durée en jours (j) du mois (28, 29, 30 ou 30 j) ou de l'année (365 ou 366 j).

Les moyennes étant faites sur un nombre entier de jours, les composantes solaires ne sont pas atténuées. Mais leur phase à midi ne variant pas, leur résidu se traduit simplement par un terme constant.

5 • Les variations du « niveau moyen » à long terme

L'évolution des niveaux moyens annuels fait l'objet d'études très actives pour tenter de détecter les tendances à long terme et de les relier au réchauffement climatique observé. La présentation succincte de cette partie se limite à exposer le problème des observations et de la prévision, ainsi que l'examen des causes et des conséquences possibles.

Tableau 8.5 — Facteurs à appliquer aux coefficients de résidu « journaliers » (tableau 8.4) des ondes principales (sauf Sa et Mf) pour obtenir ceux correspondant aux niveaux moyens mensuels (28, 29, 30 ou 31 jours) et annuels (365 ou 366 jours).

ondes	28 j	29 j	30 j	31 j	365 j	366 j
Sa	0,990 4	0,989 7	0,989 0	0,988 2	0,000 7	0,002 1
M f	0,024 3	0,057 0	0,084 5	0,105 9	0,009 3	0,007 3
Q_1	0,003 7	0,031 1	0,060 2	0,081 0	0,000 9	0,001 9
O_1	0,013 8	0,021 4	0,053 2	0,080 4	0,009 6	0,007 6
P_1	0,990 4	0,989 7	0,989 0	0,988 2	0,000 7	0,002 1
K_1	0,990 4	0,989 7	0,989 0	0,988 2	0,000 7	0,002 1
N_2	0,030 2	0,005 6	0,038 4	0,065 2	0,000 9	0,001 9
M_2	0,054 1	0,018 4	0,015 7	0,047 0	0,010 0	0,008 0
S_2	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0
K_2	0,961 8	0,959 1	0,956 2	0,953 3	0,000 7	0,002 1
M_3	0,053 4	0,018 6	0,015 8	0,046 4	0,002 1	0,004 7
M_4	0,052 4	0,018 7	0,016 0	0,045 7	0,006 5	0,006 4
MS_4	0,054 1	0,018 4	0,015 7	0,047 0	0,010 0	0,008 0
M_6	0,049 7	0,019 2	0,016 5	0,043 7	0,002 2	0,004 2
M_8	0,045 8	0,020 0	0,017 2	0,040 7	0,001 3	0,001 7

5.1 • Observations

Pour les besoins de l'étude du climat, les observations marégraphiques de longue durée sont précieuses, notamment celles de Brest qui ont débuté en 1806.

Avec près de 200 années de mesures, l'observatoire de marée de Brest possède la durée requise pour mettre en évidence une variation à long terme du niveau de la mer (figure 8.4).

Cet exemple montre que les fluctuations locales du niveau moyen annuel sont relativement importantes, elles peuvent atteindre ou dépasser ±5 cm d'une année à l'autre. C'est la raison pour laquelle l'évaluation de la tendance avec une bonne précision nécessite des durées d'observations de l'ordre du siècle.

À Brest, le niveau moyen a augmenté de 25 cm en 200 ans. Mais cet exemple n'est pas représentatif de l'ensemble des observations de longue durée disponibles sur l'ensemble du globe. Dans la plupart des cas, ces observations révèlent effectivement une augmentation moyenne de l'ordre de 1 mm à 2 mm/an, avec une dispersion autour de ces valeurs du même ordre

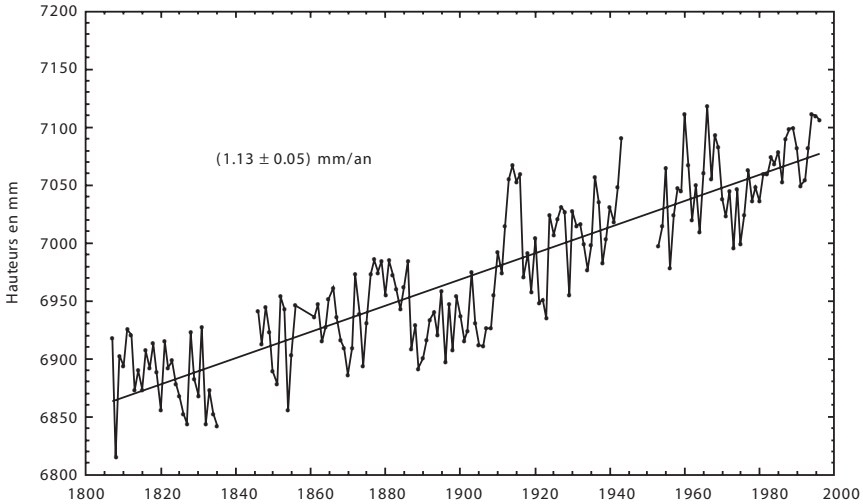


Figure 8.4 — Évolution du niveau moyen annuel à Brest de 1806 à 1997, chaque point représente le niveau moyen calculé sur une année. Sur cette durée de près de deux siècles, une tendance régulière de 1,13 ± 0,05 mm/an se dégage, mais aucune accélération n'est décelable.

que celle de Brest. Cependant, il existe des sites, notamment en Scandinavie, où la tendance est inverse.

Par ailleurs, les observations disponibles ne constituent pas un bon indicateur de l'évolution globale en raison de la répartition très inhomogène des observatoires, situés en majorité dans les régions tempérées de l'hémisphère nord. La variabilité de la tendance d'un site à l'autre est imputable principalement à des mouvements verticaux de la croûte terrestre, que les marégraphes ne peuvent évidemment pas détecter (mesure du niveau relatif). La mesure de ces mouvements tectoniques est actuellement possible grâce aux techniques spatiales qui permettent de situer les divers niveaux (marins ou terrestres) par rapport à un repère absolu.

Les données acquises par de nombreux satellites, équipés de radars altimétriques donnant une précision quasi-centimétrique (particulièrement : *Topex-Poseidon* depuis octobre 1992, puis *Jason* depuis 2003), indiquent une augmentation du niveau des océans du même ordre de grandeur que celles déjà annoncées ci-dessus. Cependant, à cause des fluctuations interannuelles, de nombreuses années de collecte de données altimétriques sur l'ensemble du globe sont nécessaires afin de diminuer l'incertitude sur cette estimation. Nous pouvons déjà noter que les données satellitales déjà acquises montrent également une grande variabilité spatiale des tendances sur des

durées de l'ordre de la décennie. Néanmoins, la fiabilité des radars altimétriques embarqués sur satellites a été démontrée et la qualité des données recueillies s'améliore au cours des années. En outre, les techniques de géodésie spatiale offrent la possibilité de positionner, avec une précision centimétrique, des points spécifiques à la surface de la Terre dans un système de référence géocentrique unique, l'« ITRS » (*International Terrestrial Reference System*), qui a été adopté par l'Union géodésique et géophysique internationale (UGGI). Les systèmes opérationnels, tels que GPS et Doris, permettent de rattacher les niveaux de référence des marégraphes dans l'« ITRS ».

On peut dès lors surveiller l'évolution du niveau de la mer dans un repère absolu. Des programmes internationaux et nationaux, pour améliorer la précision des référentiels et des modèles de géoïde à partir de ces techniques spatiales, sont actuellement en cours de réalisation. Pour les mêmes raisons que pour les données altimétriques, des résultats exploitables (pour l'étude de l'évolution du niveau des mers à long terme) ne peuvent être attendus avant plusieurs années.

Enfin la mesure de l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre offre une autre possibilité de détection des mouvements verticaux de la croûte terrestre. Il existe des appareils pouvant détecter une variation de la pesanteur, équivalant à une variation de hauteur de quelques millimètres.

5.2 • Les causes de la variation à long terme du niveau marin

Actuellement, les mesures altimétriques indiquent que le niveau global des mers s'élève, mais leur durée et leur précision ne sont pas suffisantes pour déceler une quelconque accélération. En attendant des mesures plus nombreuses et plus précises, l'analyse des causes possibles peut fournir une aide précieuse à la compréhension du phénomène et éventuellement à la prévision de son évolution.

L'origine de l'augmentation du niveau des mers est généralement attribuée au réchauffement climatique dû à l'effet de serre dont le principal agent est le gaz carbonique atmosphérique. Cependant, les mesures du niveau marin à Brest ne permettent pas de mettre en évidence une accélération de la tendance consécutive au développement industriel.

En effet, les relevés des différents paramètres donnent les éléments suivants :

— la concentration en gaz carbonique a progressé de 25% depuis le début de l'ère industrielle ; elle croît actuellement au rythme de 0,4 à 0,5% par an.

— la température moyenne de l'atmosphère a crû de 0,5°C au cours du siècle dernier.

Cet échauffement a une influence sur le niveau des mers par l'intermédiaire de divers processus, en particulier la fonte des glaciers et calottes polaires et la dilatation des couches superficielles de l'océan. Mais les mouvements du sol agissent également sur le niveau océanique.

5.2.1 • Fonte des calottes glaciaires ; dilatation thermique de l'océan

En raison des différences de volumes, on distingue les glaciers de montagnes et les calottes glaciaires (Antarctique et Groenland). Le volume d'eau stocké dans les glaciers de montagne représente l'équivalent de 30 cm à 50 cm du niveau de la mer. Sa contribution à l'élévation a été de 1 cm à 4 cm au cours du siècle passé. Elle pourrait atteindre une dizaine de centimètres au cours du XXIe siècle.

La fonte totale des calottes glaciaires élèverait le niveau de l'océan de 87 mètres environ (80 pour l'Antarctique et 7 pour le Groenland). La question concernant l'importance de ce phénomène par rapport à l'effet de serre est l'une des plus controversées.

Pour l'Antarctique, depuis les scénarios catastrophes, avancés dans les années 1980 et largement diffusés par la presse, les estimations de fonte moyenne annuelle sont régulièrement revues à la baisse. La possibilité d'une disparition de la calotte Antarctique de l'Ouest, qui a alimenté cette polémique, n'est plus guère attendue avant plusieurs siècles. Il semble au contraire établi que le volume de la calotte glaciaire Antarctique ait tendance à augmenter. Cette calotte est en effet généralement soumise, été comme hiver, à des températures largement négatives et un léger réchauffement de l'atmosphère dans cette zone ne permettrait pas de provoquer une fonte significative. Au contraire, un accroissement de la température provoquerait une élévation de l'humidité qui entraînerait des chutes de neige plus abondantes et donc un stockage d'eau sous forme de glace au détriment de l'océan.

L'atmosphère au-dessus de la calotte glaciaire du Groenland est beaucoup moins froide qu'en Antarctique. Malgré quelques facteurs stabilisants, la calotte nordique devrait présenter une contribution positive à l'évolution du niveau des mers. Néanmoins, il semblerait que le bilan des contributions des deux calottes serait légèrement négatif.

La dilatation thermique des couches superficielles océaniques (dit aussi « effet stérique » par les océanographes) contribue à la variation du niveau marin. L'échauffement de l'atmosphère agit sur la température de l'océan par divers processus physiques, regroupés bien souvent sous le terme d'interactions océan-atmosphère (rayonnement, évaporation, précipitation, conduction thermique, …). Un accroissement de 1°C de la température d'une

colonne d'eau de mer à 15°C de 1 000 m d'épaisseur entraînerait une augmentation de niveau de l'ordre de 16 cm. Cependant, l'échauffement homogène d'une telle couche d'eau n'est pas réaliste. La diffusion, vers les couches profondes de l'océan, de l'échauffement de surface est un processus complexe et non linéaire qui doit être intégrée dans le cadre plus vaste de la circulation thermo-haline à l'échelle de l'Océan mondial. Elle pourrait par exemple se manifester par une moindre production d'eaux profondes aux hautes latitudes (Mer de Weddell dans l'Océan Austral ; Mers du Labrador et du Groenland dans l'hémisphère boréal).

La contribution du réchauffement océanique à l'élévation du niveau des mers au cours du siècle passé est estimée à 4 ± 2 cm.

5.2.2 • Les mouvements de la croûte terrestre

Les mouvements du sol sont d'origine isostatique, tectonique ou anthropique.

Mis en évidence à l'échelle de plusieurs milliers d'années (correspondant aux cycles de glaciation et déglaciations aux latitudes élevées), ces mouvements verticaux dus à la charge ou à la fonte des glaces, ont atteint des amplitudes de plusieurs centaines de mètres. Aujourd'hui encore, le « rebond élastique » qui est consécutif à la dernière déglaciation (terminée depuis plus de 7 000 ans) se fait sentir de manière très sensible. Dans le golfe de Botnie (mer Baltique), le niveau apparent de la mer baisse d'un mètre par siècle. L'analyse des niveaux moyens semble montrer un basculement autour d'un pivot passant par l'Écosse et le sud de la Scandinavie. La France pourrait subir de ce fait une subsidence qui serait le contrecoup de ce rebond élastique.

L'activité humaine peut également avoir localement une influence très importante. C'est le cas par exemple dans le Golfe du Mexique en raison de l'exploitation des champs pétroliers qui provoque une subsidence. Dans le delta du Mississippi, le problème est aggravé par l'exploitation des nappes aquifères et le compactage des sédiments du fleuve.

5.3 • Prévisions et conséquences

Toute tentative de prévision de l'élévation du niveau des mers doit nécessairement être précédée d'une modélisation prenant en compte l'évolution climatique et en particulier l'élévation de la température de l'atmosphère. Or dès ce stade, des incertitudes importantes apparaissent dont l'une des principales est l'estimation des émissions des gaz à effet de serre dans les prochaines années.

Par ailleurs, il est nécessaire de poursuivre les efforts de modélisation, car les modèles actuels ne rendent pas compte parfaitement des évolutions

passées. En effet, rien ne permet de dire que l'échauffement observé correspond au début de l'effet de serre, prédit par les modèles. L'échauffement de l'atmosphère n'est pas incompatible avec la variabilité naturelle du climat. De plus, les modèles prévoient un certain réchauffement des pôles, qui n'est pas clairement mis en évidence. Au contraire, certaines régions circumpolaires semblent se refroidir.

En fait, les prévisions d'une montée globale du niveau de la mer varient en fonction de la date de leur publication. Si l'on se base sur les prévisions pour l'année 2100, depuis les scénarios « catastrophes » du début des années 1980 où certaines publications faisaient état d'une augmentation globale de 3,5 m, on assiste à une régulière révision à la baisse de cette estimation. Paradoxalement, on a pu constater, au début des années 1990, une augmentation relative de l'incertitude, c'est-à-dire de l'écart entre prévision haute et prévision basse. Cependant, il semble que l'on s'achemine actuellement vers un resserrement de cet écart avec une augmentation de l'ordre de 50 cm à l'horizon 2100.

Les conséquences d'une élévation du niveau des mers sont extrêmement variées. Il n'est pas possible d'être exhaustif dans ce domaine. En effet, selon l'amplitude du phénomène, ces conséquences dépendent du type de côte, de son relief et surtout de l'importance de la population vivant dans la frange littorale.

En plus des submersions d'espace qui sont actuellement hors d'atteinte, on peut s'attendre à des érosions accrues et à des salinisations d'eaux souterraines.

Il faut cependant se garder d'une vue simpliste, car la côte n'est pas passive face à l'élévation du niveau de la mer. Les végétations des marais maritimes et des mangroves favorisant le taux d'accrétion sédimentaire peuvent, localement, compenser cette évolution. Les changements climatiques peuvent modifier le régime des fleuves et le bilan sédimentaire littoral.

Celui-ci est par ailleurs souvent gravement affecté par l'effet de piégeage des barrages et des travaux de régulation sur les fleuves. De même, le recul des plages, souvent constaté, trouve sa cause essentiellement dans un déficit sédimentaire dont l'origine est parfois naturelle, mais surtout et trop souvent anthropique. Enfin, il convient d'être prudent avant d'attribuer les conséquences de constructions hasardeuses ou d'extractions inconsidérées à l'élévation du niveau constatée dans le passé.

IX

Références de hauteur et sondages hydrographiques

Le choix et la réalisation des références verticales ainsi que leurs cotations relatives constituent des problèmes fondamentaux en hydrographie.

Ces problèmes sont traditionnels, mais les technologies nouvelles, liées essentiellement aux observations satellitales et à l'évolution des moyens informatiques modifient profondément la façon de les aborder.

Les systèmes de positionnement GPS/Glonass/*Galileo*, le développement de l'altimétrie spatiale, la reconnaissance par toute la communauté géodésique d'un système unique de référence internationale, l'ITRF, la détermination du champ global de gravité de la Terre avec une résolution spatiale toujours meilleure, ainsi que le développement de modèles hydrodynamiques de plus en plus performants, amènent à considérer de nouveaux systèmes de référence.

Cependant, les systèmes traditionnels demeurent, et il est nécessaire de pouvoir coter précisément ces référentiels les uns par rapport aux autres.

La réduction des sondages hydrographiques consiste à rapporter les profondeurs mesurées au sondeur à un niveau arbitraire mais précisément défini, auquel peut être rattaché le niveau de référence des cartes marines, appelé zéro hydrographique, avec une précision suffisante pour les besoins de la navigation. Cette opération consiste à résoudre deux problèmes :

— coter dans un référentiel connu le zéro hydrographique, fonction de la position géographique,

— coter, par rapport à cette référence, le niveau marin qui varie à la fois avec position géographique et avec l'instant du sondage.

Ces problèmes sont en grande partie indépendants (même si les cotations sont issues des mêmes mesures et des mêmes traitements – en particulier, les méthodes traditionnelle et spatiale reposent toutes deux sur l'analyse et la prédiction de la marée) et peuvent être résolus à l'aide de techniques différentes.

1 • Définitions

Les principes à la base de la réduction des sondages sont élémentaires mais peuvent aboutir à des interprétations erronées ou confuses à cause du sens imprécis attribué à certains termes. En particulier, les références de hauteur effectivement utilisées sont diverses, et il est nécessaire d'en bien préciser le sens afin de les situer les unes par rapport aux autres.

Par ailleurs, les techniques spatiales permettant des mesures différentes des mesures classiques, il est indispensable de définir des références et des procédés de réduction rigoureux.

1.1 • Caractéristiques du zéro hydrographique

Le zéro hydrographique, référence commune aux cartes marines et aux annuaires de marée, présente deux caractéristiques fondamentales :

il est défini en fonction de critères marégraphiques visant la meilleure sécurité possible pour la navigation : c'est une estimation du niveau des plus basses mers astronomiques possibles, selon les recommandations de l'OHI (Organisation hydrographique internationale), il est coté dans un référentiel terrestre, soit (traditionnellement) par rapport à un repère stable situé à proximité d'un marégraphe terrestre, soit (désormais) par rapport à une surface de référence, de manière à assurer sa conservation sur le long terme et à permettre ainsi d'utiliser avec cohérence des levés effectués à des époques différentes. Cette surface devra être rapportée à un système de référence internationale tel l'ITRF *(International Terrestrial Reference Frame)*.

À proximité des stations marégraphiques côtières, ces deux problèmes sont résolus grâce à l'analyse des observations et à la possibilité de coter celles-ci par rapport à des repères implantés à proximité des marégraphes, repères eux-mêmes cotés dans des réseaux de nivellement terrestre.

Au large, il est nécessaire de recourir à des modèles de marée, qui doivent être évalués en fonction de leur aptitude à fournir pour le zéro hydrographique des résultats répondant aux critères de qualité requis pour tout référentiel, à savoir : précision, accessibilité, stabilité, exactitude.

1.2 • Niveau des plus basses mers astronomiques

Le zéro hydrographique doit être, selon la recommandation de l'OHI (Organisation Hydrographique Internationale), confondu aussi bien que possible avec le niveau des plus basses mers astronomiques. Le qualificatif « astronomique » signifie qu'il ne s'agit pas d'un niveau directement observé, mais d'un niveau calculé à partir de la force génératrice de la marée due aux actions gravitationnelles de la Lune et du Soleil. Cependant, cette marée « astronomique » est généralement calculée à l'aide de la formule harmonique, basée sur des constantes harmoniques issues de l'analyse d'observations préalables.

Il apparaît deux difficultés.

En premier lieu, la précision du calcul est très variable selon la qualité et la durée des observations préalables disponibles, la correction ou non des effets météorologiques et océanographiques, les méthodes et moyens de calcul, le type et l'amplitude de la marée.

En second lieu, à cette marée astronomique se sont superposées, pendant la durée des observations, des variations de niveau provoquées par d'autres phénomènes (non astronomiques, mais de nature météorologique et océanographique par exemple), ainsi qu'une tendance séculaire de variation du niveau des mers. Il en résulte que son calcul effectué sur la base d'observations réalisées à des époques différentes donnerait des résultats différents et que ce calcul est donc entaché d'incertitude.

Retenons que la notion de niveau des plus basses mers est, d'une part intrinsèquement approximative, d'autre part étroitement liée aux notions de niveau moyen dont il va maintenant être question. Ne respectant pas les critères de précision et de stabilité, il ne peut, en toute rigueur, constituer une référence exacte de hauteurs pour l'hydrographie ; mais une fois calculé, il peut servir à situer le zéro hydrographique qui sera ainsi « approximativement » au niveau des plus basses mers astronomiques.

1.3 • Niveau moyen, niveau moyen nominal, surface moyenne océanique (SMO)

Le terme de « niveau moyen » de la mer (NM) est ambigu. Il renvoie en effet intuitivement à une grandeur supposée constante. Or elle est fondamentalement variable puisqu'elle dépend de la période pour laquelle elle a été calculée. S'il s'agit effectivement d'une moyenne, elle est obtenue à l'aide de la formule suivante où t_1 et t_N sont les dates de début et la fin des observations et $h(t_n)$ la hauteur mesurée du niveau de la mer à l'instant t_n, l'origine des mesures de hauteur étant fixe et l'intervalle de temps entre mesures étant

généralement constant et petit devant l'intervalle entre pleines et basses mers successives.

$$\mathrm{NM}_{t_1}^{t_\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} h(t_n)$$

En pratique (voir chap. VIII, §4), dans les exposés relatifs à la marée, l'appellation « niveau moyen » n'est pas attribuée à la stricte moyenne des niveaux observés, mais au résultat d'un filtrage numérique (dont la moyenne n'est qu'un cas particulier). Selon un usage établi, on convient d'appeler « niveau moyen instantané » (NMI) le résultat d'une opération consistant à retrancher la marée astronomique des hauteurs mesurées.

$$\mathrm{NMI}(t) = (\text{hauteur observée à l'instant t}) - \sum \mathrm{A}_i \cos(q_i t - \alpha_i)$$

D'après cette définition, le niveau moyen instantané peut, à des fins statistiques, être considéré comme une variable aléatoire qui serait la hauteur de la surface libre en l'absence d'oscillations périodiques dues aux effets astronomiques. La moyenne des NMI donne un résultat plus juste que la simple moyenne des hauteurs car elle minimise les résidus des composantes périodiques, lesquels sont faibles de toute façon sur des périodes longues ; c'est donc généralement à partir du NMI que l'on calcule le niveau moyen NM sur de longues périodes. La difficulté vient du fait que, quelle que soit l'échelle de temps, même assez longue (quelques années), cette variable aléatoire n'est pas stationnaire car la moyenne dépend de l'échantillon considéré. La figure 8.4, dans laquelle l'élévation séculaire des niveaux moyens annuels à Brest est mise en évidence, en fournit une illustration parlante.

Le niveau moyen (qui devrait être accompagné au moins des dates de début et de fin et de la méthode de calcul) et le niveau moyen instantané, rapportés à un référentiel terrestre, sont fonction du temps. Cette variabilité ne permet pas de conférer à l'un d'eux le statut de référence verticale, car l'un des critères fondamentaux, la stabilité, n'est pas respecté.

Pour les prévisions de marée, on utilise le niveau moyen calculé sur la plus longue période possible que l'on fige par rapport à la terre et aux référentiels terrestres. Ce niveau est appelé « niveau moyen nominal » (NMN). Ce calcul est réalisé pour les sites où les observations de marée sont de longue durée, si possible plusieurs années. Ces sites seront appelés par la suite ports de référence.

Dans l'application de la formule harmonique à la réduction des sondages, on suppose que le niveau moyen instantané et le niveau moyen nominal, et donc aussi tous les autres niveaux moyens, définissent des surfaces parallèles, mais tandis que la cote du niveau moyen instantané est fonction du temps,

la cote du niveau moyen nominal rapportée à une référence terrestre est constante.

Par la suite, il sera assez souvent fait mention de la surface moyenne océanique (SMO), calculée à l'aide des mesures altimétriques de satellites. La hauteur ellipsoïdale de la surface de la mer est moyennée en chaque point de la trace (après diverses corrections destinées notamment à éliminer la marée astronomique. Après interpolation pour combler les zones non couvertes entre les traces, le résultat se présente sous la forme d'une surface moyenne, représentative du niveau moyen en chaque point (avec la résolution permise par les écarts entre les traces des satellites) pendant la période d'observation.

On ne sait pas aujourd'hui mesurer la SMO près des côtes par satellite, et la résolution est seulement de quelques dizaines de kilomètres, ce qui limite encore son emploi en hydrographie.

1.4 • Géoïde

Un géoïde est une surface équipotentielle du champ de pesanteur terrestre.

Un géoïde est déterminé à terre par nivellement géométrique en utilisant aussi les mesures de gravimétrie ; les repères de nivellement des marégraphes sont, si possible, rapportés à un géoïde, en pratique la surface de référence du nivellement terrestre, que nous appellerons ici « géoïde du nivellement terrestre ».

En mer, le même géoïde peut être prolongé à l'aide de mesures gravimétriques. Un argument important pour l'utilisation d'un géoïde en tant que référence pour la marée est le fait que la référence verticale des modèles mathématiques utilisés pour simuler la dynamique des océans est une équipotentielle du champ de pesanteur. En tout point la verticale locale est perpendiculaire au géoïde. Une erreur très courante consiste à le confondre avec la SMO. Ces deux surfaces doivent en effet être distinguées car la SMO est, par rapport au géoïde, affectée par des phénomènes, qualifiés ici de « météorologiques et océanographiques ». On peut citer la circulation générale océanique (Ainsi à une latitude de 45°, un courant de 1 m/s sur 10 km de large crée une dénivelée de 10 cm perpendiculairement au courant), la répartition moyenne des densités, les gradients de pression atmosphérique et les effets non linéaires de la propagation de la marée dans les zones de petits fonds. À eux seuls, les effets non linéaires sont, par exemple en Manche, responsables d'écarts pouvant atteindre une dizaine de centimètres (figure 9.1).

Le géoïde à prendre comme surface initiale des modèles de simulation est également différent du géoïde du nivellement terrestre : le géoïde en mer

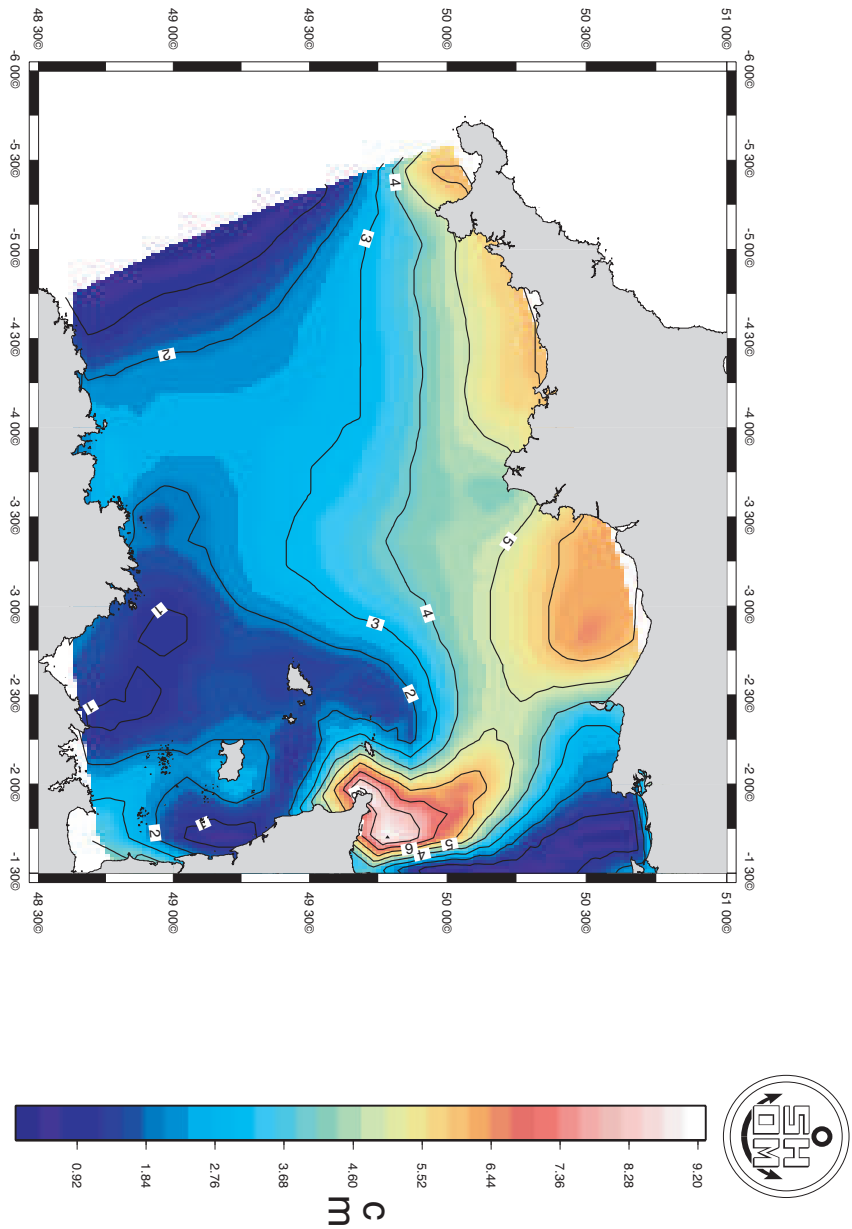


Figure 9.1 — Influence des effets non linéaires de la marée sur l'écart entre la SMO et le géoïde en centimètres (calculé par le Shom avec le modèle utilisé pour la réduction des sondes).

est une équipotentielle du champ de pesanteur qui correspondrait sensiblement à la surface d'un océan homogène au repos de densité égale à la densité moyenne de l'océan à l'instant initial, soumis à une atmosphère elle-même homogène et au repos. Nous l'appellerons « géoïde marin ». Le géoïde marin n'est pas très éloigné dans sa détermination pratique du géoïde du nivellement terrestre, qui est habituellement calé sur le niveau moyen de la mer, mais éventuellement mesuré à une époque ancienne et en un point éloigné. Il ne coïncide cependant pas avec lui (ne serait-ce qu'en raison de l'évolution séculaire du niveau des mers) et les écarts, qui ne sont pas mesurables aujourd'hui avec précision, pourraient atteindre plusieurs dizaines de centimètres, ce qui est trop pour l'hydrographie et pour l'étude de la circulation océanique.

Il est possible, grâce à la formule harmonique, de coter le niveau des plus basses mers astronomiques, et donc le zéro hydrographique, par rapport au niveau moyen sur la période considérée. Les variations des constantes harmoniques en fonction des variations du niveau moyen sont négligeables dans la pratique, ainsi que dans les modèles, propriété fondamentale pour la détermination du zéro hydrographique et pour la réduction des sondages par la méthode dite traditionnelle, car elle permet de s'affranchir presque complètement de l'incertitude sur la cote du niveau moyen.

Un modèle numérique complet devrait permettre de coter le zéro hydrographique par rapport au géoïde marin, qui est la référence verticale du modèle. Mais c'est en pratique difficilement réalisable car cela suppose une simulation portant sur plusieurs années avec la prise en compte des effets extérieurs météorologiques et océanographiques cités plus haut (hors effets non linéaires de la marée qui sont facilement pris en compte par les modèles). En outre, les décalages relatifs du niveau moyen et du géoïde ne sont pas bien connus aux frontières ouvertes des modèles, ce qui interdit la simulation des circulations résiduelles induites et des variations de hauteur correspondantes.

Pour qu'une telle modélisation puisse être appliquée sur de grandes étendues en utilisant le géoïde marin comme référence, il faudrait d'une part que celui-ci soit calé avec précision dans un repère terrestre (ou spatial) et d'autre part que toutes les variations de la SMO par rapport au géoïde marin soient connues avec précision (cm). Nous sommes encore loin d'une telle connaissance, qui progresse cependant grâce aux techniques spatiales (dont gravimétrie) et aux modélisations.

1.5 • Ellipsoïde et ITRF

Un ellipsoïde de référence est une surface mathématique définissant un système géodésique à partir des positions relatives de points situés à la surface de la terre. La stabilité de cette référence, comme de toute autre référence géodésique, dépend du nombre et de la répartition géographique des points servant à la définir ainsi que de la diversité des techniques utilisées pour les localiser. L'intérêt de l'ellipsoïde est qu'il est une référence commode, notamment pour certaines techniques spatiales, et en particulier en altimétrie. Selon les recommandations de l'UGGI et de l'AIG de 1991, l'International Terrestrial Reference System (ITRS), réalisé avec l'International Terrestrial Reference Frame (ITRF) devrait être utilisé pour toute application qui requiert une précision meilleure que le mètre. Bien que le WGS84, système de référence du GPS, soit plus populaire, cette recommandation est toujours valable car l'ITRS est réalisé à partir d'une couverture géographique très dense de plusieurs centaines de points, contre seulement une vingtaine pour le WGS84, et à l'aide de différentes techniques (VLBI, SLR, GPS, Doris), contre une seule pour le WGS84 (GPS). En pratique, les réalisations des deux systèmes sont assez proches, mais l'ITRS est, sur le plan conceptuel, indépendant de la technique et toute technique nouvelle ayant fait ses preuves peut y contribuer. En particulier, il ne faut pas négliger les évolutions futures et l'apparition de nouveaux systèmes de positionnement (Galileo,…). Un autre argument (s'il en était besoin) est constitué par le fait que l'ITRS est maintenu et amélioré par la communauté internationale et ne dépend donc ni d'un organisme ni d'un pays mais d'une association scientifique internationale, l'AIG (International Association of Geodesy). Qui lui apporte son label de qualité scientifique.

1.6 • Repères terrestres et nivellement

Dans les ports, le zéro hydrographique et le niveau moyen nominal sont matérialisés par leurs cotes par rapport à des repères de nivellement. Ces repères sont situés à proximité du marégraphe et sont en nombre suffisant et suffisamment espacés pour qu'ils ne puissent pas être détruits simultanément, par exemple lors de travaux portuaires. Ils sont cotés les uns par rapport aux autres par nivellement géométrique, et si possible rattachés au nivellement général. Il faut souligner que le zéro hydrographique n'est pas défini par sa cote dans le nivellement général. Il est important en effet que la cote du zéro ne soit pas remise en cause par des opérations de nivellement successives qui peuvent donner des résultats différents, non seulement en raison de l'évolution des techniques de mesure, mais aussi en raison de

mouvements verticaux terrestres éventuels d'origine tectonique ou sismique. Mentionnons à ce propos que la surcharge due à la marée elle-même peut provoquer des mouvements verticaux (périodiques – comme la marée) des repères (rapportés par exemple au géoïde) pouvant excéder 20 cm ; ces mouvements sont peu significatifs localement pour l'hydrographie puisque c'est un mouvement d'ensemble du socle dont les observations et les modèles tiennent naturellement compte, mais dans certaines zones il sera nécessaire d'en tenir compte pour conserver des précisions centimétriques lorsqu'on utilisera les techniques spatiales.

2 • Précision

La notion de précision comporte deux aspects. Il faut en effet distinguer la précision résultant de la conformité plus ou moins bonne à la définition (plus basses mers), et la précision de la cotation dans un repère.

La définition du zéro hydrographique comporte un côté arbitraire, qui permet une certaine liberté comme en témoigne la diversité des définitions encore en usage. Le fait d'adopter le niveau des plus basses mers est essentiellement une facilité permettant au navigateur de déterminer aisément à partir de quelle sonde portée sur la carte il est nécessaire de prendre en compte la marée, mais la précision de la détermination du zéro hydrographique par rapport au niveau des plus basses mers, n'est pas un critère fondamental : on pourra accepter que les sondes soient rapportées « approximativement » au niveau des plus basses mers, comme cela est d'ailleurs mentionné très souvent sur les cartes marines.

Le deuxième aspect de la notion de précision est relatif au repérage du zéro hydrographique. Une fois adopté, il doit en effet être coté dans un repère stable et accessible. Cette opération est très importante, car le zéro hydrographique devant acquérir le statut de référence verticale, sa qualité principale doit être la stabilité. Pour les observatoires côtiers, la cotation par rapport aux repères doit être effectuée avec le plus grand soin, afin qu'elle ne soit pas à la merci d'une remise en cause par des opérations de nivellement successives. Une précision de l'ordre du millimètre, qui est autorisée sans trop de difficultés par les opérations de nivellement classiques, doit être recherchée. Cette précision est évidemment inutile pour la navigation maritime, mais elle est fondamentale pour évaluer la stabilité des repères et pour certaines études relatives notamment à l'évolution du niveau des mers.

3 • Accessibilité

Loin des observatoires côtiers, le principal problème à résoudre est celui de l'accessibilité de la référence verticale.

3.1 • Méthode traditionnelle

Au cours des sondages hydrographiques réalisés de manière classique, les deux surfaces directement accessibles sont la surface et le fond. Le fond peut être utilisé, mais très marginalement, pour retrouver la cote du zéro hydrographique à proximité d'un marégraphe dont les repères de nivellement ont disparu. En pratique, pour les levés traditionnels, la seule référence accessible est la surface, qui présente évidemment l'inconvénient de ne pas être stable, ce qui ne peut lui conférer qu'un statut de référence provisoire.

La procédure utilisée classiquement est fondée sur la méthode des concordances (voir chap. VII,2) qui modélise la correspondance entre les marées de deux points voisins par des régressions linéaires. Elle peut être également comprise comme un nivellement géométrique effectué par l'intermédiaire du niveau de la mer afin de rapporter les hauteurs d'eau aux seuls repères connus qui sont généralement implantés sur la côte à proximité des marégraphes. Il s'agit en fait de situer le zéro hydrographique par rapport à la surface de la mer, à l'endroit et à l'instant de la mesure, à l'aide des constantes harmoniques issues d'un modèle de marée et du décalage supposé constant dans l'espace entre le niveau moyen nominal et le niveau moyen instantané. Une procédure améliorée, mais pas utilisée pratiquement (les sondages sont généralement réalisés par temps calme), consisterait à utiliser un modèle incluant les effets météorologiques ; on gagnerait aussi certainement en précision lorsqu'on s'éloigne du port de référence ; par exemple les courants moyens instantanés engendrés par le vent peuvent générer des pentes non négligeables de la surface (Le cm pour 10 km n'est pas rare ; cf. 1.4) ; on peut tenir un raisonnement analogue pour les variations de densité, qui peuvent être importantes, notamment aux embouchures de fleuves.

La modélisation[1] permet de calculer, d'une part une hauteur de marée astronomique instantanée au point de sondage, rapportée au niveau moyen.

$$\mathrm{A_S}(\mathrm{L}, \mathrm{G}, t) = \sum_i \mathrm{A}_{si} \cos[q_i t - \alpha_{si}(\mathrm{L}, \mathrm{G})]$$

D'autre part la cote du niveau moyen nominal $\mathrm{N_S}(\mathrm{L}, \mathrm{G})$ par rapport au

1. Le Shom utilise actuellement (2005) le modèle Telemac décrit dans *Hydrodynamique des écoulements à surface libre (Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis)*, Jean-Michel Hervouet, Presses de l'ENPC, 2003.

niveau des plus basses mers. Cette cote étant une constante en un point donné, son calcul a pu être effectué a priori : elle peut être obtenue à partir d'une cartographie du niveau des plus basses mers rapporté au niveau moyen, obtenue par modélisation numérique, dont la figure 9.8 donne un exemple.

On obtient ainsi au point de sondage, la hauteur de marée astronomique par rapport au niveau des plus basses mers :

$$\mathrm{H_{AS}}(\mathrm{L}, \mathrm{G}, t) = \mathrm{N_S}(\mathrm{L}, \mathrm{G}) + \mathrm{A_S}(\mathrm{L}, \mathrm{G}, t)$$

Afin d'obtenir la cote de la surface par rapport au zéro hydrographique, cette valeur doit être corrigée pour tenir compte, d'une part des « surcotes-décotes » dues aux effets météorologiques et océanographiques, d'autre part d'un écart éventuel entre le zéro hydrographique et le niveau des plus basses mers au port de référence le plus proche. Cette dernière correction est destinée à éviter les discontinuités dans les valeurs des sondes portées sur les cartes, lorsqu'on s'éloigne du port de référence vers le large.

Soit δh_{R} la valeur de la surcote-décote au port de référence. C'est l'écart entre la marée observée et la marée prédite ; c'est aussi, en raison du procédé employé pour calculer le niveau moyen instantané, l'écart entre celui-ci et le niveau moyen nominal, et cet écart, comme il a été dit précédemment, est supposé constant dans l'espace. Cette correction est donc appliquée au point de sondage et symbolisée par δh.

Soit $\delta \mathrm{Z_R}$ la cote, rapportée au zéro hydrographique, du niveau des plus basses mers au port de référence. Une valeur non nulle est généralement la conséquence d'une détermination ancienne, éventuellement peu précise et de l'évolution séculaire du niveau moyen. Une pratique courante consiste à déterminer $\delta \mathrm{Z_S}(\mathrm{L}, \mathrm{G})$, la cote hydrographique du niveau des plus basses mers au point de sondage, à l'aide d'une concordance en hauteurs, ou ce qui revient pratiquement au même, en posant :

$$\frac{\delta \mathrm{Z_S}}{\delta \mathrm{Z_R}} = \frac{\mathrm{N_S}}{\mathrm{N_R}}$$

où $\mathrm{N_R}$ est le niveau moyen nominal rapporté au niveau des plus basses mers au port de référence.

Soit

$$\mathrm{A_R}(t) = \sum_i \mathrm{A_{R}}_i \cos(q_i t - \alpha_{\mathrm{R}i})$$

la cote de la marée astronomique au port de référence R, rapportée au niveau moyen nominal et $\mathrm{M_M}(t)$ la hauteur mesurée au marégraphe, rapportée au zéro hydrographique.

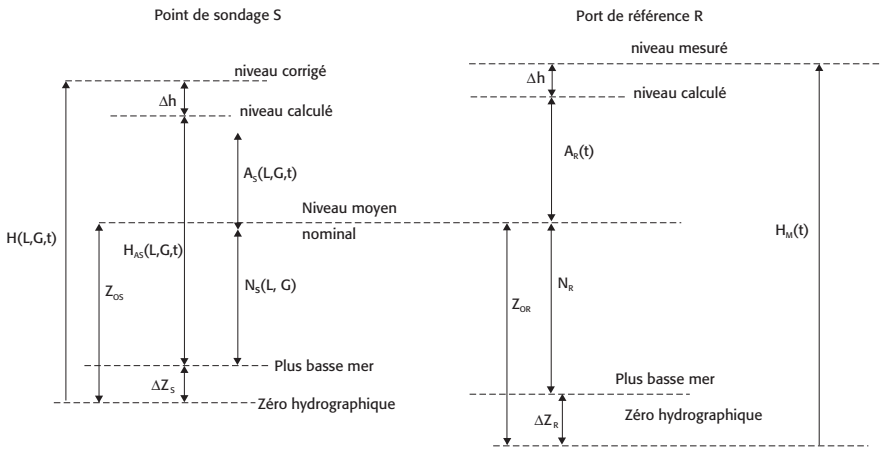


Figure 9.2 — Correction de sonde, méthode classique.

En adoptant les notations de la figure 9.2, la réduction des sondages consiste à calculer la cote du plan d'eau $H(L, G, t)$ à l'endroit du sondage S en effectuant l'opération suivante :

$$H(L, G, t) = H_{AS}(L, G, t) + H_M(t) - [A_R(t) + N_R + \delta Z_R] + \delta Z_R \frac{N_S(L, G)}{N_R}$$

Si S est l'indication du sondeur (« sonde »), la cote Z à porter sur la carte (« sonde réduite ») est :

$$Z = S - H(L, G, t)$$

Remarquons que A_S, A_R, N_S, et N_R sont rapportés au niveau moyen nominal (NMN), qui peut donc être considéré comme une référence de fait. Mais c'est une référence dont le positionnement absolu a peu d'influence sur les sondages, car le NMN intervient à la fois pour déterminer la position du zéro hydrographique par rapport au niveau des plus basses mers astronomiques et pour calculer la marée astronomique en R, et les effets en S de décalages sur ces grandeurs s'annulent presque. En effet, si l'on décale le niveau moyen nominal d'une grandeur ΔN, la cote des plus basses mers astronomiques se décale d'autant, δz_R est augmenté de la même quantité et δh, mesuré en R, varie de $-\Delta N$. En S, le zéro hydrographique est décalé de $\Delta N \cdot (N_S/N_R)$. Le décalage sur $H_{AS}(L, G, t)$, donc sur la sonde Z (en remarquant que δh en S et en R sont égaux à $-\Delta N$), est alors de $\Delta N(N_S - N_R)/N_R$. Si les amplitudes en R et S sont voisines, ce décalage est négligeable ; si ces amplitudes ne sont pas voisines, l'erreur reste faible tant que l'on ne s'éloigne pas trop des valeurs « vraies » (inconnues) et que l'on choisit bien un zéro hydrographique proche des plus basses mers astronomiques ; par exemple,

pour $\Delta N = 20$ cm, ce qui est beaucoup[2], et pour une variation relative de $(N_S - N_R)/N_R$ égale à 10 %, on trouve $\Delta H = 2$ cm, ce qui reste acceptable. Il faut souligner une conséquence importante de cette pratique : on reporte au point de sondage un écart éventuel provenant de celui existant au port de référence entre le zéro hydrographique et le niveau des plus basses mers. Si cet écart est faible, cela ne présente que peu d'inconvénient, mais dans le cas d'écarts significatifs, des difficultés peuvent survenir lors d'un changement de port de référence. Pour cette raison le SHOM a institué les « zones de marée » relatives aux principaux ports des côtes de France. Une autre difficulté provient de l'éloignement éventuel du port de référence, pouvant rendre très incertaine la méthode de correction des effets météorologiques et océanographiques par report du δh.

La procédure a pu être améliorée grâce à l'utilisation des marégraphes à capteur de pression posés sur le fond à proximité de la zone de sondage. En effet, si l'on dispose d'un mois d'observations marégraphiques, la méthode dite des « concordances par espèce » permet d'obtenir une marée astronomique suffisamment précise pour qu'il soit possible de faire jouer à ce point de mesure en mer le rôle du port de référence, permettant grâce à sa proximité une meilleure correction des effets météorologiques et océanographiques. Il est cependant nécessaire, au préalable, de coter le zéro hydrographique au point de mesure, par rapport au zéro instrumental du marégraphe immergé.

La méthode décrite ci-dessus permettant de situer le zéro hydrographique par rapport au niveau moyen nominal, il s'agit de coter celui-ci par rapport au zéro instrumental. Pour cela, on utilise l'approximation du parallélisme des diverses surfaces de niveaux moyens entre le port de référence et le marégraphe immergé, mieux vérifiée pour un niveau moyen calculé sur une certaine durée que pour un niveau moyen instantané (mais on ne peut exclure des biais indétectables sur cette durée) ; le marégraphe immergé permet également de s'assurer de la validité du modèle de marée employé. Ayant calculé la cote instrumentale du niveau moyen au marégraphe immergé pendant la période de mesure, on la corrige de l'écart entre le niveau moyen pendant la même période et le niveau moyen nominal au port de référence.

L'utilisation des marégraphes immergés ne dispense donc pas de l'observation de la marée dans un port de référence. Elle ne résout pas le problème

2. La faiblesse des variations relatives des niveaux moyens nominaux de ports voisins par rapport au géoïde terrestre (quelques centimètres) confirme qu'une erreur de 20 cm est très pessimiste, d'autant que beaucoup de ces niveaux ont été déterminés sur des périodes significativement différentes.

des zones de marée, mais elle permet de mieux compenser les effets météorologiques et océanographiques.

3.2 • Techniques spatiales

Les techniques spatiales apportent une solution différente au problème de la réduction des sondes.

En premier lieu, il est maintenant possible de coter précisément le fond de la mer dans un repère terrestre sans passer par l'intermédiaire du niveau de la mer et donc sans modèle de marée du milieu liquide. C'est donc une cotation absolue et pérenne, et c'est l'un des grands avantages de ces techniques. Il n'est pas possible aujourd'hui d'effectuer cette cotation en temps réel dans un repère mondial (ITRS par exemple), mais il est possible au voisinage d'une station de référence terrestre de se placer avec précision par rapport à cette station de référence.

Pour être précis, il faut aussi tenir compte des mouvements du socle, qu'on peut considérer comme identiques dans une zone de quelques dizaines de kilomètres pour la marée terrestre, mais pas pour les flexions du socle provoquées par la surcharge océanique, où l'on a déjà observé des gradients de l'ordre du cm pour 10 km[3] Contrairement à la méthode traditionnelle où le modèle de marée (calé sur des observations à la côte et en mer qui englobent à la fois des mouvements de la surface marine et de ceux du fond) compense aussi les mouvements du socle, la méthode spatiale, même dans certaines zones limitées, doit tenir compte de ceux-ci pour conserver la précision.

Il est également possible de positionner précisément dans un repère géodésique (ellipsoïde) la surface moyenne océanique (SMO) obtenue par altimétrie. *Topex-Poséidon* a déjà permis d'obtenir des résultats satisfaisants et *Jason* devrait permettre de progresser encore dans cette direction. La précision se dégrade près des côtes du fait de la faible résolution (10 km) et de la prise en compte inopportune de portions de terre dans les calculs ; mais il est possible d'y remédier en tirant parti des observations de marée effectuées à la côte et de leur rattachement à un système géodésique précis. Comme pour la méthode traditionnelle, la détermination du zéro hydrographique doit se faire également, dans les référentiels actuels qui restent locaux (zones de marée), par l'intermédiaire du niveau moyen nominal. Elle consiste à corriger la SMO des écarts entre le niveau moyen calculé au marégraphe de référence pendant la période de mesures altimétriques et le niveau moyen

3. cf. *La surcharge océanique*, par Françoise Duquenne, ESGT, janvier 2001.

nominal et à appliquer les résultats de la modélisation de la marée pour positionner le zéro hydrographique en tout point de la zone de marée. Connaissant la cote ellipsoïdale de la SMO, on en déduit la cote ellipsoïdale du zéro hydrographique. La référence fondamentale est toujours le zéro hydrographique au port de référence.

Notons que l'on a intérêt pour la précision des sondages, en l'état actuel des connaissances, à utiliser un modèle de marée calé sur les observations intégrant mouvements de la surface de la mer et mouvements du socle, comme pour la méthode traditionnelle. C'est de plus la méthode la plus simple. Pour atteindre la précision ultime, il faudrait modéliser tous les mouvements de la surface et du socle en tenant compte de tous les effets : marée astronomique, conditions météorologiques et conditions océanographiques.

L'augmentation de la précision des mesures et celle de la précision des modèles permettent d'envisager sérieusement une détermination continue du zéro hydrographique sur de vastes surfaces. Mais l'on est obligé de travailler dans le référentiel cartographique existant, qui est basé sur les zones de marée. Pour passer à un zéro hydrographique continu, il faudra reprendre toutes les cartes, ce qui durera probablement des décennies, car c'est un travail lourd pour lequel aucun service hydrographique n'a les ressources permettant une reprise significativement plus rapide. Reprenons les notations de la figure 9.3 : E_{SMO} = cote ellipsoïdale de la SMO issue de mesures altimétriques. Le problème consiste à déterminer E_F la cote ellipsoïdale du fond (c'est une des recommandations de l'OHI), ainsi que Z la cote hydrographique du fond.

En s'aidant de la figure 9.3, on obtient sans difficulté les résultats suivants :

$$E_F = E_{GPS} - S$$

$$Z = E_{SMO} - E_F - (\delta Z_S + N_S + \delta N_S)$$

E_{GPS}, S et E_{SMO} sont issus de mesures. La figure 9.5 donne un exemple des valeurs de E_{SMO} au voisinage des côtes de France, obtenue à l'aide des mesures altimétriques de *Topex/Poséidon*.

Soulignons un avantage essentiel de cette méthode : la cote de la surface libre dans un repère terrestre ne figure pas (même implicitement) dans la formule précédente, ce qui élimine les problèmes liés à la prédiction de marée (sauf en ce qui concerne la détermination des plus basses mers et les mouvements du socle lorsqu'ils sont significatifs) et aux effets météorologiques et océanographiques.

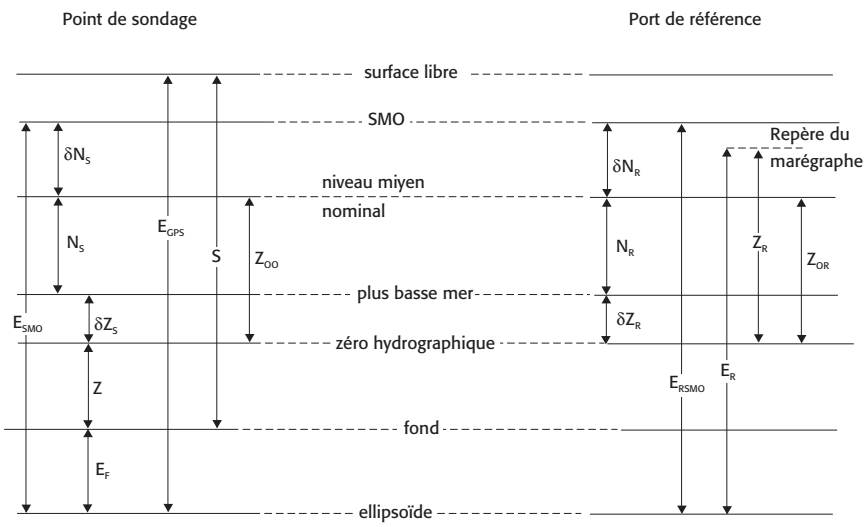


Figure 9.3 — Correction de sonde, technique spatiale.

δN_S : différence, au point de sondage entre le niveau moyen nominal et le niveau de la SMO,

N_S : niveau moyen nominal rapporté au niveau des plus basses mers au point de sondage,

δZ_S : cote hydrographique de la plus basse mer au point de sondage,

Z : cote hydrographique du fond au point de sondage,

E_F : cote ellipsoïdale du fond,

E_{GPS} : cote ellipsoïdale de la surface libre mesurée par GPS,

S : profondeur mesurée par le sondeur,

δN_R : différence, au port de référence entre le niveau moyen nominal et le niveau de la SMO,

N_R : niveau moyen nominal rapporté au niveau des plus basses mers au port de référence,

δZ_R : cote hydrographique de la plus basse mer au port de référence,

E_{RSMO} : cote ellipsoïdale de la SMO au port de référence,

E_R : cote ellipsoïdale du repère du marégraphe,

Z_R : cote hydrographique du repère du marégraphe,

Z_{00} : cote hydrographique du niveau moyen nominal.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, δZ_S est issu de la relation :

$$\delta Z_S = \delta Z_R \frac{N_S}{N_R}$$

N_S et N_R sont obtenus à l'aide des constantes harmoniques issues des modèles de marée au large et des observations au port de référence. La figure 9.8 en donne une illustration pour la Manche. δN_S est la différence entre le niveau moyen nominal et le niveau de la SMO au point de sondage. Suivant l'approximation du parallélisme des surfaces des niveaux moyens, on pose $\delta N_S = \delta N_R$ où δN_R est, au port de référence, l'écart entre le niveau

moyen calculé à partir des observations couvrant la période ayant servi à définir la surface moyenne océanique (SMO), et le niveau moyen nominal. Tous les éléments la formule de calcul de Z sont ainsi disponibles.

Il subsiste cependant une difficulté, due à l'imprécision des mesures altimétriques à l'approche des côtes, mais les mesures géodésiques de précision effectuée dans les observatoires de marée peuvent fournir une aide pour y remédier en fournissant une possibilité d'interpolation. Par exemple, à cause de cette imprécision, la cote ellipsoïdale E_{RSMO} de la SMO au port de référence ne peut pas provenir des mesures altimétriques, mais la cote ellipsoïdale E_R du repère du marégraphe peut être obtenue à l'aide de mesures géodésiques effectuées sur le site de l'observatoire, ce qui permet d'appliquer la formule :

$$E_{RSMO} = E_R - Z_R + \delta Z_R + N_R + \delta N_R$$

4 • Stabilité

La notion de stabilité d'un repère, nécessite la réponse à la question suivante : stabilité par rapport à quoi ? Cela dépend généralement du problème à résoudre : pour l'hydrographie, le critère de stabilité est tel que les valeurs des sondes ne puissent pas être remises en cause par des réalisations successives de la référence. Cela concerne notamment la stabilité de repères matériels dont la cote par rapport au zéro hydrographique est déterminée avec précision.

Nous avons vu précédemment qu'une excellente précision dans le positionnement du niveau des plus basses mers n'est pas requise, mais une fois fixée, la cote du zéro hydrographique définit celui-ci très précisément et, sauf accident exceptionnel, définitivement, indépendamment d'une détermination ultérieure éventuellement plus précise du niveau des plus basses mers. Il est important qu'une cartographie pérenne en soit établie afin d'éviter des déterminations successives. Or, dans l'intention paraissant a priori très louable d'améliorer la précision, cette règle de stabilité est souvent transgressée.

Bien que cela soit rendu possible grâce aux constantes harmoniques, en raison de la stabilité recherchée de la référence, le niveau des plus basses mers astronomiques ne devrait pas être calculé à l'occasion de nouvelles observations, mais de préférence être issu d'une cartographie globale permanente. Cependant, à cause du manque de confiance dans la qualité des modèles, et surtout du sentiment que cette qualité évolue rapidement avec les progrès des moyens de calcul, cette règle est rarement respectée. En outre, il se pose

la question de la compatibilité avec les pays riverains. L'idéal serait qu'un modèle commun soit adopté, mais des tentatives en ce sens au sein du « Tidal Working Group » de la Commission Hydrographique de la Mer du Nord, ont montré que cela présentait beaucoup de difficultés. Il faudra probablement se contenter pour le court et moyen terme, d'une sorte d'ajustement aux frontières des zones de responsabilité.

Cette cartographie du niveau des plus basses mers astronomiques est réalisée par rapport au niveau moyen du modèle, dont on a vu que la cote influait peu, dans les limites des valeurs réalistes, sur les constantes harmoniques (qui servent à calculer le niveau des plus basses mers astronomiques).

4.1 • Méthodes traditionnelles

Le niveau moyen nominal a acquis, au cours des procédures de positionnement du zéro hydrographique selon les techniques traditionnelles, le statut de référence verticale. Son accessibilité au large est assurée par l'intermédiaire d'un modèle qui permet de calculer sa cote par rapport à la surface libre au lieu et à l'instant du sondage (en supposant δh constant dans l'espace à l'instant du sondage).

La question de la stabilité du niveau moyen nominal, choisi comme référence verticale, ne se pose pas en termes de précision de sa cotation par rapport à la surface libre (qui se traduit en fait par une incertitude sur les sondes réduites), mais en termes de pertinence du choix de cette surface de référence pour résoudre le problème de réduction des sondages. Remarquons d'abord que, pour les observatoires côtiers, la référence verticale est matérialisée par les repères du marégraphe. Ce choix est pertinent car leurs mouvements verticaux éventuels devraient être proches de ceux affectant les zones côtières voisines. C'est le cas également pour le niveau moyen nominal, dont la cote par rapport à des repères côtiers est fixe.

Remarquons cependant que, en raison des procédures de réduction, les mouvements verticaux éventuels du marégraphe ont une incidence sur la stabilité de la référence verticale pour les points éloignés où les mouvements verticaux du socle terrestre peuvent ne pas être identiques à ceux du marégraphe. Ce problème ne peut être résolu correctement que par la prise en compte du positionnement géodésique de marégraphes côtiers entourant la zone de sondage et par la modélisation des éventuels mouvements, au large comme à terre. Enfin, dans l'utilisation des marégraphes immergés, une difficulté autre relative à la stabilité provient d'une possible évolution lente, non décelée pendant la période des mesures, de la pente moyenne du plan d'eau entre la zone du sondage et le port de référence. Les systèmes

futurs (faisant suite aux recherches en cours) de modélisation côtière des effets (couplés) météorologiques et océanographiques devraient permettre de quantifier cette pente.

Il n'est ici question que de la correction des sondages hydrographiques, mais il faut garder à l'esprit que le but final est le besoin du navigateur qui n'a le plus souvent à sa disposition qu'une prédiction de marée rapportée au niveau moyen nominal et non au niveau moyen instantané. La « correction de baromètre inverse » préconisée dans les annuaires des marées permet d'améliorer la précision, mais il serait préférable de disposer de la valeur de δh (écart entre le niveau moyen instantané et le niveau moyen nominal) mesurée au marégraphe, ce que pratiquent les services de pilotage de certains ports.

4.2 • Techniques spatiales

Concernant les références issues des techniques spatiales, il a été montré plus haut, à propos des ellipsoïdes de référence, que les critères de stabilité et de précision amènent à préférer l'ITRS au WGS 84. Pour positionner le zéro hydrographique, il est encore nécessaire de recourir à un niveau moyen nominal, local (et étendu par l'intermédiaire de la SMO, translatée pour s'ajuster au niveau moyen nominal au port de référence) tant que les zones de marée actuelles seront en vigueur, SMO (établie sur une longue période « bien choisie ») lorsque l'on évoluera vers un zéro hydrographique continu généralisé. Mais le niveau moyen nominal perd alors son statut de référence, car après qu'on l'aura utilisé pour situer dans le repère « ellipsoïdal » le niveau des plus basses mers, celui-ci acquiert le statut de zéro hydrographique dont la cote ellipsoïdale peut être fixée définitivement, ce qui résout le problème de la stabilité de la référence. Mais la question de la pertinence du choix de la référence ellipsoïdale se pose, car à la différence du niveau moyen nominal, qui s'appuie sur les repères côtiers, l'ellipsoïde est indépendant des mouvements verticaux des repères terrestres qui, s'ils existent, peuvent induire des variations des valeurs des sondes. L'utilisation de cette technique doit s'accompagner, si nécessaire, d'une surveillance géodésique des mouvements verticaux des repères des marégraphes proches (qui doit être prise en compte dans les diverses réalisations de l'ITRS) et de la modélisation des mouvements du socle.

5 • Conclusion, recommandations pour l'utilisation des modèles

Les difficultés essentielles liées à la réduction des sondages hydrographiques apparaissent dès que l'on s'éloigne des stations marégraphiques côtières. Le recours à la modélisation de la marée est alors nécessaire. Le rôle principal de la modélisation est de localiser le zéro hydrographique dans un référentiel lié à la terre. Cette référence étant fixée, d'autres techniques peuvent être utilisées pour déterminer les hauteurs d'eau, par exemple le GPS cinématique (et ses éphémérides précises) ou un autre modèle plus spécifique.

À proximité des marégraphes, la cote du zéro hydrographique par rapport à des repères de nivellement est rarement remise en cause, même après un positionnement éventuellement plus précis du niveau des plus basses mers. Cela évite d'ajouter à l'incertitude sur la hauteur d'eau (rapportée aux repères terrestres), l'incertitude sur la position du zéro. Au large, selon la technique mise en œuvre, le niveau moyen nominal ou l'ellipsoïde constituent les références fondamentales. Pour la même raison que celle qui conduit à fixer la cote du zéro hydrographique des stations côtières, il est souhaitable que la cote du zéro par rapport à ces références soit fixée définitivement. En fait, ce sont les performances actuelles des modèles numériques qui amènent à poser le problème de cette façon en permettant de situer le niveau des plus basses mers avec une précision suffisante pour définir ainsi le zéro hydrographique. De ce fait, la question se pose de savoir quelles sont les performances requises pour qu'un modèle puisse être utilisé dans ce but.

La localisation du zéro hydrographique dépend évidemment de sa définition, normalement le niveau des plus basses mers astronomiques. Deux options sont envisageables :

— soit le modèle fournit les niveaux de basses mers pour diverses situations de vives eaux et le niveau des plus basses mers est déduit par extrapolation,

— soit le modèle fournit des constantes harmoniques permettant de calculer le niveau de la plus basse mer extrême.

Ces deux solutions ne sont pas équivalentes, car pour la première, le niveau des plus basses mers est rapporté au niveau de référence du modèle, un géoïde s'il s'agit d'un modèle mathématique, tandis que pour la seconde, la référence est celle de la formule harmonique, le niveau moyen.

Nota : l'observation du 1.4 que « Les variations des constantes harmoniques en fonction des variations du niveau moyen sont négligeables dans

la pratique » permet de ne pas retenir une détermination précise du niveau moyen.

La seconde solution est la seule praticable aujourd'hui, car il est parfois hasardeux de recourir à des extrapolations, le géoïde marin n'est pas connu très précisément et les effets météorologiques et océanographiques ne sont pas encore modélisés avec une précision suffisante.

Pour la réduction par la méthode traditionnelle, on n'a d'ailleurs pas besoin de la position précise du niveau moyen « vrai » et pour la méthode spatiale on peut se fonder sur des mesures absolues de la SMO (avec problèmes d'interpolation près des côtes, que la modélisation des effets météorologiques et océanographiques permettra de mieux résoudre tout en permettant de mieux valider la SMO).

L'expérience acquise pour la modélisation de la marée en Manche apporte des informations sur ce qu'il a été possible d'obtenir à l'aide de ces techniques :

la simulation d'une année de marée permet de calculer les constantes harmoniques d'une liste standard en chacun des (environ) 25 000 points du modèle.

Ces constantes sont corrigées afin de correspondre au mieux à celles qui sont déjà connues, en fonction de leur degré de confiance.

Le calcul des plus basses mers astronomiques est effectué à l'aide de la méthode harmonique en chacun des points de maillage du modèle.

Cette technique permet d'atteindre une précision voisine de 1 % du marnage. Cet ordre de grandeur semble raisonnable et devrait pouvoir être adopté comme norme, corrélativement à la règle suivante : si le niveau des plus basses mers ne peut pas être déterminé à mieux que N cm (valeur typique : 10 cm), le zéro hydrographique sera abaissé à un niveau tel que, compte tenu de l'incertitude sur sa détermination, le niveau des plus basses mers astronomiques ne puisse pas lui être inférieur. Sur nos côtes, le niveau moyen a tendance à monter, ce qui permet de ne pas prendre de marge de sécurité supplémentaire.

6 • Méthodes

Nous ne décrivons dans ce chapitre que les principes des méthodes utilisées pour la réduction des sondages hydrographiques, leur mise en œuvre pratique étant décrite dans les manuels techniques à l'usage des hydrographes.

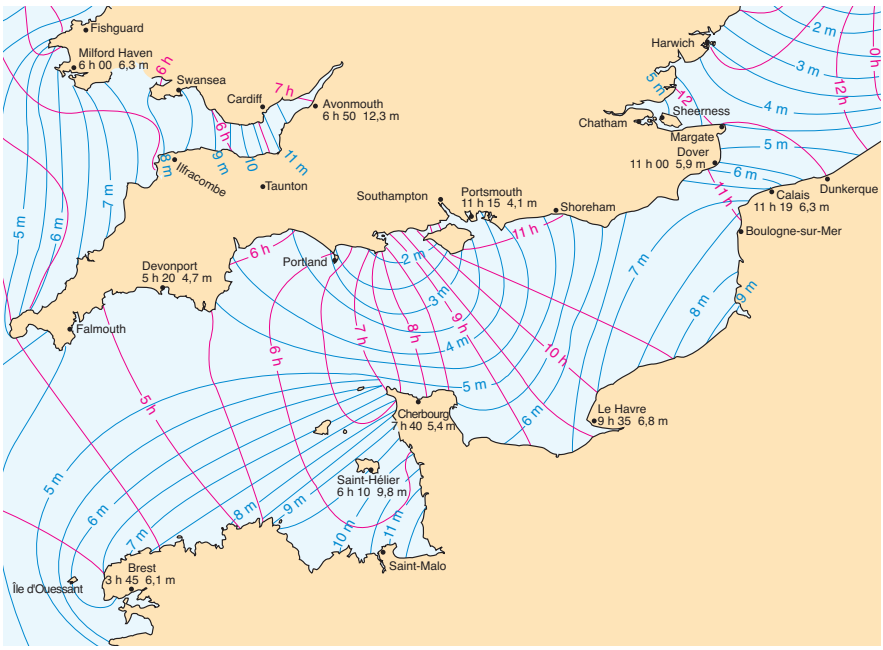


Figure 9.4 — Carte cotidale de la Manche. Les lignes bleues joignent les points où les marnages sont égaux (ici en vive-eau) et les lignes rouges les points atteints par une pleine mer au même instant.

6.1 • Cartes cotidales et d'isomarnage

La figure 9.4 montre un exemple de carte pouvant être utilisée pour la correction des sondages au large. Elle présente un réseau de lignes d'égales amplitudes et d'égales heures de pleines mers en Manche. Ce type de carte est utilisé conjointement à l'observation de la marée dans un port de référence. En appelant K(L, G) le rapport des amplitudes lues sur la carte de la marée au point (L, G) et au port de référence et θ(L, G) le retard, également déduit de la lecture de la carte, la méthode consiste à appliquer la formule :

$$h(t, \mathrm{L}, \mathrm{G}) = \mathrm{K}(\mathrm{L}, \mathrm{G})[h_{\mathrm{R}}(t - \theta(\mathrm{L}, \mathrm{G}))] + \mathrm{C}(\mathrm{L}, \mathrm{G}).$$

C(L, G) est un décalage constant si les zéros des sondes sont partout en concordance (voir chap. VII, § 2.1). Il est nul s'ils sont en concordance avec le zéro hydrographique du port de référence.

Ce procédé suppose que les marées sont semblables en tout point de la zone de levé, ce qui interdit de s'éloigner du port de référence dans les zones où les effets non linéaires sont sensibles. Une amélioration de la méthode consiste à utiliser des cartes cotidales différentes en fonction

de l'amplitude. En particulier, une carte relative à la vive-eau moyenne et une autre à la morte-eau moyenne sont généralement utilisées. La mise en œuvre d'observatoires à proximité de la zone de sondage permet également d'améliorer les résultats.

Un inconvénient de cette méthode est le recours à des procédés manuels lents et fastidieux, pour des résultats qui ne sont pas toujours d'une précision suffisante, particulièrement dans les zones de faible profondeur avec des marnages importants.

6.2 • Méthode harmonique

La méthode harmonique adaptée à la réduction des sondages consiste à appliquer la formule suivante :

$$h(t, \mathrm{L}, \mathrm{G}) = \mathrm{NM}(\mathrm{L}, \mathrm{G}) + \sum_{i=1}^{i=\mathrm{N}} h_i(\mathrm{L}, \mathrm{G}) \cos[\mathrm{V}_i(t) - \mathrm{G}_i(\mathrm{L}, \mathrm{G})]$$

$\left.\begin{array}{c} h_i(\mathrm{L}, \mathrm{G}) \\ \mathrm{G}_i(\mathrm{L}, \mathrm{G}) \end{array}\right\}$	constantes harmoniques
$\mathrm{Z}_0(\mathrm{L}, \mathrm{G})$	niveau moyen
$\mathrm{V}_i(t)$	arguments astronomiques
N	nombre de composantes harmoniques

Le problème consiste donc à rechercher la valeur des constantes harmoniques en tout point.

Deux méthodes sont utilisées : soit le réseau d'observatoires est suffisamment dense dans la zone, et il est possible de calculer les constantes en tout point par simple interpolation spatiale, soit une modélisation de la zone a permis de calculer les constantes harmoniques en tout point.

6.2.1 • Interpolation spatiale

La figure 9.5 présente la situation des points de mesures marégraphiques le long des côtes de France. La majorité des points de mesures en mer ne comportent pas plus d'un mois d'observation, mais la méthode des concordances par espèces, s'appuyant sur les constantes harmoniques et les observations simultanées du port de référence le plus proche, permet d'en tirer profit de manière optimale. Compte tenu de la variabilité spatiale des constantes, la densité des points de mesures est généralement considérée comme suffisante pour permettre, par interpolation de générer en tout point

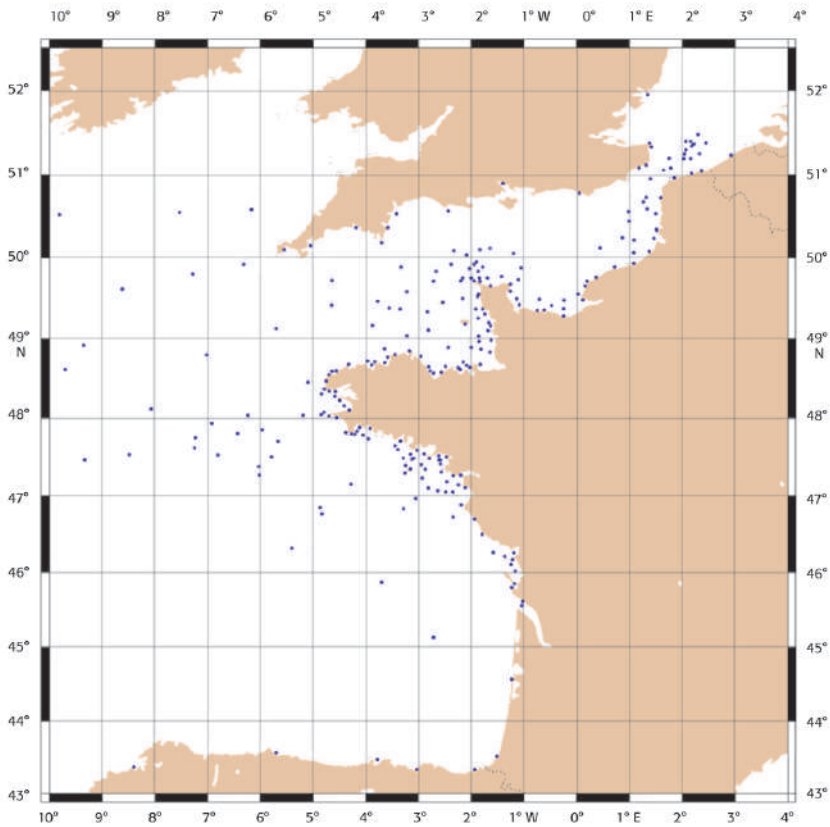


Figure 9.5 — Position des points de mesures marégraphiques.

les constantes harmoniques nécessaires à un calcul précis de la marée astronomique. La figure 9.7 montre les résultats obtenus par cette méthode pour l'onde M_2.

6.2.2 • Modélisation

L'idée d'aborder le problème d'un point de vue purement physique, consistant à résoudre les équations de l'hydrodynamique directement dans le milieu de propagation de l'onde de marée n'est pas nouvelle, mais sa réalisation pratique n'a pu aboutir que grâce aux performances actuelles des ordinateurs. Elle consiste à découper le domaine en éléments à géométrie simple, appelés mailles, et à leur appliquer les principes fondamentaux suivants :

— le principe de conservation, selon lequel la variation de hauteur d'eau dans une maille résulte de la différence entre la quantité d'eau qui y entre et

la quantité d'eau qui en sort par les côtés. Cette différence dépend exclusivement des courants traversant les côtés des mailles ;

— le principe fondamental de la dynamique, selon lequel les variations de vitesse des courants dans une maille dépendent des forces extérieures s'exerçant sur la colonne d'eau contenue dans la maille. Ces forces sont de trois types :

— forces de pression dues aux différences de hauteurs d'eau dans les mailles avoisinantes,

— force de Coriolis due à la rotation de la Terre qui tend, dans l'hémisphère Nord, à infléchir la direction du courant vers la droite,

— forces de freinage, assimilables à des frottements, qui s'exercent au voisinage du fond et des parois des mailles.

Il résulte de ces principes que les variations de hauteurs d'eau ainsi que les variations de vitesse du courant dans une maille dépendent des hauteurs d'eau et des courants dans les mailles voisines. Toutes les mailles sont interdépendantes et le problème de la variation des hauteurs et des courants doit être résolu globalement dans tout le domaine étudié.

Mais les mouvements ne peuvent exister que s'il y a un moteur : ce moteur est constitué par la marée aux limites ouvertes du modèle, celles qui ne sont pas constituées par un trait de côte. Ce mouvement imposé se propage d'une maille à l'autre dans tout le domaine.

Les calculs sont effectués à des intervalles de temps réguliers appelés « pas de temps » à partir d'une situation au repos. Les résultats ne sont exploitables qu'après une période de stabilisation correspondant en pratique à deux ou trois cycles de marée.

En pratique, les mailles sont des carrés, des rectangles ou des triangles. Le choix de la dimension des mailles est fondamental : plus celle-ci est petite, plus la résolution, et donc la précision des résultats est bonne. En contrepartie évidemment, plus les mailles sont petites, plus leur nombre est important pour une emprise donnée.

Par ailleurs, le pas de temps n'est pas indépendant de la dimension des mailles : un pas de temps trop important peut générer une instabilité numérique. Il en résulte que la diminution de la dimension des mailles augmente considérablement les temps de calcul et on est amené en pratique à la choisir de telle sorte que ceux-ci restent raisonnables.

Une autre limitation importante est la connaissance des profondeurs. Il est en effet illusoire de vouloir affiner la résolution d'un modèle si la description du milieu n'est pas réalisée à une échelle équivalente. De ce point de vue, les cartes marines sont peu aptes à fournir une bathymétrie adaptée à la modélisation hydrodynamique. Elle est en effet issue d'un choix de sondes dont

la fonction essentielle est de faire ressortir les éléments intéressant la sécurité de la navigation. Si celle-ci est assurée, la densité des informations est souvent sacrifiée au profit de la lisibilité des cartes, et les reliefs susceptibles de présenter un danger sont accentués, ce qui peut fausser la représentation objective des fonds.

La figure 9.6 montre un exemple de maillage, utilisé pour la modélisation de la marée en Manche occidentale.

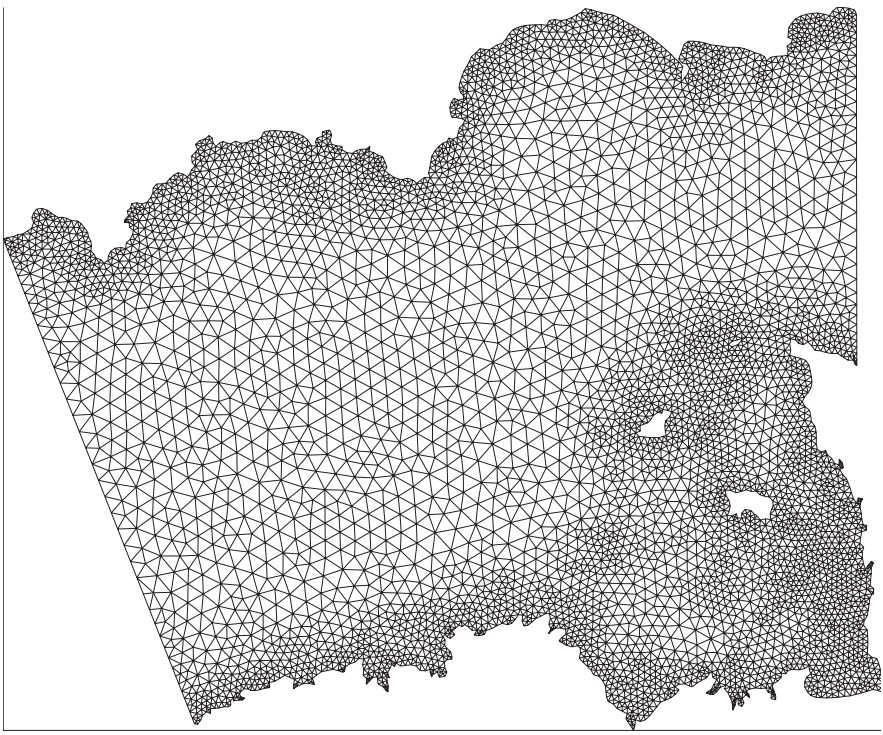


Figure 9.6 — Maillage Manche ouest. Ce type de maillage, dit « aux éléments finis » permet de raffiner les calculs là où c'est utile.

Il faut cependant souligner que malgré tous les progrès réalisés grâce aux performances actuelles des ordinateurs, la précision obtenue par les modèles numériques n'est pas suffisante à elle seule pour répondre aux besoins de la réduction des sondages hydrographiques. Un ultime ajustement est souvent nécessaire pour que les résultats correspondent aux données d'observation. Les techniques d'assimilations devraient permettre des progrès sensibles dans ce domaine.

La simulation de la marée sur une année, suivie du calcul des constantes harmoniques en tout point du maillage permet d'obtenir sans difficulté une marée théorique en tout point.

La figure 9.7 donne, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour M_2 en Manche. Les cartes de gauche représentent les situations en degrés (relatives rapportées au temps universel) et celles de droite les amplitudes en cm. Les cartes du haut sont issues de la modélisation, celles du milieu de l'interpolation et celles du bas présentent le résultat de l'ajustement du modèle.

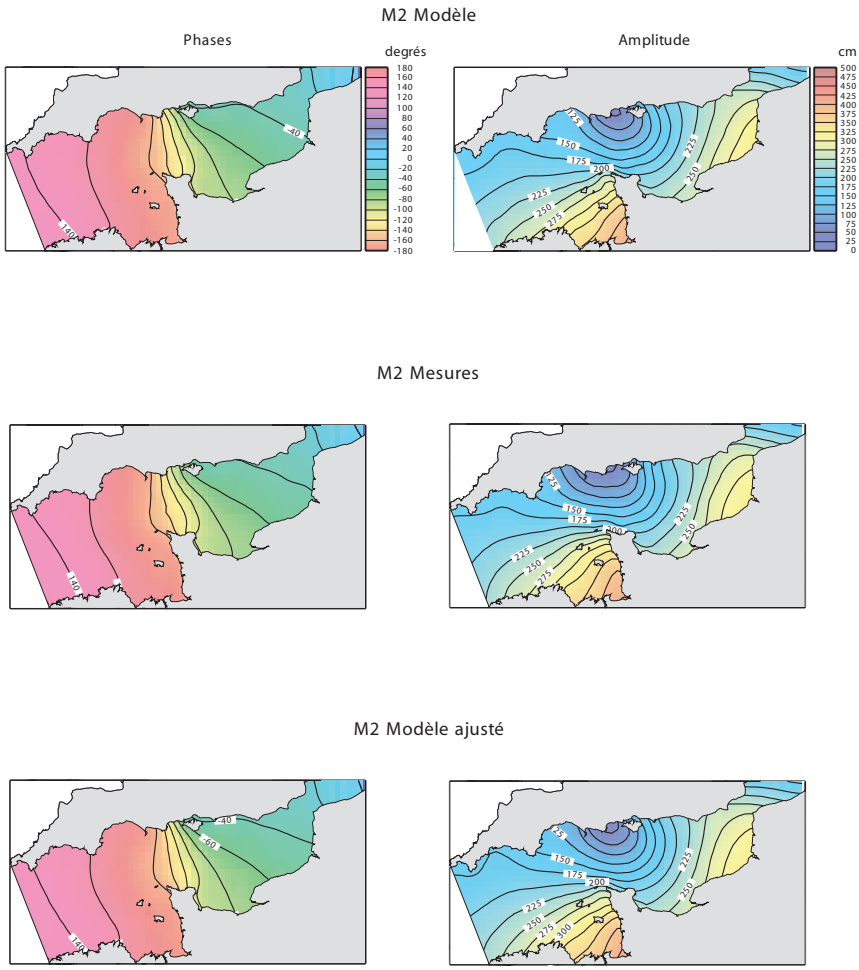


Figure 9.7 — Modélisation de M2 en Manche.

Toutes les composantes harmoniques habituellement calculées sur une année peuvent être obtenues de cette manière.

6.2.3 • Niveau moyen

$Z_0(L, G)$ est appelé « niveau moyen » afin de se conformer à l'usage, mais il s'agit en réalité du niveau moyen nominal (voir 1.3). Il dépend de la référence de hauteur, théoriquement le niveau des plus basses mers, mais en fait un niveau proche de celui-ci. Afin d'adopter un niveau de référence « concordant » avec celui du port de référence, on reporte au point de sondage la différence δZ entre le niveau des plus basses mers et le zéro hydrographique du port de référence. Une manière de procéder consiste à appliquer la formule harmonique pour l'instant de la plus basse mer théorique. Soit $t_{bm}(L, G)$ au point de sondage et $t_{bm}(L_R, G_R)$ au port de référence.

$$z_0(L, G) = \underbrace{z_0(L_R, G_R) + \sum_{i=1}^{i=N} A_i(L_R, G_R) \cos\left\{V_i[t_{bm}(L_R, G_R) - G_i(L_R, G_R)]\right\}}_{\delta z} - \sum_{i=1}^{i=N} A_i(L, G) \cos\{V_i[t_{bm}(L, G) - G_i(L, G)]\}$$

Pour déterminer l'instant de la plus basse mer théorique on a souvent recours à une prédiction sur 19 ans. Cette méthode n'est pas rigoureuse, car contrairement à une idée reçue, la période de révolution des nœuds lunaire n'est pas la période de la marée. Plutôt que de chercher l'instant du minimum, il est préférable de déterminer la valeur des paramètres astronomiques correspondant à ce minimum, suivant la méthode décrite au chapitre VIII, 2.

$$z_0(L, G) = \underbrace{z_0(L_R, G_R) + \sum_{i=1}^{i=N} A_i(L_R, G_R) \cos\{V_{imin}(L_R, G_R) - G_i(L_R, G_R)\}}_{\delta z} - \sum_{i=1}^{i=N} A_i(L, G) \cos\{V_{imin}(L, G)\}$$

6.2.4 • Surcotes-décotes

Les conditions météorologiques peuvent provoquer des écarts non négligeables entre la marée théorique et la hauteur d'eau effective. À défaut d'un modèle permettant de les estimer, la méthode utilisée consiste à reporter au

point de sondage les écarts observés au port de référence. Il est évident que ce procédé ne permet pas de garantir une bonne précision pour les points éloignés du port de référence. L'utilisation des marégraphes à capteur de pression apporte dans ce cas une aide très appréciable. Immergés dans la zone de sondage pendant une durée suffisante pour permettre le calcul de constantes harmoniques fiables, Ils peuvent être utilisés comme observatoires de référence intermédiaires pour estimer de manière plus fiable la correction de surcotes-décotes à appliquer.

L'application des procédures de calcul du niveau moyen et de correction de surcotes-décotes est schématisée par la figure 9.2. Elle implique que la correction de zéro hydrographique et la correction de surcote-décote sont incluses dans la même opération. Cette simplification apparente pose en fait le problème fondamental de la stabilité de la référence verticale car une pente du plan d'eau, éventuellement variable, entre le port de référence et le point de sondage se répercute sur la cote du niveau moyen.

7 • Modèles numériques et techniques spatiales

Les méthodes traditionnelles exposées dans les chapitres précédents ne sont pas totalement satisfaisantes. Certains inconvénients sont d'ordre pratique (mise en place de marégraphes), mais d'autres plus fondamentaux concernent la précision des résultats. En particulier, le fait que le positionnement du zéro hydrographique soit effectué en chaque point en fonction des données d'observation, soulève le problème de la pérennité de cette référence.

7.1 • Modèles numériques

Une application très importante de la modélisation numérique, qui intéresse tout particulièrement l'hydrographie est la cartographie du niveau des plus basses mers, rapporté au niveau moyen. La figure 9.8 en donne un exemple. Un modèle numérique, aussi élaboré soit-il, n'est pas parfait, mais l'imprécision, à condition d'être chiffrée et diffusée, peut être acceptable. Ce type de cartographie, peut alors être utilisé pour fixer réglementairement la cote du zéro hydrographique et lui conférer ainsi la stabilité requise. Le niveau moyen nominal (voir 1.3) est alors implicitement la référence fondamentale. Le fait que la correction de surcote-décote soit indépendante du positionnement du zéro hydrographique représente un progrès appréciable par rapport aux méthodes traditionnelles, pour lesquelles l'imprécision sur la position du zéro entre dans le bilan d'erreurs.

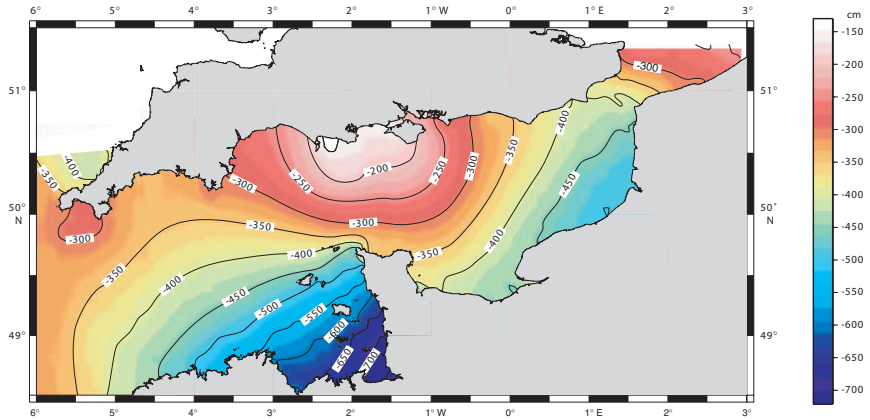


Figure 9.8 — Niveau des plus basses mers rapporté au niveau moyen.

7.2 • Techniques spatiales : GPS cinématique et surface moyenne océanique

Des travaux pour tirer parti des possibilités offertes par les techniques spatiales ont permis de développer des techniques nouvelles applicables à la correction des sondages hydrographiques. Le GPS cinématique permet de positionner verticalement, dans l'ITRS un mobile avec une précision de l'ordre de la dizaine de centimètres, compatible avec les normes requises pour les sondages bathymétriques. Par ailleurs, l'altimétrie satellitale fournit une surface moyenne océanique (SMO) que l'on sait également rapporter à l'ITRS (figure 9.8). Connaissant, grâce à la modélisation hydrodynamique, la position du zéro hydrographique par rapport au niveau moyen (figure 9.9), il est possible de situer le zéro hydrographique dans l'ITRS (figure 9.10), et donc la position du mobile par rapport au zéro hydrographique. Ce principe étant posé, quelques difficultés de mise en œuvre apparaissent, principalement à cause de l'imprécision de la SMO près de la côte. L'idée est de prendre en compte le positionnement géodésique des marégraphes afin de fournir une possibilité d'interpolation.

Diverses études ont montré la validité de cette approche, et mis en évidence les progrès à attendre d'une amélioration de la SMO et de la mise en place de stations marégraphiques afin de combler certaines lacunes.

Rappelons cependant que le positionnement du zéro hydrographique dans l'ITRS ne requiert pas une précision importante. Il suffit en effet qu'il

soit situé « à proximité » du niveau des plus basses mers, les points importants étant que :

— cette référence soit commune aux annuaires de marée et aux cartes marines,

— sa cote, une fois fixée ne soit plus modifiée.

Ces techniques sont au point et représentent un progrès certain, mais leur mise en œuvre ne peut se faire que progressivement, en raison de la nécessité de réaliser des modèles numériques élaborés, d'acquérir et maîtrisé les équipements nécessaires et de surmonter le poids des habitudes.

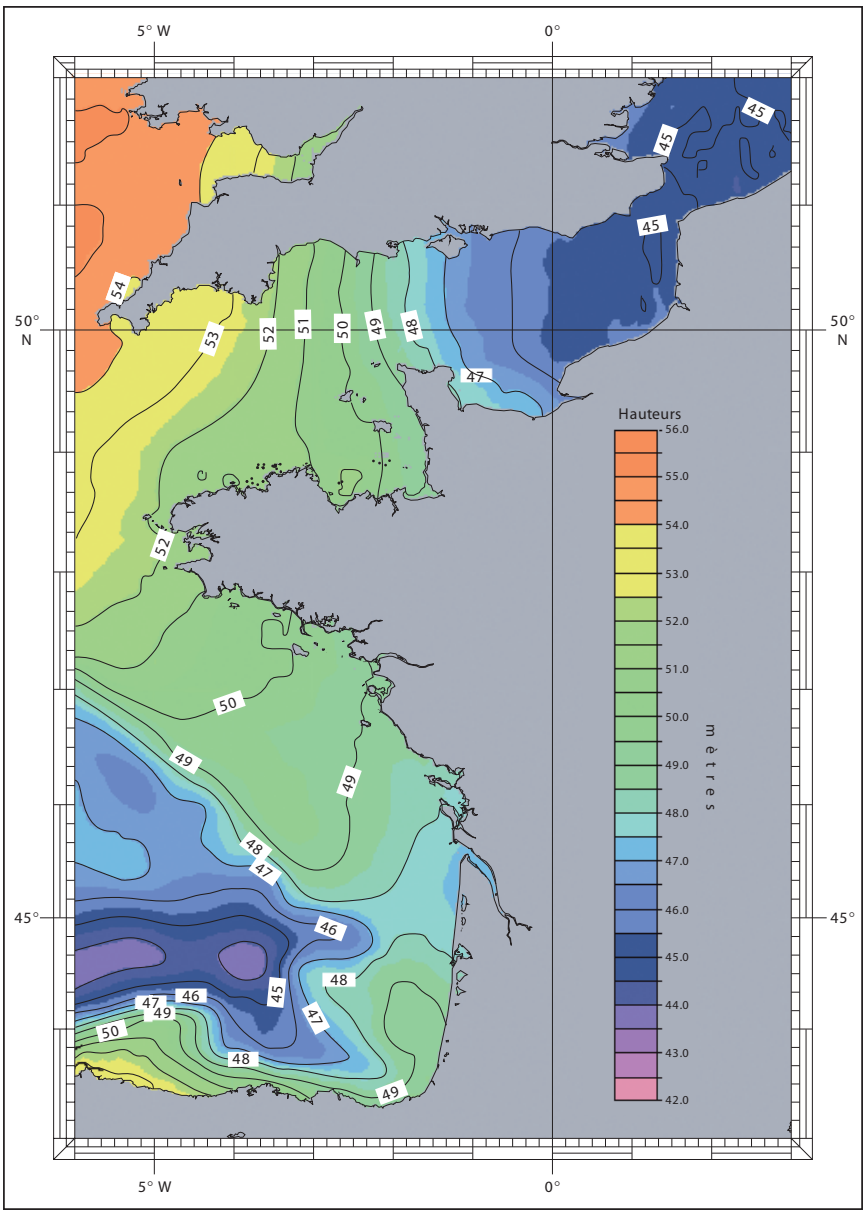


Figure 9.9 — Surface moyenne océanique obtenue par altimétrie satellitale et rapportée à l'IRTS.

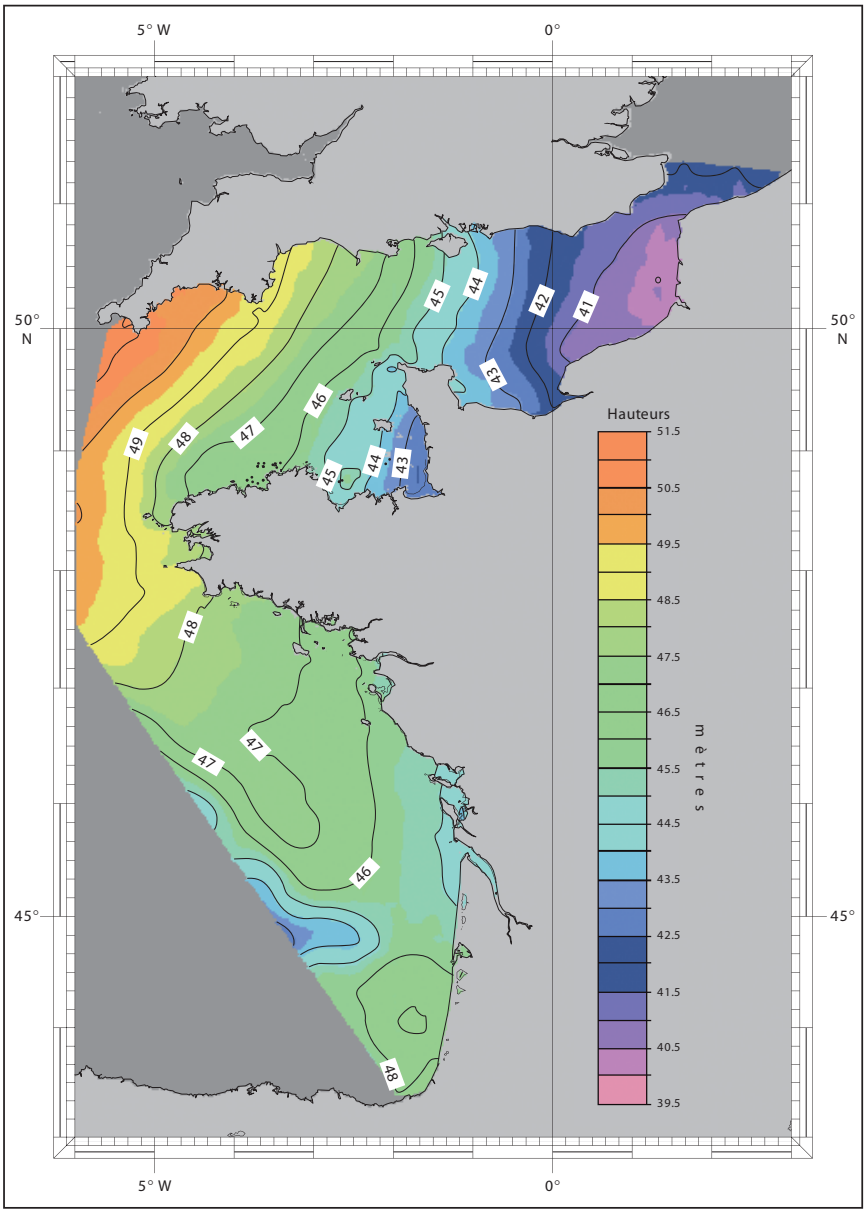


FIGURE 9.10 — Niveau des plus basses mers rapportés à l'ITRS.

X

Les courants de marée côtiers

Parmi les mouvements océaniques côtiers, certains ont des fréquences identiques à celles des composantes du potentiel générateur de la marée. Ils sont appelés courants de marée. Il faut cependant noter que les courants ont deux origines bien distinctes. En effet, nous pouvons distinguer comme pour la hauteur de la marée :

— les courants de marée dits « gravitationnels » : leur origine est la force génératrice des marées dont la cause première est l'attraction newtonienne ;

— les courants dits « radiationnels » : ils sont la conséquence des effets du rayonnement solaire sur les cycles journaliers ou saisonniers par l'ensemble des interactions entre l'océan et l'atmosphère (champ de pression, régime des vents, densité des couches superficielles de l'océan).

1 • Généralités

L'étude des courants de marée de cet ouvrage se limite aux régions côtières où l'on suppose a priori que la masse volumique de l'eau est identique de la surface jusqu'au fond. Il en est de même pour la vitesse du courant qui reste la même sur toute la couche d'eau, sauf dans la couche limite du fond où le frottement a pour effet de diminuer cette vitesse. Aussi, il convient de préciser que la question des ondes internes à fréquences de marée n'est pas abordée dans cet ouvrage.

1.1 • Les courants « radiationnels »

Nous pouvons subdiviser ces courants en trois composantes principales :

— une composante « permanente » résultant de la répartition moyenne des systèmes météorologiques et océaniques à la surface du globe ; cette « permanence » est toute relative du fait qu'elle est le résultat d'une moyenne qui dépend de la durée des mesures ;

— une composante périodique due à la succession des saisons, qui peut être interprétée comme une modulation cyclique (d'origine solaire) de la composante permanente ;

— une composante non périodique, plus ou moins aléatoire mais parfois prévisible (à partir d'observations et de modèles), ayant pour origine les actions météorologiques ou la dynamique propre de l'océan (ondes topographiques de Rossby).

À l'exception notoire des courants canalisés par la bathymétrie (détroits et chenaux océaniques) dont certains, comme le Gulf Stream, entre la Floride et le grand banc des Bahamas, peuvent atteindre près de 5 nœuds, ces courants sont faibles près des côtes. Dans cet ouvrage consacré à la marée, ces courants résiduels ne sont mentionnés que pour mémoire. Signalons simplement qu'ils se manifestent sur les mesures de courant (dont la durée est rarement supérieure à quelques mois) par des fluctuations avec une composante résiduelle parfois significative dont l'interprétation fait intervenir plusieurs processus de la dynamique océanique. En l'absence d'autres informations, il est en effet difficile de déterminer si un courant résiduel mesuré est permanent, s'il est la manifestation d'une variation saisonnière ou s'il provient d'effets météorologiques et océanographiques transitoires. En particulier le vent a un effet local non négligeable. Il entraîne les couches superficielles de la mer à environ 3 % de sa vitesse et engendre à quelques kilomètres de la côte en présence d'une thermocline saisonnière des courants dits d'inertie dont la période est fonction de la latitude L et égale à $T_{In} = 12/\sin L$ heures sidérales. L'action du vent est ainsi responsable d'un « bruit » important qui, compte tenu de la faible durée de mesures généralement disponible, peut gêner considérablement la détection des composantes de marée sur le plateau continental (en mer du Nord par exemple).

1.2 • Les courants de marée

Les courants de marée se distinguent souvent par des vitesses extrêmes parfois très élevées près des côtes. Ils peuvent en effet atteindre et dépasser les 10 nœuds dans certains endroits à fort marnage et à bathymétrie très accidentée. Leur origine « gravitationnelle » parfaitement identifiée, est une

manifestation du phénomène des marées dont la cause est la variation de la force génératrice de la marée due aux mouvements relatifs de la Terre, de la Lune et du Soleil.

L'identification et l'analyse de cette action des astres s'effectuent à partir des mesures de courant réalisées en un point pendant une durée suffisamment longue (au moins une quinzaine de jours). Les mêmes causes produisant les mêmes effets, la connaissance du mouvement des astres permet, à partir des résultats de cette analyse, de calculer les courants de marée et donc de réaliser des prédictions. Cette technique a longtemps été à l'origine des documents relatifs aux courants à l'usage des navigateurs ; elle est encore la source principale des renseignements portés sur les tableaux de courants des cartes marines.

Cependant cette procédure nécessite l'obtention de mesures de bonne qualité sur une durée suffisamment longue afin, d'une part, d'identifier et éliminer les effets météorologiques, et d'autre part, d'évaluer le plus précisément possible les composantes d'origine gravitationnelle. L'acquisition de telles mesures est souvent difficile et onéreuse, précisément dans les endroits intéressants pour la navigation maritime comme les chenaux de navigation ou les zones de courants violents. Les courantomètres sont des appareils coûteux, leur mouillage et leur récupération nécessitent des moyens importants et leur taux de perte n'est pas négligeable. Il en résulte des mesures trop peu nombreuses au regard des besoins et une répartition des points de mesures très souvent peu satisfaisante, sans espoir d'une amélioration rapide au rythme actuel des observations.

1.3 • Les mesures et leur exploitation

Les navigateurs ont pourtant dû se contenter pendant très longtemps de cette source d'information. Des publications anciennes regroupent les connaissances accumulées au fil des années, recueillies souvent auprès des navigateurs. Elles se présentent sous forme de textes décrivant le régime des courants dans certaines zones particulières et de planches sur lesquelles les courants sont représentés par des flèches. Ces informations sont surtout qualitatives, mais restent néanmoins précieuses et ont été reprises pour l'essentiel dans les publications plus récentes.

Le plus ancien ouvrage répertorié sur les courants est la *Thresorie ou cabinet de la route marinesque*, publiée en 1590 par Lucas Waghenaër, pilote de la ville d'Enchuysen. Selon Keller (exposé du régime des courants, 1855), « cette œuvre remarquable, bien au-dessus de tout ce que nos pilotes seraient en état de produire aujourd'hui » doit avoir une généalogie remontant à la domination espagnole sur la Hollande.

Malgré leur qualité pour l'époque (XVIIIe siècle), les travaux d'Halley sur les courants de la Manche n'eurent pas de succès auprès des navigateurs. Il fallut attendre les années 1830, alors que les observations anciennes étaient complètement oubliées pour voir apparaître de nouvelles études. Faute d'appareils capables de réaliser et d'enregistrer des mesures de courants, ces travaux reposaient essentiellement sur l'analyse de l'établissement des étales, rapportée à la pleine mer d'un port de référence.

Par la suite, et surtout à partir de la fin du XIXe siècle, divers types d'instruments ont été utilisés, généralement équipés d'un compas et d'un compte-tours entraîné par une hélice. Citons pour mémoire l'appareil de E. Mayer (1877) dont le compte-tours était bloqué en fin de mesure par l'envoi d'un messager le long du câble supportant le courantomètre. L'appareil le mieux connu et le plus couramment employé a été celui d'Ekman mis au point en 1932. Deux messagers envoyés le long du câble de support, commandaient le début et la fin de la mesure dont la durée était mesurée par un chronomètre. L'appareil comportait une réserve des petites billes, évacuées tous les 33 tours d'hélice et canalisées par une petite gouttière supportée par le compas. Ces billes atterrissaient ainsi dans une des 36 cases réparties régulièrement sur un support circulaire sous le compas (largeur angulaire des cases : 10°). La mesure de cet appareil était de très bonne qualité avec une moyenne vectorielle de la mesure et un double contrôle du nombre de tours d'hélice (compteur et nombre de billes). Cependant, ces appareils manuels nécessitaient la présence d'un bâtiment et d'un opérateur au point de mesure, ce qui rendait difficile leur emploi pour des mesures de longue durée.

Les techniques de mesure utilisées avec enregistreur ont été très diverses et il est hors de propos d'en faire la liste exhaustive. Signalons le tube de Pitot utilisé pour la première fois en 1932. Ensuite, la méthode la plus répandue reposait sur l'utilisation d'un rotor associé à un compas, mais il est difficile de préciser la date du premier instrument enregistreur basé sur ce principe. Un des instruments les plus performants est désigné sous le nom de « profileur Doppler ». Selon la puissance de son transducteur, cet appareil, est capable de mesurer les vitesses et directions des diverses couches océaniques, réparties de la surface jusqu'à des fonds de plusieurs centaines de mètres.

Plusieurs systèmes d'enregistrement ont également été utilisés, mais ce sont les instruments à grande autonomie qui ont permis l'obtention de mesures de courant de longue durée. Citons l'appareil à enregistrement électrique de Sverdrup et Dahl (1918-1925), le mesureur de courant à billes de Carruthers (1933) et les appareils à enregistrement photographique. Ces derniers se sont révélés relativement fiables. De forme profilée et se mettant dans la direction du courant, ils étaient dotés d'un appareil photographiant

à intervalles réguliers la direction du compas et l'indication du compte-tours de l'hélice. Cependant la qualité de la mesure individuelle était moindre que celle qui aurait été obtenue avec un courantomètre Ekman. Mais ces techniques sont désormais dépassées. Les appareils modernes font largement appel à l'électronique et à l'informatique, aussi bien pour la mesure que pour l'enregistrement avec des capacités énergétiques permettant une autonomie pouvant dépasser l'année.

Le traitement des mesures de courant est longtemps resté rudimentaire, les informations fournies aux navigateurs consistant en une indication des vitesses et directions des courants en vive-eau et en morte-eau moyenne, heure par heure, par rapport à la pleine mer d'un port de référence. Ces informations sont aisément obtenues à partir des mesures, effectuées pour satisfaire ce besoin, au voisinage des vives-eaux et des mortes-eaux moyennes. L'informatique a peu modifié ces méthodes.

La figure 10.1 présente un exemple de carte de courant élaboré à partir de telles mesures. Les courants y sont représentés sous forme de flèches dont l'origine est située au point de mesure. Les 2 indications portées sur chaque vecteur donnent les vitesses, exprimées en dixième de nœuds, correspondant respectivement aux situations d'une vive-eau moyenne et d'une morte-eau moyenne. Pour une zone donnée, 13 planches sont fournies, correspondant aux heures rondes allant de six heures avant à six heures après la pleine mer (parfois basse mer) d'un port de référence.

L'évaluation du courant (vitesse et direction) en un point donné à partir d'un tel jeu de cartes nécessite des interpolations dans le temps et dans l'espace. Il paraît évident, surtout en comparant ces planches à celles qui sont plus récentes et présentées plus loin (figure 10.3), que le résultat de cette interpolation ne permet pas toujours d'obtenir un résultat précis. La mise en œuvre d'une navigation à l'estime à partir de ces données peut s'avérer extrêmement délicate.

1.4 • L'évolution actuelle : la modélisation hydrodynamique

Les défauts des documents traditionnels concernant les courants de marées n'ont jamais été ignorés. Cependant les moyens d'y remédier ne sont apparus que récemment. Ils sont liés aux progrès de la modélisation hydrodynamique avec l'aide des moyens de calcul informatique. Ainsi, il est possible d'envisager le calcul direct des courants à partir des équations de l'hydrodynamique par une modélisation numérique. La capacité d'un modèle, à calculer les courants dans une zone, n'est pratiquement limitée que par la puissance de l'ordinateur, la précision de la bathymétrie, et la précision des conditions aux limites connues de cette zone.

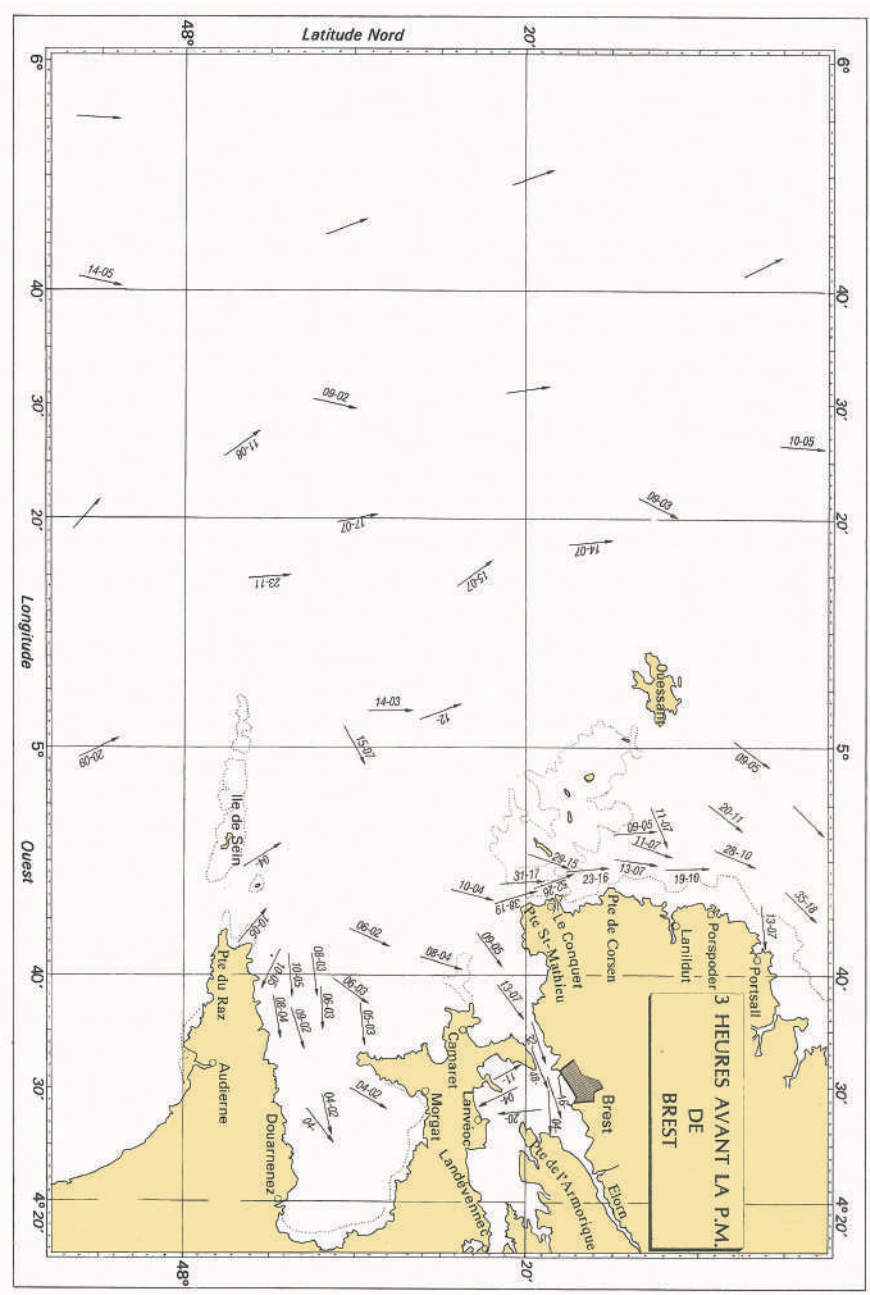


Figure 10.1 — Rade de Brest et mer d'Iroise : extrait d'atlas de courant. Chaque flèche représente un point de mesure. Sur chaque flèche, sont portées en dixième de nœuds les vitesses de courants en situations de vives-eaux et mortes-eaux moyennes.

Les principes à la base de la modélisation hydrodynamique sont exposés au chapitre IX, 6.2.2. La figure 10.2 présente la résolution qu'il est possible d'atteindre à l'aide des modèles aux éléments finis. Cependant, il convient de garder à l'esprit qu'il est illusoire d'utiliser un maillage à haute résolution si les caractéristiques du milieu, la bathymétrie en particulier, ne sont pas connues à la même échelle. Rappelons, par exemple, que les cartes marines sont mal adaptées à la réalisation de modèles numériques, car elles privilégient les informations utiles à la sécurité de la navigation au détriment d'une représentation objective des fonds marins.

Les atlas résultant de ce type de modèle apportent beaucoup plus d'informations que les atlas traditionnels établis uniquement à partir des mesures ponctuelles.

La figure 10.3 montre de manière exemplaire, par comparaison avec la figure 10.1 (où seuls les résultats issus des mesures sont représentés), l'amélioration apportée par la modélisation numérique. En raison de la violence des courants de marée à proximité des îles de Sein et d'Ouessant, les mesures directes ne sont pas possibles et aucune information n'est portée dans la carte traditionnelle (figure 10.1). En revanche, les résultats du modèle mettent clairement en évidence la violence de ces courants, notamment dans le passage du Fromveur (SE d'Ouessant) et le raz de Sein (figure 10.3). Pour de telles zones, la modélisation numérique se révèle être, en l'occurrence, un outil irremplaçable.

L'évolution des modèles numériques s'est traduite par une meilleure résolution spatiale qui a permis une prise en compte détaillée de la bathymétrie. Cette procédure a permis d'accroître considérablement la précision des résultats. Les mesures directes sont cependant toujours nécessaires, mais elles ne sont exploitées essentiellement que pour caler les modèles. De plus, avec les modèles récents, l'ajustement a posteriori entre mesures et résultats numériques n'est plus indispensable comme pour les premiers modèles.

1.5 • Les fichiers numériques de courants

Les modèles fournissent tous les paramètres hydrodynamiques (courants et hauteurs de marée notamment) en chaque point du maillage. Pour une raison évidente de présentation, il n'est pas possible de conserver sur les planches de courants toutes les valeurs calculées. Bien que des cartes marines à différentes échelles soient proposées, une perte d'informations est inévitable dans certaines zones.

L'utilisation de ces documents s'est notablement simplifiée, mais il n'en demeure pas moins que l'information à un instant déterminé n'y est pas

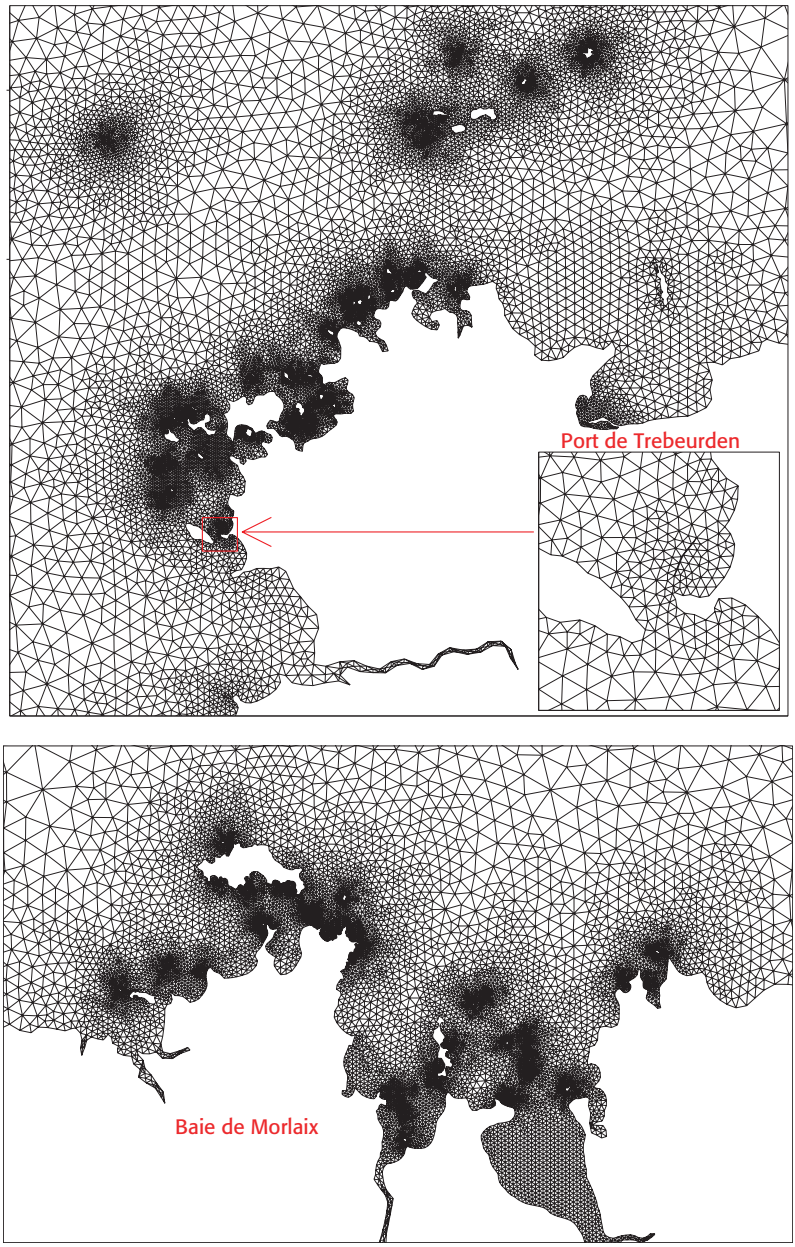


Figure 10.2 — Exemples de maillage pour la réalisation des modèles numériques permettant d'obtenir des atlas de courant des régions étudiées. Les deux planches exposées représentent deux zones de la côte bretonne (France) : la côte de Granit rose (planche supérieure), la baie de Morlaix (planche inférieure). Les segments du maillage varient de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres.

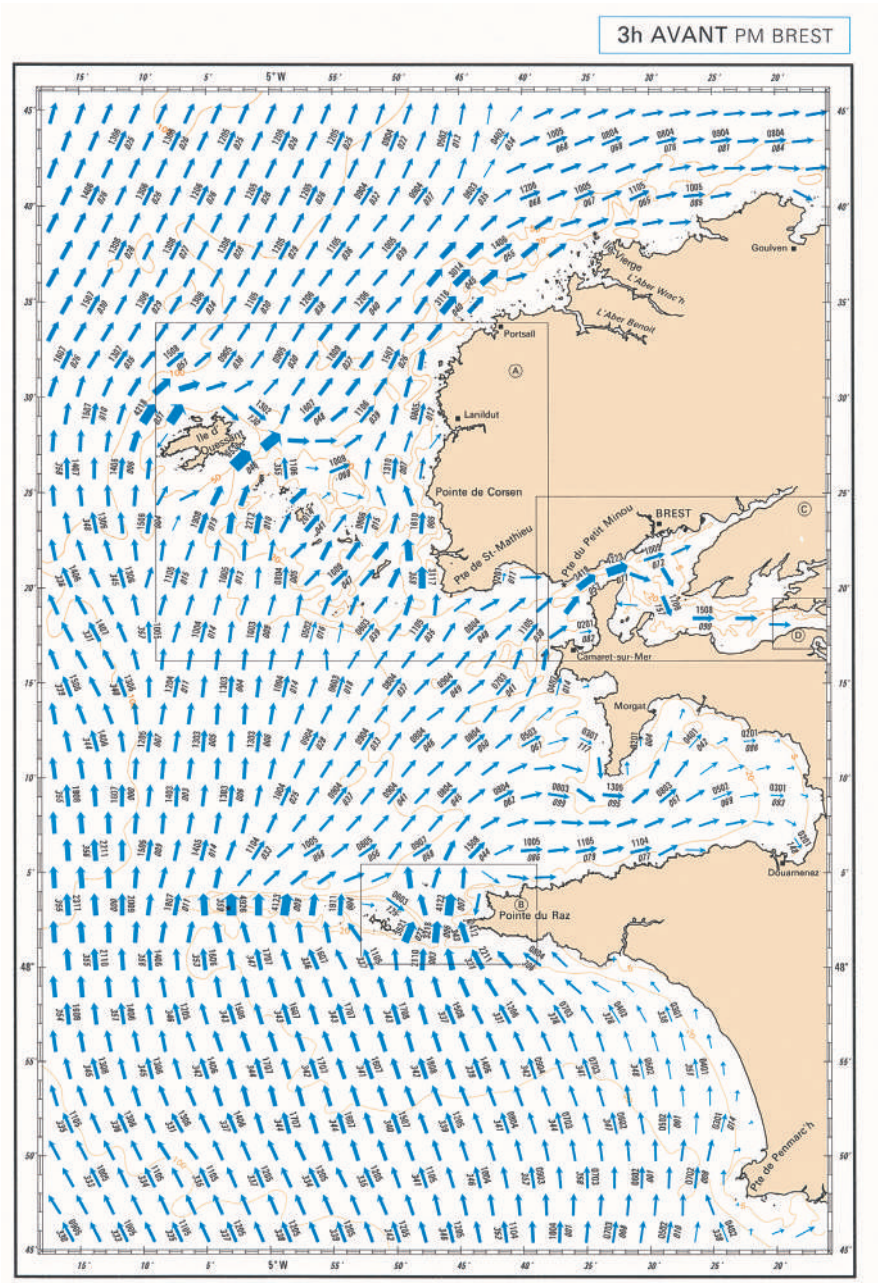


FIGURE 10.3 — Cartes de courants, résultant de la modélisation numérique, à la pointe de la Bretagne (France) : zones concernant les îles d'Ouessant (planche A) et de Sein (planche B).

transcrite. En effet, grâce à la densité des flèches portées sur les cartes, les interpolations spatiales sont pratiquement inutiles, mais le recours aux interpolations temporelles est encore nécessaire afin de calculer le courant à un instant donné.

Actuellement, les progrès de l'informatique permettent d'accélérer la procédure. Il est désormais possible d'exploiter, directement à bord des navires et à l'aide de logiciels spécifiques, les fichiers des paramètres issus des modèles numériques de courant pour obtenir l'information requise.

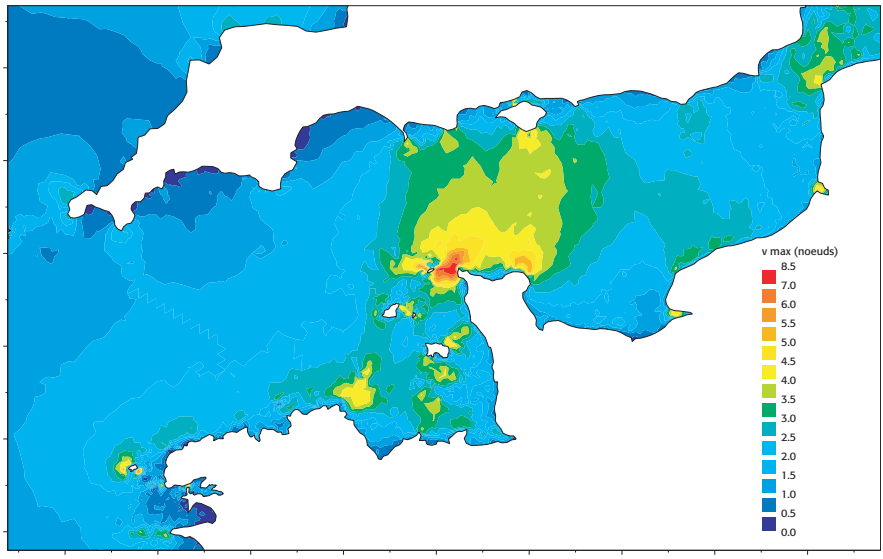


Figure 10.4 — La Manche : champ des vitesses maximales des courants de marée en vive-eau moyenne.

À partir d'un logiciel de base fournissant la vitesse et la direction du courant en tout lieu et à tout moment, divers besoins peuvent être satisfaits, notamment le routage avec des logiciels spécifiques complémentaires. La figure 10.4 présente un exemple de produit dérivé, qui n'a pas d'application particulière, mais qui est susceptible d'intéresser diverses activités maritimes.

2 • Courants de marée : définitions et caractéristiques

De même que l'on distingue le montant et le perdant dans l'oscillation verticale du niveau de l'eau au cours d'un cycle de marée, on distingue

généralement le courant de flot ou flot* et le courant de jusant ou jusant*, dans les oscillations horizontales des particules d'eau.

Les courants de marée sont soit alternatifs*, soit tournants*. Dans le premier cas, le flot a une direction à peu près constante pendant toute sa durée (environ un demi-cycle de marée). Cette direction est pratiquement opposée à celle du jusant pendant toute sa durée.

Dans le second cas, au cours d'un cycle de marée, le vecteur courant a un comportement giratoire. Sa vitesse ne s'annule jamais et peut varier dans de larges limites.

Dans le cas où les vitesses extrêmes sont très différentes, on constate souvent une faible variation de direction quand la vitesse du courant est relativement grande et une grande variation de direction quand la vitesse du courant est relativement faible. Ce sont alors des courants intermédiaires dits, selon les cas, « presque alternatifs » ou « légèrement tournants ».

La marée se manifeste comme une onde qui, en l'absence d'obstacles, prend la forme d'une onde progressive : la pleine mer (ou la basse mer) progresse à une célérité c dépendant de la profondeur H selon la formule $c = \sqrt{g\mathrm{H}}$ où g représente l'accélération de la pesanteur. En présence d'un obstacle (une côte par exemple), la composante de l'onde perpendiculaire à l'obstacle donne naissance à une onde réfléchie qui, en interférant avec la partie incidente, engendre une composante stationnaire. L'heure de la pleine mer relative à une onde stationnaire pure (célérité perpendiculaire à la côte) est la même sur une grande étendue, seule l'amplitude variant avec le lieu.

Dans le cas de l'onde progressive, le flot est le courant qui accompagne la pleine mer et porte dans la direction de propagation de l'onde marée. Il commence à mi-montant, atteint son maximum au moment de la pleine mer et s'achève au moment du mi-perdant par l'étale (ou renverse) de flot. Le jusant est le courant qui porte en sens inverse. Il commence à mi-perdant, atteint son maximum au moment de la basse mer et s'achève au moment du mi-montant par l'étale (ou renverse) de jusant.

Dans le cas de l'onde stationnaire, le flot est le courant qui accompagne le montant. Il atteint son maximum au moment du mi-montant et s'annule au moment de la pleine mer par l'étale (ou renverse) de flot. Le jusant est le courant qui accompagne le perdant. Il atteint son maximum au moment du mi-perdant et s'annule au moment de la basse mer par l'étale (ou la renverse) de jusant. Ces caractéristiques de courant sont observées généralement près des côtes.

Le phénomène de courant hydraulique, qui accompagne les variations de niveau dans les baies et les estuaires, se comporte comme l'onde stationnaire : le courant de flot, dirigé vers l'amont, correspond au remplissage. Il

est maximum vers le mi-montant, lorsque la vitesse d'élévation du niveau est la plus importante. Le courant de jusant correspondant au cas inverse. La renverse de flot a lieu au voisinage de la pleine mer et la renverse de jusant au voisinage de la basse mer.

Un exemple d'onde progressive est fourni par la Manche où l'onde marée se propage d'ouest en est. Dans la Manche, au niveau de Cherbourg et à mi-distance des deux côtes, on observe le maximum du flot portant vers l'est sensiblement au moment de la pleine mer de Cherbourg et le maximum du jusant au voisinage de la basse mer. Mais plus près de la côte, les renverses de courant tendent à se rapprocher des étales de niveau.

En général, on assiste à la superposition d'ondes stationnaires et progressives pouvant avoir des directions différentes. Il en résulte des courants, éventuellement tournants, pour lesquels :

— le flot, qui porte dans le sens de propagation de l'onde incidente, est le courant qui commence entre la basse mer et le mi-montant ; son maximum a lieu alors entre le mi-montant et la pleine mer ;

— le jusant, qui porte en sens inverse, est celui qui commence entre la pleine mer et le mi-perdant ; son maximum est atteint entre le mi-perdant et la basse mer.

L'étale de flot est le moment de la renverse de courant qui marque la fin du flot. L'étale de jusant est le moment de la renverse de courant qui marque la fin du jusant. Il convient d'attirer l'attention sur le terme « étale » et d'éviter la confusion entre les étales de courant (fin du flot ou du jusant) et les étales de niveau (pleines et basses mers).

Par rapport à l'heure de la pleine mer d'un port de référence convenablement choisi, les moments des renverses et des maximums du flot et du jusant sont décalés par des intervalles de temps respectifs bien déterminés. En d'autres termes, le courant reprend la même phase aux divers instants, rapportés à l'heure de la pleine mer du port de référence.

Il existe parfois un léger retard de phase du courant près du fond par rapport au courant de surface. Cependant, cette règle n'est pas valable au voisinage des embouchures de fleuves à marée où le flot près du fond s'établit généralement avant celui de surface.

Ordinairement, tant en vive-eau qu'en morte-eau, les directions du courant reprennent des valeurs identiques pour de mêmes « heures de marée » du port de référence. Cependant, cette règle ne s'applique pas toujours au voisinage de la renverse, la direction du courant variant alors très rapidement. Lorsqu'une seule direction de courant est fournie dans un document, sauf indication contraire, il s'agit de la direction en vive-eau moyenne.

En termes de marégraphie, l'amplitude d'un courant de marée est la

vitesse maximale atteinte au cours d'un cycle. Cette vitesse varie avec l'immersion et le marnage de la marée. Sa variation avec l'immersion est surtout sensible au voisinage du fond en raison de l'écoulement turbulent lié au frottement et se traduit par une diminution de la vitesse moyenne.

La variation de l'amplitude du courant avec l'amplitude de la hauteur de marée n'est pas identique selon le mode de propagation de l'onde de marée : onde progressive, onde stationnaire ou phénomène hydraulique de remplissage et vidage d'un bassin. Aussi est-il difficile d'établir une règle générale associant ces deux grandeurs. Cependant, pour les besoins de la navigation, l'expérience montre que la connaissance des amplitudes du courant de marée en vive-eau V_{VE} et en morte-eau V_{ME} permet d'obtenir l'amplitude du courant V_C, correspondant au coefficient de marée C, par la relation de première approximation :

$$V_C = V_{ME} + \frac{C - 45}{50}(V_{VE} - V_{ME})$$

Dans le cas d'un courant alternatif, il est possible d'estimer le module du courant $V(t)$ à une heure déterminée t en appliquant la règle dite des sixièmes, analogue à la règle des douzièmes pour les hauteurs de marée. Cette règle des sixièmes suppose implicitement que les variations de vitesse soient sinusoïdales. Pour la marée de type semi-diurne, désignons par V_C l'amplitude (vitesse maximale du courant alternatif au cours d'un cycle semi-diurne), nous obtenons ainsi en prenant pour origine des temps, l'instant de l'étale de courant ($t = 0$) :

— trois heures avant l'étale ($t = -3$ h), la vitesse est maximale : $V(-3) = V_C$;

— deux heures avant ($t = -2$ h) : $V(-2) = (5/6)V_C$, soit $(1/6)V_C$ de moins que $V(-3)$;

— une heure avant ($t = -1$ h) : $V(-1) = (1/2)V_C$, soit $(2/6)V_C$ de moins que $V(-2)$

— à l'étale ($t = 0$), le courant est nul avant la renverse (changement de direction) :$V(0) = 0$, soit $(3/6)V_C$ de moins que $V(-1)$;

— une heure après l'étale ($t = 1$ h) : $V(1) = (1/2)V_C$, soit $(3/6)V_C$ de plus que $V(0)$;

— deux heures après ($t = 2$ h) : $V(2) = (5/6)V_C$, soit $(2/6)V_C$ de plus que $V(1)$;

— trois heures après ($t = 3$ h), le courant est à nouveau maximum mais de sens opposé à celui de $t = -3$ h : $V(3) = V_C$, soit $(1/6)V_C$ de plus que $V(2)$.

3 • Courants de marée : approche analytique

Les mouvements liés à la marée obéissent aux lois fondamentales de la dynamique de l'océan. Celles-ci s'expriment pour un élément fluide au travers :

— des lois de la thermodynamique pour la conservation du sel et de la chaleur ;

— d'une équation d'état, la masse volumique de l'eau de mer dépendant de la salinité, de la température et de la pression ;

— du principe de conservation de la masse ;

— et enfin du principe fondamental de la conservation du mouvement.

3.1 • L'approche linéaire : l'équation des ondes longues

Pour une simple approche analytique du comportement de l'onde marée, les flux de sel et de chaleur qui sont à l'origine des courants dits « thermohalins » sont négligés. En outre, la masse volumique de l'eau de mer ρ est supposée constante (p.m. $\rho \approx 1{,}03$ t/m^3), ce qui suppose le fluide incompressible. Avec ces hypothèses, la loi de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \partial\rho/\partial t + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0,$$

se réduit à la simple relation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \equiv \operatorname{div} \vec{V} = 0, \tag{10.1}$$

où :

$\vec{V}$ est la vitesse de l'élément fluide, de composantes (u, v, w) dans un système orthonormé Oxyz (l'axe Oz étant orienté selon la verticale ascendante du lieu),

$\vec{\nabla}$ est le vecteur de l'opérateur gradient de composantes

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ leur produit scalaire qui exprime la divergence de $\vec{V}$.

Dans le calcul de la force génératrice de la marée (chap. III § 1.1), nous avons déjà établi l'expression de l'accélération absolue $\vec{\gamma_S}(M)$ d'un élément fluide M de masse unité, situé à la surface de la Terre. De plus, en négligeant la viscosité (turbulence et frottement sur le fond) ainsi que les termes d'advection et l'accélération verticale (hypothèse de la pression hydrostatique), on retrouve les équations de Laplace (4.1 et 4.2a ou l'équivalente 4.2b) que nous rappelons ci-dessous.

La première (4.1) traduisant l'équation de continuité (10.1) de la colonne fluide de la profondeur $H(x, y)$ à la cote $\eta(x, y, t)$ de la surface de l'océan (avec $\eta \ll H$), soit :

$$\overrightarrow{\nabla_h} \cdot (H\overrightarrow{V_h}) + \partial\eta/\partial t = 0 \tag{10.2}$$

où :

$\overrightarrow{V}_h$ est la partie horizontale de $\overrightarrow{V}$, qui est la même sur toute la profondeur (la composante verticale w étant négligeable, la vitesse $\overrightarrow{V}_h$ est identique de la surface jusqu'au fond en un lieu donné) ;

$\overrightarrow{\nabla_h}$ le vecteur de l'opérateur gradient horizontal de composantes $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

La deuxième équation donne l'équation du mouvement horizontal du fluide, soit :

$$\frac{\partial\overrightarrow{V_h}}{\partial t} + 2\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{V_h} = \nabla_h(U - g\eta) \tag{10.3}$$

où :

$\overrightarrow{\omega_T}$ est le vecteur rotation terrestre ;

∇_h, l'opérateur gradient horizontal d'un scalaire $(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$:

U, le potentiel générateur de la marée pour la masse unité ;

$p/\rho = g\eta$, la perturbation de pression sur une particule de masse unité, induite par les variations de $\eta(x, y, t)$.

En 1879, Kelvin utilise le système (10.2) et (10.3) pour étudier les ondes libres de grandes longueurs d'ondes dans un bassin océanique en négligeant le potentiel ($U = 0$).

En désignant par $\overrightarrow{\zeta_M}$ le vecteur unitaire de la verticale ascendante au point M (latitude L), nous avons vu que le paramètre de Coriolis f s'exprime par :

$$f = 2\overrightarrow{\omega_T} \cdot \overrightarrow{\zeta_M} = 2\omega_T \sin L,$$

où ω_T est le module du vecteur rotation terrestre (f est du signe de la latitude, positif dans l'hémisphère nord, négatif au sud).

Pour information, signalons que les ondes internes à fréquences de marée n'interviennent dans le processus de dissipation que si $q_i \geq |f|$. Ce processus n'est pas présent sur l'ensemble du globe. Ainsi pour les ondes internes associées aux composantes majeures M_2 et K_1, nous avons les parties zonales dissipatives définies par les latitudes critiques :

— $L_{M2} = \pm 74°28 (f = \pm q_{M2})$,

— $L_{K1} = \pm 30°00 (f = \pm q_{K1})$.

Avec les hypothèses de Kelvin, l'équation (10.3) devient alors :

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_h}}{\partial t} + f\overrightarrow{\zeta_M} \wedge \overrightarrow{V_h} = -g\nabla_h \eta. \tag{10.4}$$

Dans le repère orthonormé défini plus haut, en supposant f et H constants, les équations du mouvement des ondes libres s'explicitent par le système d'équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{10.5a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{10.5b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \tag{10.5c}$$

En dérivant (10.5a) par rapport à x, (10.5b) par rapport à y, (10.5c) par rapport à z, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + f\mathrm{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + g\mathrm{H}\left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2}\right) \tag{10.5d}$$

À la suite des diverses hypothèses simplificatrices, la résolution de ces équations, même exemptes de termes non linéaires, n'est réalisable que dans le cas de configurations géométriques simples. Celles-ci permettent néanmoins de dégager quelques enseignements de portée générale.

3.2 • Modèle simplifié : canal étroit de longueur infinie

Le canal de profondeur constante, étroit et de longueur infinie, est orienté selon la direction Ox. La relation (10.5) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \tag{10.6}$$

avec :

$$c = \sqrt{g\mathrm{H}}$$

Les solutions sont indépendantes de la coordonnée y et de la force de Coriolis. La fonction $\eta(x,t) = \eta(x)e^{jqt}$ étant solution particulière de (10.6) où la hauteur $\eta(x)$ ne dépend que de l'abscisse x, il vient en posant $k = q/c$:

$$\frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} + k^2\eta(x) = 0 \tag{10.7}$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle du second ordre peut s'écrire :

$$\eta(x) = \eta_\mathrm{d}\left(e^{-jkx} + re^{jkx}\right) \tag{10.8}$$

où η_d est l'amplitude de hauteur de l'onde directe ($x = ct$) et le paramètre sans dimension r le coefficient de réflexion (qui peut être un nombre complexe). La relation (10.8) peut aussi se transcrire sous la forme :

$$\eta(x) = \eta_d \left[(1 - r)e^{-jkx} + 2r \cos kx \right]. \tag{10.9}$$

En tenant compte de la relation (10.5a) avec $f = 0$, on obtient pour la vitesse l'expression suivante : $u(x, t) = c\frac{\eta_d}{H} \left[(1 - r)\, e^{-jkx} - j2r \sin kx \right] e^{jqt}$, dont l'amplitude au point x est :

$$u(x) = c\frac{\eta_d}{H} \left[(1 - r)\, e^{-jkx} - j2r \sin kx \right]. \tag{10.10}$$

Ainsi, pour l'onde progressive ($r = 0$) se propageant à la vitesse $c = \sqrt{gH}$, on obtient :

$$r = 0 \Rightarrow \frac{u(x)}{\eta(x)} = \frac{c}{H} = \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Notons que la relation précédente entraîne l'égalité :

$$u(x)/c = \eta(x)/H$$

L'onde progressive présente ainsi les caractéristiques suivantes (figure 10.5) :

— le courant et la hauteur sont en phase ;

— le flot est maximum au moment de la pleine mer et porte dans la direction de propagation de l'onde marée ;

— le jusant est maximum au moment de la basse mer et porte dans la direction opposée ;

— les renverses de courant ont lieu aux moments des mi-marées.

Ce résultat est intéressant pour imposer des conditions dites « radiationnelles » aux limites ouvertes des modèles numériques afin d'éviter les réfections parasites sur ces limites.

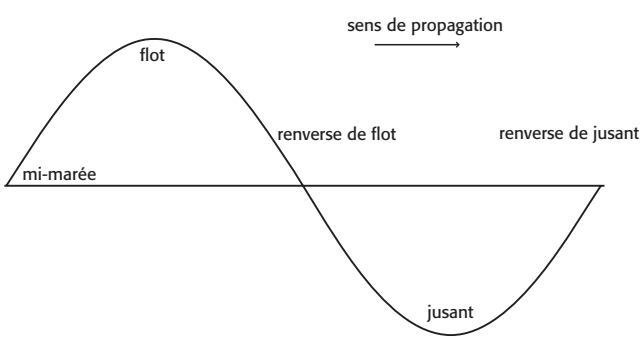


FIGURE 10.5 — Onde progressive : Le maximum de courant accompagne la pleine mer, dans la direction de propagation de l'onde de marée et la basse mer dans la direction opposée.

3.3 • Onde stationnaire

$$\Omega = 1 \Rightarrow \frac{u(x)}{\eta(x)} = -i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{H}}}\tan kx$$

Le courant et la hauteur sont en quadrature :

— Le courant de flot portant dans la direction de l'onde incidente est maximum à mi-marée montante.

— Le courant de jusant portant dans la direction de l'onde réfléchie est maximum à mi-marée descendante.

— La renverse de flot a lieu au moment de la pleine mer.

— La renverse de jusant a lieu au moment de la basse mer.

3.4 • Courant réel

L'onde de marée n'est évidemment jamais purement progressive ni purement stationnaire, mais il est remarquable que cette approche simple permette d'expliquer certains faits d'observation dont l'intérêt pratique n'est pas négligeable. Ainsi, lorsque la propagation d'une onde de marée est bien identifiée, comme c'est généralement le cas loin des côtes, le flot accompagne la peine mer et le jusant la basse mer. En revanche, près des côtes, les renverses ont tendance à se rapprocher des étales de pleine mer et de basse mer, le maximum du flot ayant lieu au voisinage de la mi-marée montante et le maximum du jusant au voisinage de la mi-marée descendante.

Par ailleurs, les deux composantes pouvant coexister loin des côtes, le courant n'est généralement pas purement alternatif : le vecteur courant décrit un hodographe appelé « rose de courant ».

4 • Roses de courant, constantes harmoniques

Les courants de marée ayant la même origine que la marée proprement dite, les méthodes d'analyse décrites pour les hauteurs d'eau pourraient s'appliquer sans changement. Toutefois, les mesures de courant possèdent des caractéristiques spécifiques qui doivent être prises en compte. En particulier, elles sont souvent plus bruitées que les mesures de hauteur, et leur durée est rarement supérieure à une quinzaine de jours. En contrepartie, on est moins exigeant concernant la précision.

4.1 • Analyse des observations

Le vecteur courant peut être représenté par un nombre complexe. À cette différence près, les méthodes d'analyse mises au point pour les hauteurs d'eau peuvent s'appliquer sans changement. Cependant, la brièveté des mesures nuit aux résultats des analyses : un nombre insuffisant d'observations empêche une détermination fiable des constantes harmoniques, dont le calcul se ramène toujours à une résolution par moindres carrés. Une trop faible redondance laisse des degrés de liberté superflus au système à résoudre et s'accompagne d'une grande sensibilité au bruit qui perturbe plus les mesures de courant que celles de hauteurs.

Pour réduire l'influence du bruit, la voie la plus naturelle est de diminuer le nombre de degrés de liberté en imposant des contraintes supplémentaires aux constantes harmoniques. Ces contraintes, bien que ne découlant pas directement des mesures, doivent conserver une signification physique afin que l'amélioration des résultats soit effective. La méthode des concordances par espèces, exposée au chapitre VII § 3 paraît particulièrement adaptée. Elle s'inspire de deux remarques :

— il existe une relation entre les hauteurs d'eau et le courant ;

— les mesures de marée de longue durée sont plus faciles à réaliser et se prêtent mieux aux analyses classiques.

Pour tirer parti de ces observations, nous posons que le courant de marée est en concordance avec la marée dans le domaine spectral. Nous reprenons ainsi la technique des concordances par espèce, utilisée pour le traitement des courtes périodes d'observation de marée. Toutefois, dans son adaptation aux courants, il est préférable de modifier légèrement le calcul des hauteurs réduites (chap. VI, § 2), afin de diminuer l'influence du bruit entre les fréquences de marée : l'interpolation parabolique sur les hauteurs est remplacée par une interpolation polynomiale de degré trois sur les vecteurs courant.

4.2 • Constantes harmoniques du courant

Une composante harmonique de courant peut être représentée par un nombre complexe :

$$\Gamma = u \cos(\mathrm{V} - \mathrm{G}_u) + jv \cos(\mathrm{V} - \mathrm{G}_v) \qquad (10.11)$$

où u, G_u, v, G_v sont les amplitudes et situation des composantes est-ouest et sud-nord d'une composante harmonique de courant.

L'hodographe de Γ est une ellipse.

Ce qu'il est convenu d'appeler les constantes harmoniques de courant sont les éléments caractéristiques de cette ellipse :

— demi-grand axe a ;

— demi-petit axe b ;

— orientation du grand axe β_c ;

— situation G.

Selon l'habitude des navigateurs, l'orientation du grand axe est mesurée à partir de la direction du nord, dans le sens rétrograde. Dans la suite des calculs, afin de respecter l'usage mathématique, on posera :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta_c$$

On peut écrire :

$$\Gamma = e^{j\varphi} \left[a \cos(\mathrm{V} - \mathrm{G}) + jb \sin(\mathrm{V} - \mathrm{G})\right] \tag{10.12}$$

où l'on reconnaît la représentation paramétrique d'une ellipse dans le plan complexe, à laquelle est appliquée une rotation d'un angle φ.

G est la « situation » de l'onde. C'est le retard du courant maximum par rapport au maximum de la composante du potentiel correspondante. Il y a cependant une ambiguïté : le module du courant passant par deux maximums au cours d'un cycle, il est nécessaire d'orienter le grand axe afin de choisir l'un des deux.

Cette formulation est accompagnée des conditions suivantes :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$
$$a > 0$$
$$a > |b|$$

L'hodographe pouvant être parcouru dans le sens rétrograde, b peut être négatif.

Le problème consiste à identifier les expressions (10.13) et (10.14)

Le développement de l'expression (10.13) donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2}\left\{u\left[e^{j(\mathrm{V}-\mathrm{G}_u)} + e^{-j(\mathrm{V}-\mathrm{G}_u)}\right] + jv\left[e^{j(\mathrm{V}-\mathrm{G}_v)} + e^{-j(\mathrm{V}-\mathrm{G}_v)}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(ue^{-j\mathrm{G}_u} + j\,ve^{-j\mathrm{G}_v}\right)e^{j\mathrm{V}} + \left(ue^{j\mathrm{G}_u} + jve^{j\mathrm{G}_v}\right)e^{-j\mathrm{V}}\right]\end{aligned} \tag{10.13}$$

et celui de l'expression (10.14) :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Gamma &= \frac{e^{j\varphi}}{2}\left\{a\left[e^{j(\mathrm{V}-\mathrm{G})} + e^{-j(\mathrm{V}-\mathrm{G})}\right] + b\left[e^{j(\mathrm{V}-\mathrm{G})} - e^{-j(\mathrm{V}-\mathrm{G})}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[(a+b)\,e^{j(\varphi-\mathrm{G})}e^{j\mathrm{V}} + (a-b)\,e^{j(\varphi+\mathrm{G})}e^{-j\mathrm{V}}\right]\end{aligned} \tag{10.14}$$

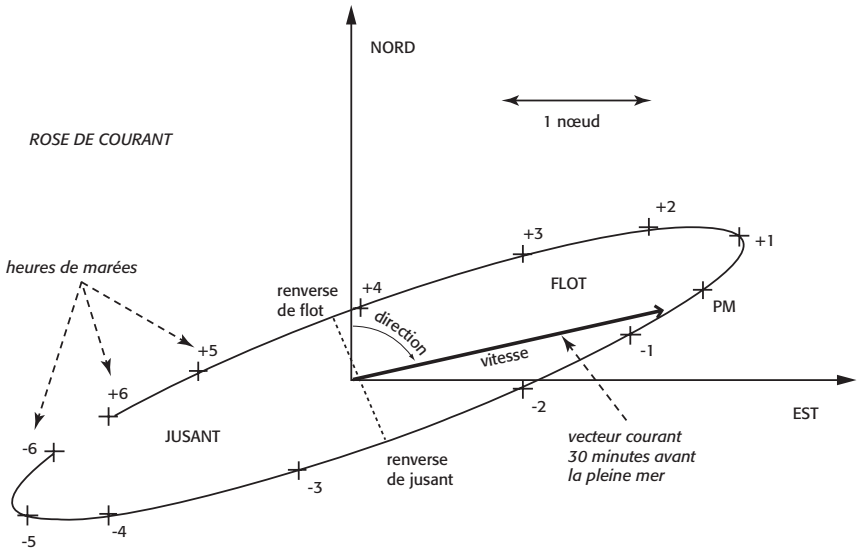


FIGURE 10.6 — Hodographe du vecteur courant, appelé rose de courant. Les heures de marée sont les heures rondes rapportées à la pleine mer.

Cette expression est intéressante car elle montre que C peut être interprété comme la superposition de deux hodographes circulaires parcourus avec la même vitesse angulaire, l'un dans le sens direct, l'autre dans le sens rétrograde.

L'identification des facteurs de $e^{j\mathrm{V}}$ et $e^{-j\mathrm{V}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}(a+b)\,e^{j(\varphi-\mathrm{G})} &= ue^{-j\mathrm{G}_u} + jve^{-j\mathrm{G}_v}\\ (a-b)\,e^{j(\varphi+\mathrm{G})} &= ue^{j\mathrm{G}_u} + jve^{j\mathrm{G}_v}\end{aligned}$$

ou en identifiant parties complexes et imaginaires ;

$$\begin{aligned}(a+b)\cos(\varphi-\mathrm{G}) &= u\cos\mathrm{G}_u + v\sin\mathrm{G}_v\\ (a+b)\sin(\varphi-\mathrm{G}) &= -u\sin\mathrm{G}_u + v\cos\mathrm{G}_v\\ (a-b)\cos(\varphi+\mathrm{G}) &= u\cos\mathrm{G}_u - v\sin\mathrm{G}_v\\ (a-b)\sin(\varphi+\mathrm{G}) &= u\sin\mathrm{G}_u + v\cos\mathrm{G}_v\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}a+b &= \pm\sqrt{u^2+v^2+2uv\sin(\mathrm{G}_u-\mathrm{G}_v)}\\ a-b &= \pm\sqrt{u^2+v^2-2uv\sin(\mathrm{G}_u-\mathrm{G}_v)}\end{aligned}$$

Les ambiguïtés sur les signes sont levées par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a > 0 \\ a > |b| \end{cases}$$

qui imposent les signes « + » devant les radicaux.

Rappelons que b peut être négatif :

— si b est positif, l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique direct,

— si b est négatif, l'ellipse est parcourue dans le sens rétrograde.

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{u^2 + v^2 + 2\,u\,v \sin(\mathrm{G}_u - \mathrm{G}_v)} + \sqrt{u^2 + v^2 - 2\,u\,v \sin(\mathrm{G}_u - \mathrm{G}_v)}\right]$$

$$b = \frac{1}{2}\left[\sqrt{u^2 + v^2 + 2\,u\,v \sin(\mathrm{G}_u - \mathrm{G}_v)} - \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \sin(\mathrm{G}_u - \mathrm{G}_v)}\right]$$

L'orientation du grand axe et la situation sont déduites des expressions suivantes :

$$\tan(\varphi - \mathrm{G}) = \frac{v \cos \mathrm{G}_v - u \sin \mathrm{G}_u}{u \cos \mathrm{G}_u + v \sin \mathrm{G}_v} = \tan(t_1)$$
$$\tan(\varphi + \mathrm{G}) = \frac{v \cos \mathrm{G}_v + u \sin \mathrm{G}_u}{u \cos \mathrm{G}_u - v \sin \mathrm{G}_v} = \tan(t_1)$$

Remarquons que t_1 et t_2 sont définis à 2π près puisqu'on dispose des valeurs du sinus et du cosinus.

$$\begin{cases} \varphi - \mathrm{G} = t_1 + 2k_1\pi \\ \varphi + \mathrm{G} = t_2 + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{t_1 + t_2}{2} + (k_1 + k_2)\,\pi \\ \mathrm{G} = \dfrac{t_2 - t_1}{2} + (k_2 - k_1)\,\pi \end{cases}$$

L'ambiguïté sur les valeurs de φ et G est levée en retenant la condition suivante :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

qui impose la valeur paire ou impaire de $k_1 + k_2$ et donc de $k_2 - k_1$ (si $k_1 + k_2$ est paire, $k_2 - k_1$ l'est aussi, et inversement).

Rappelons que ce que nous appelons « direction du grand axe » est

$$\beta_c = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

La condition sur la valeur de φ impose une orientation est-ouest du grand axe.

La situation G a une signification qui rappelle celle relative aux hauteurs (retard du maximum de l'onde sur le maximum d'action de la composante harmonique) : C'est le retard du maximum du courant dans la direction est-ouest, par rapport au maximum d'action de la composante.

Tous les éléments de l'ellipse de courant sont ainsi définis.

A

Éléments d'astronomie pour l'étude de la marée

L'étude de la marée océanique sur la Terre implique le positionnement des astres générateurs et de tout élément fluide évoluant sous l'action gravitationnelle de ceux-ci. Afin de mieux aborder cette étude, il semble utile d'exposer quelques éléments d'astronomie, en particulier les systèmes de coordonnées sphériques, les mouvements des astres et les bases de temps qui en résultent. Ces éléments permettront d'établir une meilleure liaison entre les caractéristiques des mouvements et les composantes harmoniques de la marée.

En matière de positionnement (astre ou lieu terrestre), il ne sera décrit que les systèmes de coordonnées sphériques usuels et la méthode classique pour le passage d'un système de coordonnées à un autre. Bien souvent il sera sous-entendu que la seule mention de l'astre indiquera son centre. Du fait de l'attraction universelle, l'ensemble du système solaire a théoriquement une influence sur la marée, mais l'effet des planètes, hors le système « Soleil – Terre – Lune », est négligeable. Tout en décrivant leurs mouvements relatifs, nous verrons comment les périodes de révolution, associée à la rotation terrestre, ont permis de définir les différentes bases de temps.

1 • Les systèmes de coordonnées sphériques

Un système de coordonnées est choisi en fonction de la nature du phénomène ou du mouvement à étudier. Rappelons cependant qu'un référentiel est dit « galiléen » quand un point matériel qui n'est soumis à aucune force y conserve sa vitesse. Dans un tel repère, ce point est donc immobile ou animé d'un mouvement de translation uniforme. Le repère de Copernic, centré sur

le centre de masse (barycentre) du système solaire avec des axes orientés vers des étoiles fixes, constitue un repère galiléen (bien que ce ne soit probablement pas exact au sens strict si l'on tient compte de la rotation galactique), ainsi que tout autre repère animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à celui de Copernic.

Pour l'étude de la marée, les bases principales des référentiels utilisés résultent de caractéristiques géométriques liées à la forme et aux mouvements de notre planète :

— Forme ellipsoïdale de révolution autour d'un axe appelé axe des pôles ou axe du monde (nord ou boréal et sud ou austral), le plus grand cercle définissant l'équateur.

— Deux mouvements propres dont la rotation sur elle-même autour de l'axe des pôles, et le mouvement orbital autour du Soleil, selon les lois de Kepler, qui définit une trajectoire appelée écliptique.

Pour repérer les directions en astronomie, on utilise une sphère de centre défini selon les besoins, et de rayon arbitraire : la sphère céleste.

Deux types de référentiels sont ainsi utilisés :

— Les systèmes de coordonnées du premier type ont pour origine le centre de la Terre et tournent avec elle ; ils servent à déterminer la position d'un lieu sur la Terre et la direction d'un astre par rapport à ce lieu. La sphère céleste utilisée dans ce cas, fixe par rapport à l'observateur, est appelée sphère céleste locale.

— Les systèmes du second type ont aussi le centre de la Terre pour origine, mais leurs axes sont orientés vers des points relativement fixes par rapport aux étoiles. Leur finalité est de définir la position d'un astre qui soit indépendante de l'observateur. La sphère céleste utilisée dans ce cas est appelée sphère des fixes, animée par rapport à la sphère céleste locale d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles, appelé mouvement diurne.

Notons qu'un repère lié à la Terre, animé de mouvements de rotation autour de l'axe des pôles et entraîné sur une orbite régie par les lois de la gravitation n'est pas galiléen. La force de Coriolis d'une part et la force génératrice de la marée d'autre part en sont les conséquences.

1.1 • Coordonnées sphériques sur la sphère céleste locale

Dans un système géodésique de précision, il conviendrait de tenir compte de la forme ellipsoïdale de la Terre. Mais pour l'étude de la marée, l'hypothèse d'une Terre sphérique de centre T et de rayon moyen a_T sera suffisante en première approximation.

Avec cette hypothèse, la verticale en un lieu M est définie par le fil à plomb dont la direction se confond avec celle du rayon terrestre du lieu. La direction

de la verticale ascendante indique le zénith, symbolisé sur la sphère céleste locale par la lettre M (comme le lieu), le nadir étant la direction opposée. En outre, l'axe des pôles et la verticale déterminent le plan méridien du lieu. Plus généralement, un plan méridien est un plan contenant l'axe des pôles. Le grand cercle de la sphère céleste, passant par le zénith et les pôles célestes, est appelé le méridien céleste du lieu. Signalons cependant que le terme « méridien » a reçu en réalité plusieurs acceptions. Par la suite, nous convenons d'adopter ce qui est consacré par l'usage courant : le méridien d'un point (lieu, astre ou étoile) est le demi-cercle (terrestre ou céleste) limité par l'axe des pôles et le point. Dans ce cas, l'appellation « méridien supérieur » du point, terrestre ou céleste, est parfois retenue, le « méridien inférieur » étant le méridien de l'antipode.

Le plan équatorial et l'axe des pôles constituent une base pratique pour définir des référentiels, centrés sur T et liés au globe (tournant avec celui-ci). À ce premier type de référentiel correspondent les deux systèmes donnant, pour le premier, les coordonnées géographiques d'un lieu terrestre et, pour le second, les coordonnées horaires d'un astre pour un lieu déterminé. Ces deux repères orthonormés ont en commun l'axe des pôles $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$. Mais le plan méridien pris pour origine (son intersection avec le plan équatorial est axe origine de ce dernier) sera différent selon qu'il s'agit de déterminer la position d'un lieu ou la direction d'un astre.

1.1.1 • Coordonnées géographiques d'un lieu

La définition de l'axe origine dans le plan équatorial est a priori arbitraire. Un congrès international à Washington (1884) adopta le méridien de Greenwich (Grande-Bretagne) pour origine, ce qui définit l'axe origine équatorial.

Dans ces conditions, les coordonnées géographiques du lieu M sont (figure A.1) :

— la longitude G, angle du demi-plan méridien du lieu M par rapport à celui de Greenwich, mesuré dans le sens trigonométrique (dans un repère orthonormé, en adoptant l'axe des z positifs vers le Nord), positif vers l'Est et négatif vers l'Ouest, de 0° à ±180° ;

— la latitude L, angle de la direction du zénith en M par rapport au plan de l'équateur, mesuré positif dans l'hémisphère nord et négatif dans celui du sud, de 0° à ±90°.

Sur la Terre réelle, signalons pour mémoire, que la détermination complète d'un lieu nécessite la connaissance de l'altitude z par rapport à l'ellipsoïde de référence assimilé ici à la surface sphérique de rayon a_{T} ; l'altitude est mesurée positive selon la verticale ascendante.

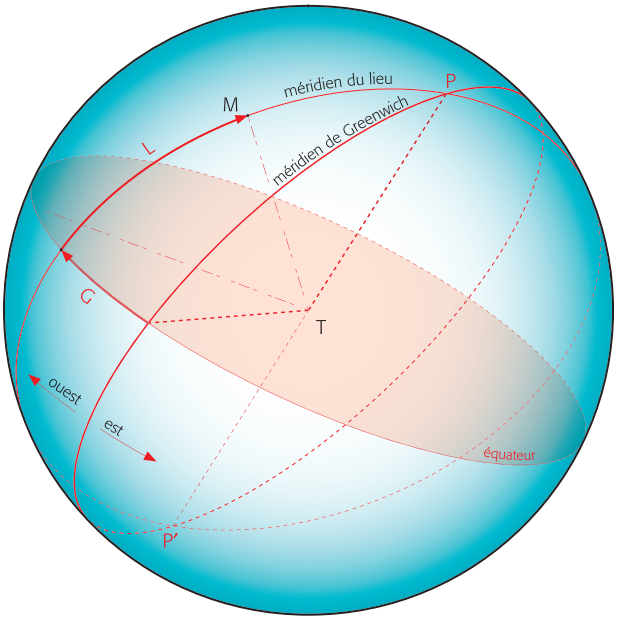


Figure A.1 — Coordonnées géographiques du point M à la surface du globe : longitude G et latitude L.

1.1.2 • Coordonnées horaires d'un astre

Comme précédemment, les bases sont l'axe des pôles $\overrightarrow{TP}$ et le plan de l'équateur. Mais ici, le méridien du point M est choisi pour origine.

Dans ce repère, les deux coordonnées sphériques d'un astre A sont (figure A.2) :

— l'angle horaire $\text{Æ}H$, angle du demi-plan méridien de l'astre A par rapport à celui du point M, compté positivement dans le sens inverse, dit aussi « rétrograde » (pour mémoire : opposé au sens trigonométrique et correspondant au sens des aiguilles d'une montre). Cette convention résulte du fait que la rotation terrestre s'effectuant vers l'Est (sens trigonométrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{TP}$), le mouvement apparent des astres s'effectue vers l'Ouest. L'angle horaire, toujours positif, est habituellement exprimé en heures ($360° \Rightarrow 24$ heures soit $15° \Rightarrow 1$ heure).

— la déclinaison δ, angle de la direction de l'astre A (axe $\overrightarrow{TA}$) par rapport au plan équatorial, compté (tout comme la latitude d'un lieu) positivement vers le Nord, négativement vers le Sud. Le complément de la déclinaison est la distance polaire $\pi/2 - \delta$, variant de 0° (Nord) à 180° (Sud).

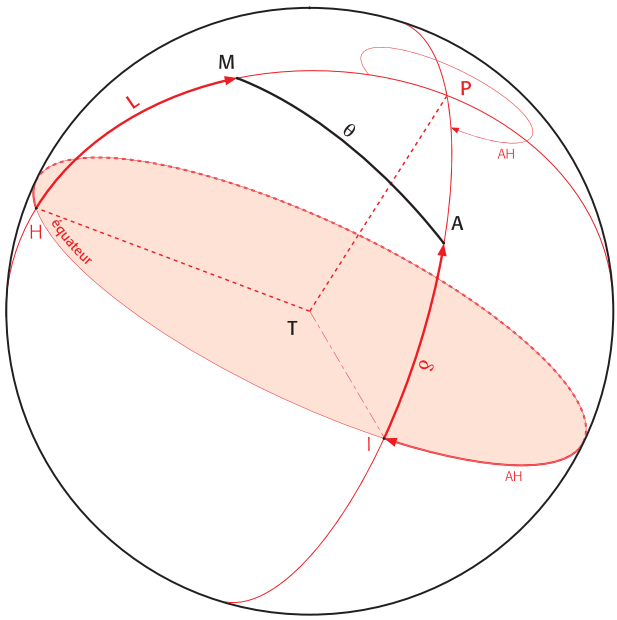


FIGURE A.2 — Coordonnées horaires d'un astre : angle horaire $\hat{A}H$ et déclinaison δ. L'angle θ est la distance zénithale géocentrique de l'astre A par rapport au zénith M du lieu.

Dans la figure A.2, nous voyons apparaître la distance zénithale géocentrique θ, angle de $\overrightarrow{TM}$ par rapport à $\overrightarrow{TA}$, variant de 0° à 180°, intervenant dans l'expression du potentiel générateur de la marée. Le demi-plan limité par la direction du zénith $\overrightarrow{TM}$ et passant par le centre de l'astre définit le vertical de l'astre.

1.2 • Coordonnées sphériques sur la sphère des fixes

Celles-ci sont indépendantes du lieu. L'écliptique est aussi le plan contenant l'orbite terrestre. De plus, la convention trigonométrique adoptée pour l'écliptique est celle qui est définie par un individu, debout sur l'écliptique et du même côté que le pôle nord terrestre. Il voit alors l'orbite terrestre décrite dans le sens trigonométrique.

Par ailleurs, l'écliptique et le plan de l'équateur forment un angle ε, égal à 23°26′21″ appelé obliquité de l'écliptique, et leur intersection définit la droite des points équinoxiaux de printemps et d'automne. Le point équinoxial de printemps, appelé aussi point vernal ou point γ, est déterminé par la position du Soleil, au cours de son mouvement apparent, lors de son passage à l'équateur céleste dans le sens Sud-Nord. La direction ainsi définie du point

γ constitue un axe de référence commun à l'écliptique et à l'équateur pour la sphère des fixes. La position d'un astre, indépendante du lieu d'observation, s'obtient donc aisément dans les référentiels ayant pour base l'un des deux plans, équatorial ou écliptique, avec $\overrightarrow{T\gamma}$ comme axe commun, d'où les deux systèmes de coordonnées :

— les coordonnées urographiques (de *Ouranos*, le « Ciel étoilé » de la mythologie grecque), dites aussi équatoriales célestes,

— les coordonnées écliptiques.

1.2.1 • Coordonnées urographiques ou équatoriales célestes

L'axe du monde $\overrightarrow{TP}$ et le plan de l'équateur constituent toujours les bases du repère, mais ici le méridien du point γ est pris pour origine (figure A.3). Le trièdre orthonormé correspondant est ainsi TγYP. Les deux coordonnées urographiques ou équatoriales célestes d'un astre sont ainsi définies par :

— l'ascension droite α, angle du demi-plan méridien de l'astre A par rapport à celui du point γ, compté dans le sens trigonométrique de 0° à 360° ;

— la déclinaison δ, angle déjà défini dans le système des coordonnées horaires à partir de l'équateur, donc positif vers le Nord et négatif vers le Sud, de 0° à ±90°.

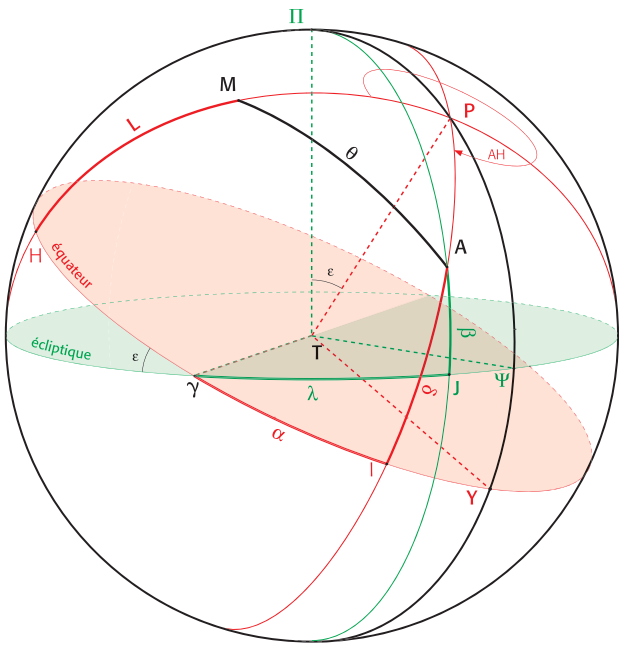


Figure A.3 — Coordonnées d'un astre sur la sphère des fixes : a) équatoriales célestes : ascension droite α et déclinaison δ ; écliptiques : longitude λ et latitude β.

1.2.2 • Coordonnées écliptiques

Le référentiel de ce système de coordonnées (figure A.3) a pour base l'écliptique et sa normale $\overrightarrow{T\Pi}$, l'axe $\overrightarrow{T\gamma}$ étant axe origine dans l'écliptique. L'orientation du point Π, pôle nord écliptique, est déterminée par l'angle des deux axes « polaires » $\overrightarrow{TP}$ et $\overrightarrow{T\Pi}$, égal à ε, obliquité de l'écliptique. Ce référentiel est ainsi représenté par le trièdre orthonormé $T\gamma\Psi\Pi$.

Les coordonnées écliptiques de l'astre A sont ainsi :

— la longitude écliptique λ : angle du demi-plan $T\Pi A$ (limité par l'axe $\overrightarrow{T\Pi}$ et contenant l'astre A) par rapport à celui origine $T\Pi\gamma$, compté dans le sens trigonométrique de 0° à 360° ;

— la latitude écliptique β : angle de la direction de l'astre A (axe $\overrightarrow{TA}$) avec l'écliptique, positif vers le nord écliptique Π, négatif dans la direction opposée, variant de 0° à $\pm 90°$.

Aucune confusion n'étant possible avec les longitudes et latitudes terrestres, ces coordonnées sont le plus souvent appelées tout simplement longitude et latitude d'un astre.

Le mouvement apparent du Soleil ayant lieu par définition dans l'écliptique, sa latitude est nulle ; sa longitude est donnée par le modèle de Newcomb (1895) qui fournit également l'évolution de la distance Terre-Soleil rapportée à sa valeur moyenne (149,6 millions de kilomètres).

Nous verrons plus loin, au § 3.3, que la notion d'astre moyen sera introduite pour la définition du temps moyen. Le « Soleil moyen » est l'astre fictif, animé d'une vitesse angulaire constante dans l'écliptique, donnant la même période apparente (de point vernal à point vernal) que le Soleil réel. Signalons ici que la longitude de cet astre fictif, dont la valeur varie uniformément dans le temps, est appelée improprement « longitude moyenne » de l'astre, au lieu de « longitude de l'astre moyen ».

Par ailleurs, dans son modèle d'orbite lunaire, Brown (1896) utilise également les coordonnées écliptiques en donnant de même, pour la distance Terre-Lune, la variation rapportée à la moyenne (384 400 km). Dans son dernier modèle adapté au calcul numérique, Brown donne une précision astronomique pour cette orbite, permettant une très bonne prédiction de la marée sur plusieurs siècles.

1.3 • La distance zénithale géocentrique d'un astre

Le calcul de la force et du potentiel générateurs de la marée s'établit pour un lieu donné dans le plan du vertical de l'astre où la distance zénithale[1] géocentrique θ de l'astre est le paramètre essentiel dans la détermination de ces deux grandeurs. Le potentiel générateur, résultant d'un champ dit « méridien » (de révolution autour de l'axe $\overrightarrow{TA}$, voir annexe B), s'exprime notamment par une série de polynômes de Legendre fonction de $\cos\theta$. Aussi est-il utile de connaître les expressions de $\cos\theta$ en fonction de l'angle horaire $\text{Æ}H$ de l'astre dans les différents systèmes de coordonnées.

1.3.1 • Formulation de θ dans les systèmes « équatoriaux »

En attribuant à la sphère céleste un rayon égal à l'unité (cette convention sera implicite dans tout ce qui suit), nous avons : $\cos\theta = \overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TA}$.

Dans les deux référentiels ayant pour base le plan équatorial (coordonnées horaires et urographiques), la distance zénithale géocentrique de l'astre θ est plus facilement obtenue par la relation des cosinus dans le triangle sphérique PAM :

$$\cos\theta = \sin L \sin\delta + \cos L \cos\delta \cos \text{Æ}H \tag{A.1}$$

Cet angle ne dépend que des coordonnées horaires ($\text{Æ}H, \delta$) de l'astre A et de la latitude L du zénith M.

Dans le système de coordonnées horaires (méridien de M pour origine), les composantes (égales ici aux cosinus directeurs) des vecteurs $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{TA}$ prennent la forme des deux matrices « colonne » (indice h pour « horaires ») :

$$M_h = \begin{bmatrix} \cos L \\ 0 \\ \sin L \end{bmatrix} \qquad A_h = \begin{bmatrix} \cos\delta \cos \text{Æ}H \\ \cos\delta \sin \text{Æ}H \\ \sin\delta \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément que leur produit scalaire donne la relation A.1.

Appelons $\text{Æ}H_\gamma$ l'angle horaire du point γ souvent appelé « temps sidéral[2] » :

$$\text{Æ}H_\gamma = \text{Æ}H + \alpha.$$

1. En astronomie, le terme « distance » peut s'appliquer à un angle.
2. Notons que cette appellation est impropre : suivant l'usage adopté pour les dénominations telles que « année tropique » ou « révolution tropique », l'appellation « temps tropique » serait préférable, mais reste néanmoins ambiguë concernant une base de temps.

Dans le système de coordonnées équatoriales célestes :

$$M_q = \begin{bmatrix} \cos L \cos Æ_\gamma \\ \cos L \sin Æ_\gamma \\ \sin L \end{bmatrix}$$

1.3.2 • Formulation de θ dans le système « écliptique »

L'expression du cosinus de l'angle θ dans le repère écliptique $T\gamma\Psi\Pi$ peut également s'obtenir en utilisant plusieurs relations de la trigonométrie sphérique, mais le choix des différents triangles sphériques permettant d'aboutir au résultat recherché présente ici une part d'arbitraire. Il nous semble plus rationnel de le calculer directement à partir du produit scalaire $\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TA}$, les composantes de ces vecteurs étant exprimées dans ce système de référence.

Si l'on attribue l'indice *e* au référentiel écliptique, les composantes du vecteur $\overrightarrow{TA}$ prennent la forme de la matrice colonne :

$$A_e = \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\lambda \\ \cos\beta \sin\lambda \\ \sin\beta \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Dans ce même référentiel, les cosinus directeurs de $\overrightarrow{TM}$ ont des expressions un peu plus complexes, mais sont obtenus sans difficulté en utilisant la matrice de changement de coordonnées C_{eq}, qui permet d'obtenir les composantes écliptiques à partir des composantes équatoriales :

$$C_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix}$$

La matrice M_e, correspondant aux composantes du vecteur $\overrightarrow{TM}$ dans le système écliptique, s'obtient par le produit de matrices : $M_e = C_{eq} \times M_q$

En tenant compte de la relation précédente donnant la matrice M_q, il en résulte :

$$M_e = \begin{bmatrix} \cos L \cos(\alpha + Æ) \\ \cos L \sin(\alpha + Æ) \cos\varepsilon + \sin L \sin\varepsilon \\ -\cos L \sin(\alpha + Æ) \sin\varepsilon + \sin L \cos\varepsilon \end{bmatrix}$$

Avec A_e donnée par (A.2), l'expression de $\cos\theta$ en fonction de l'angle horaire et des coordonnées écliptiques de l'astre, peut s'écrire : sous la

forme :

$$\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TA} = \cos\theta = \sin L \times f(\beta, \lambda) + \cos L \times g(\beta, \lambda, Æ) \qquad (A.3)$$

où :

$$f(\beta, \lambda) = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda$$

$$g(\beta, \lambda, Æ) = \cos\beta \cos\lambda \cos(\alpha + Æ) + (\cos\varepsilon \cos\beta \sin\lambda - \sin\varepsilon \sin\beta) \sin(\alpha + Æ)$$

Les formules (A.1) et (A.3) étant équivalentes, il vient d'une part :

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin,$$

égalité qui peut se déduire de la relation des cosinus dans le triangle sphérique APΠ, et d'autre part :

$$\cos\delta \cos Æ = \cos\beta \cos\lambda \cos(\alpha + Æ) + (\cos\varepsilon \cos\beta \sin\lambda - \sin\varepsilon \sin\beta) \sin(\alpha + Æ)$$

Cette dernière expression, beaucoup plus complexe, peut également s'obtenir par les relations de la trigonométrie sphérique. Comme nous l'avons signalé plus haut, plusieurs possibilités étant offertes dans le choix des triangles sphériques pour atteindre ce résultat, la détermination directe du produit scalaire $\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TA}$ par la matrice de changement de coordonnées paraît plus naturelle dans ce cas.

2 • Les astres, mouvements et temps caractéristiques

Pour la définition des différents systèmes de coordonnées sphériques, nous avons décrit l'écliptique comme l'orbite de la Terre autour du Soleil. En réalité c'est le centre de masse Terre-Lune qui, selon les lois de Kepler, décrit l'écliptique dont l'un des foyers est le barycentre du système solaire.

Pour la prédiction de la marée, seuls les trois astres (Soleil, Terre, Lune) sont pris en considération (figure A.4 et tableau 1.1). La distance Terre-Soleil et les masses respectives de ces deux astres montrent que leur barycentre est très proche du centre solaire (450 km) distance inférieure au millième du rayon équatorial solaire. En revanche, pour le couple Terre-Lune, leur barycentre est à 4 700 km du centre terrestre, soit 75 % du rayon terrestre, 1,2 % de la distance entre ces deux astres, mais 0,003 % de la distance Terre-Soleil. Ce très faible pourcentage permet de justifier le fait que l'écliptique est le plus souvent défini comme l'orbite de la Terre autour du Soleil, alors qu'il s'agit, plus rigoureusement, de l'orbite du barycentre du système Terre-Lune.

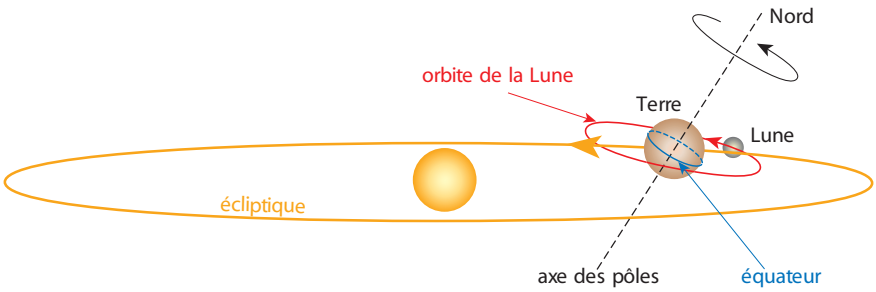


FIGURE A.4 — Mouvements des astres.

TABLEAU 1.1 — Caractéristiques des astres rapportés à celles de la terre (masse : $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; rayon équatorial : 6 378 km).

	Masse	Distance moyenne (km)	Rayon équatorial
Soleil	333 946	$1{,}496 \cdot 10^{8}$	109,125
Terre	1	0	1
Lune	0,0123	38 440	0,272 5

Notons que l'orbite lunaire n'est pas parfaitement elliptique autour du barycentre Terre-Lune car elle est très perturbée pas l'attraction solaire.

2.1 • La Terre : mouvements et temps caractéristiques

Nous avons vu que les caractéristiques particulières de la Terre (forme ellipsoïdale de révolution, pesanteur, plan orbital) sont à l'origine des différents systèmes de coordonnées sphériques pour situer un lieu ou un astre. Mais les bases de temps sont définies à partir des périodes de ses mouvements propres : révolution orbitale autour du Soleil et rotation sur elle-même autour de l'axe du monde.

Sa forme ellipsoïdale de révolution a une excentricité de 0,082 et les deux pôles sont distants de 12 714 km ; l'équateur, grand cercle de cet ellipsoïde, a une circonférence de 40 075 km (diamètre équatorial 12 756 km).

Nous avons déjà indiqué plus haut que les deux plans, écliptique et équateur, font entre eux un angle $\varepsilon = 23°26'21''$, leur intersection définissant la droite des points équinoxiaux de printemps et d'automne. Ces points, atteints respectivement aux environs du 21 mars (nœud ascendant solaire ou point vernal) et du 23 septembre (nœud descendant), se déplacent à

une vitesse angulaire extrêmement lente par rapport aux étoiles dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre) ; c'est la précession des équinoxes.

La précession se compose d'un mouvement du pôle de l'équateur autour du pôle de l'écliptique, de période 26 000 ans environ, associé à une légère variation de l'obliquité ε. Le point vernal décrit ainsi l'équateur, dans le sens rétrograde, à raison de $50''$ par an environ.

Avec les conventions d'orientation choisies, la révolution de la Terre sur son orbite s'effectue dans le sens trigonométrique (il en résulte qu'il en est de même pour le mouvement apparent du Soleil dans l'écliptique). La durée de cette révolution, intervalle de temps entre deux passages du Soleil au point vernal, définit l'année tropique ou équinoxiale, symbolisée habituellement par T_A, au cours de laquelle un méridien terrestre effectue, par rapport au Soleil, 365,242 2 rotations. Or durant cette révolution orbitale, l'intervalle de temps entre deux passages du Soleil à un méridien terrestre fluctue autour d'une valeur moyenne, le jour solaire moyen qui, fractionné en 24 heures, a été la base de temps fondamentale avant l'arrivée de l'horloge atomique. Ainsi l'année tropique a une durée de 365,242 2 jours (du temps solaire moyen) ou encore 365 j 5 h 48 min 45 s. Cette base de temps s'est imposée car elle conditionne le retour cyclique des saisons ; c'est celle qui est utilisée pour le calcul de la marée.

L'année stellaire, temps écoulé entre deux passages du Soleil en un point déterminé du ciel (sphère des fixes), est de 365,256 4 jours ; cette valeur est supérieure de 20 min 25 s à l'année tropique T_A par suite de la précession des équinoxes.

Par ailleurs, en astronomie, les apsides sont les extrémités du grand axe d'une orbite elliptique d'un astre. Pour l'écliptique (excentricité 0,016 7), l'apside la plus proche du Soleil, apside inférieure ou périhélie, est à $147{,}1 \cdot 10^6$ km et la plus éloignée, apside supérieure ou aphélie, à $152{,}1 \cdot 10^6$ km. En raison du point de vue adopté pour l'étude des marées (observatoire terrestre), pour désigner ces deux points caractéristiques, l'usage a consacré les termes de périgée et d'apogée solaires. Par ces expressions étymologiquement impropres, le mouvement apparent du Soleil est considéré comme celui d'un satellite de la Terre. Par rapport au point vernal, le périgée solaire accomplit une révolution dans le sens direct en 209,4 siècles. Ce lent mouvement fait que la Terre passe au périhélie tous les 365,2594 jours ; c'est l'année anomalistique, plus longue de 24 min 46 s que l'année tropique. Signalons aussi que le Soleil atteint ses extremums de déclinaison $\max|\delta_S| = \varepsilon$ aux moments des solstices (du latin *sol*, Soleil, et *stare*, s'arrêter). La déclinaison positive correspond au solstice d'été pour l'hémisphère nord et d'hiver pour

l'hémisphère sud (21 juin environ), la valeur négative donnant la situation inverse (22 décembre environ). Il convient de noter que les directions respectives de ces extremums ne correspondent pas à celles des apsides. La Terre atteint son périhélie (périgée solaire) vers le 3 janvier et son aphélie (apogée solaire) vers le 5 juillet. Au cours des siècles passés, ces passages avaient lieu plus tôt, la dérive étant de l'ordre de 1,74 jour par siècle.

En ce qui concerne la rotation terrestre, nous avons déjà vu qu'elle s'effectue dans le sens direct (vers l'Est). La révolution complète d'un méridien terrestre par rapport au point vernal est de 23 h 56 min 4 s (23,934 470 heures) qui est la durée du jour sidéral (terme consacré par l'usage, en fait il s'agit du « jour tropique ou équinoxial ») proche de 24 heures. La différence vient du fait que la Terre en décrivant son orbite fait une rotation de plus par rapport au point vernal que par rapport au Soleil, c'est-à-dire 366,242 2 rotations sidérales en 365,242 2 jours. En réalité la vitesse de rotation évolue très lentement, tout comme l'axe des pôles qui, avec un comportement d'axe de toupie, ne conserve pas une orientation stricte dans l'espace. Mais, il a déjà été précisé plus haut que la précession des équinoxes, mouvement très lent mais de grande amplitude, n'est pas prise en considération pour la marée ; il en est de même de cette très faible diminution de la vitesse de rotation, de l'ordre de 2 millisecondes par jour sur un siècle.

Cependant, ces deux éléments (rotation et direction des pôles) présentent également des fluctuations de faibles amplitudes, mais de plus courtes périodes (nutation). Ces fluctuations sont dues à plusieurs causes, les plus importantes étant les échanges de quantité de mouvement entre les différentes enveloppes terrestres constituées par les « fluides géophysiques » : atmosphère, hydrosphère, cryosphère, lithosphère et manteau magmatique. Ainsi, les mesures de la vitesse de la rotation terrestre indiquent par exemple des fluctuations, dues aux mouvements de l'atmosphère, de l'ordre de la milliseconde par jour ; quant à la marée océanique, elle n'induit que de très faibles oscillations de la durée du jour, de 0,1 milliseconde au maximum (figure A.5).

De même, les pôles décrivent des mouvements giratoires, plus ou moins périodiques, dont un des plus importants est l'oscillation d'inertie du globe (en anglais : Chandler wobble). Sa période est de 434,3 jours (± 2 jours) et son amplitude de l'ordre 0,2 à 0,3 seconde d'arc. Cette période, signalée par quelques auteurs sur les mesures de niveau en mer du Nord, n'a jamais été décelée dans la série de plus de 150 années d'observations à Brest.

Ainsi, en raison de l'extrême faiblesse de la variation de ces paramètres, l'étude de la marée pouvant couvrir plusieurs siècles peut s'établir avec les éléments indiqués plus haut : une direction fixe de l'axe des pôles avec une

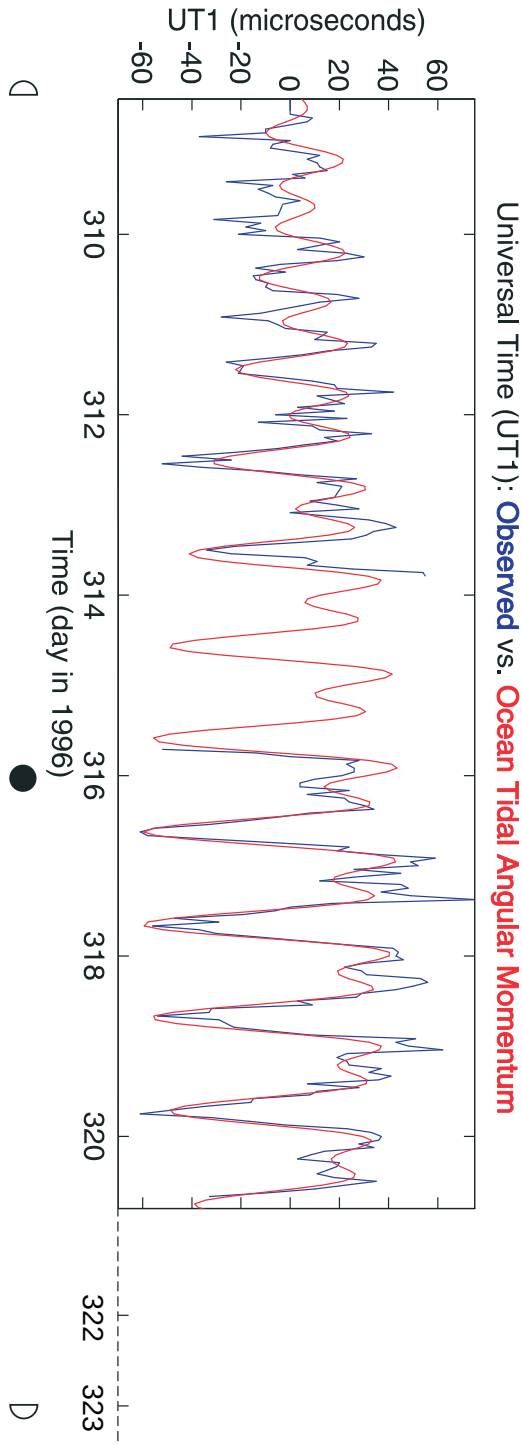


Figure A.5 — Influence de la marée océanique globale sur la rotation terrestre (exprimée en variations de la durée du jour : noter l'ordre de grandeur en microsecondes). Comparaison de mesures directes par VLBI (courbe bleue) avec des prédictions du moment angulaire de la marée de l'océan mondial, issues de modèles à partir des données satellitales altimétriques de *Topex-Poséidon* (courbe rouge). La réponse est du type à inégalité diurne (B.F Chao, *EOS* vol. 84, n° 16, 2003.

rotation terrestre uniforme, donc conservant une vitesse angulaire constante symbolisée par ω_T et égale à 15,041 068°/h.

2.2 • La Lune et ses mouvements

Soumise aux deux attractions, terrestre et solaire, la Lune décrit une orbite quasi elliptique dans le sens direct d'excentricité moyenne de 0,054 9, dont le barycentre Terre-Lune (pour mémoire : à 4 800 km du centre de notre globe) constitue l'un des foyers. Sous l'effet de l'action gravitationnelle du Soleil, l'excentricité varie en fait de 0,044 à 0,067 (de 2,5 à 4 fois celle de l'écliptique). Ainsi, la Lune, d'une masse 81,3 fois inférieure à celle de la Terre, évolue à une distance moyenne de 384 400 km (environ 60,3 rayons terrestres), variant approximativement de 356 000 à 410 000 km.

Par rapport au méridien du point vernal, la Lune parcourt son orbite en un temps moyen de 27,321 581 6 jours (27j 7h 43 min 4,7 s), durée de sa révolution tropique. Cette révolution correspond à une vitesse angulaire moyenne (dérivée par rapport au temps de son ascension droite) de 0,549 016 521 °/h et de même signe que la rotation terrestre. Un méridien terrestre, en phase avec la Lune à un instant déterminé, devra donc faire plus d'un tour (par rapport au méridien du point vernal) pour que cet astre y passe à nouveau ; l'intervalle de temps entre ces deux passages de la Lune au méridien du lieu définit le jour lunaire. La vitesse angulaire moyenne d'un méridien terrestre par rapport au méridien de la Lune correspond à l'écart des 2 vitesses angulaires citées précédemment ; ceci donne pour le jour lunaire une durée de 24 h 50 min 28,3 s en moyenne.

L'intervalle de temps moyen entre deux conjonctions successives de la Lune et du Soleil (nouvelles Lunes) est appelé révolution synodique. Sa durée est de 29,530 588 1 jours (29j 12h 44min), c'est la lunaison, qui constitue le mois des anciens calendriers lunaires.

Par ailleurs, la position du périgée évolue dans le temps en accomplissant un tour complet dans le sens direct (de point vernal à point vernal) en 8,8475 ans. La révolution anomalistique (27,554 550 2 jours soit 27j 13h 18,5min) correspond à deux passages successifs de la Lune à son périgée. Le sens de cette révolution, qui est le même que celui de la Lune sur son orbite, explique la durée plus longue que la période tropique.

Le nœud ascendant N est la position de la Lune lors de son passage à l'écliptique dans le sens sud-nord. Le déplacement progressif de ce point sur l'écliptique se fait dans le sens rétrograde, mouvement dit de régression, effectuant une révolution complète en 18,613 3 ans par rapport au point vernal. Deux passages successifs de la Lune à son nœud ascendant définissent

la révolution draconitique dont la période est égale à 27,212 217 8 jours (27 j 05 h 05,6 min), plus courte que la révolution tropique du fait de la régression. Il convient de noter ici que le Soleil passe par le nœud ascendant de la Lune tous les 346,6 jours ; cette durée définit l'année draconitique.

Signalons par ailleurs que l'effet de l'attraction solaire induit des oscillations périodiques du mouvement de la Lune par rapport à son orbite moyenne autour de la Terre. Les deux perturbations majeures de sa vitesse orbitale sont l'évection (période 31,8 jours) et la variation (période 14,8 jours). En outre, l'inclinaison de l'orbite lunaire oscille de 05°00′ à 05°17′ sur l'écliptique (moyenne de 05°07′47″), et de 18°30′ (nœud ascendant N au point vernal) à 28°30′ (N au point équinoxial d'automne) sur l'équateur.

Ainsi la description des mouvements des astres fait apparaître l'existence de nombreuses périodicités, mais qui ne sont pas commensurables entre elles. Cependant, dix siècles avant J.-C., les Chaldéens connaissaient déjà le temps de retour des éclipses (de l'ordre de 18 ans et 11 jours), appelée période chaldéenne ou « saros ».

En effet, nous pouvons constater les correspondances suivantes :

— pour la Lune :

— 223 lunaisons (2 PL ou NL successives) représentent 6 585,321 1 jours,

— 239 révolutions anomalistiques (périgée) : 6 585,537 5 jours,

— 242 révolutions draconitiques (nœud ascendant) : 6 585,356 7 jours,

— 241 révolutions sidérales (étoiles fixes) : 6 584,520 3 jours.

— 241 révolutions tropiques (point vernal) : 6 584,501 1 jours,

— pour le Soleil :

— 18 années tropiques : 6 574,359 6 jours,

— 18 années sidérales : 6 574,614 6 jours,

— 18 années anomalistiques : 6 574,669 2 jours,

— 19 années draconitiques : 6 585,400 0 jours,

Après une période chaldéenne, la terre, la Lune et le Soleil se retrouvent donc approximativement dans une même configuration relative, mais les écarts par rapport à une configuration initiale s'accentuent au cours de cycles chaldéens successifs. Il serait donc faux d'affirmer que le saros représente une période stricte du système. Le fait que les durées des différentes révolutions qui le composent ne soient pas commensurables deux à deux suffit d'ailleurs à conclure que les mouvements relatifs des trois corps, terre, Lune et Soleil, ne sont pas périodiques.

3 • Le temps pour les besoins de l'étude de la marée

Depuis l'apparition de la vie sur notre globe, le cycle diurne constitue la base de temps naturelle par son incidence sur le rythme biologique. Mais pour l'organisation de leurs activités, les civilisations humaines se sont employées depuis plusieurs millénaires à définir d'une part des unités de temps plus précises et d'autre part des conventions permettant l'utilisation d'une heure commune sur des secteurs géographiques de plus en plus étendus.

Les principales bases de temps pour l'étude de la marée sont définies essentiellement à partir de la durée de révolution propre à chaque astre. L'examen de ces différents temps et des relations existant entre eux fait appel à des éléments déjà exposés par ailleurs, aussi certaines répétitions sont inévitables.

Pour les études relatives à la marée, la précision d'une minute dans la datation d'un événement est généralement considérée comme suffisante, ce qui justifie les approximations faites par la suite.

3.1 • Temps sidéral

Le temps sidéral est directement lié à la rotation terrestre autour de l'axe des pôles $\overrightarrow{TP}$, dont la vitesse angulaire ω_T de sens direct (vers l'Est) est considérée comme constante (voir 2.1) pour les besoins de l'étude de la marée. Pour un lieu déterminé, nous avons vu que l'angle horaire $\text{Æ}H_\gamma$ du point γ définit le temps sidéral local.

Le jour sidéral T_γ, (pour mémoire : terme consacré par l'usage à la place de jour tropique ou équinoxial) est le temps nécessaire pour que $\text{Æ}H_\gamma$ croisse de 2π, soit 360° ou 24 heures sidérales (hs), ce qui correspond à $\omega_T = 2\pi/T_\gamma$, soit 360°/24hs ou 15°/hs. Les fluctuations de ΔT_γ, par rapport à la valeur moyenne $\overline{T}_\gamma$, sont très faibles avec $\max|\Delta T_\gamma/T_\gamma| \approx 10^{-7}$. Ainsi pour les besoins de la marée, ce temps est considéré comme uniforme au sens de la mécanique. En effet, la vitesse angulaire ω_T a une valeur moyenne de 15,041 068 degrés par heure (du temps solaire moyen : voir 3.2), donnant une durée moyenne du jour sidéral de 23 h 56 min 04,09s avec des variations inférieures à 0,01 s en valeur absolue, parfaitement négligeables pour l'étude de la marée.

3.2 • Temps lunaires, vrai et moyen

La notion de temps lunaire n'est guère utilisée que pour les études relatives à la marée dont la Lune est le principal moteur. Il s'agit en réalité d'un

temps uniforme, dérivé du temps moyen, définit par le mouvement de la Lune moyenne (pour mémoire : astre fictif) dont la projection orthogonale sur l'écliptique est animée d'un mouvement uniforme ayant même période de révolution apparente (de point vernal à point vernal) que la Lune réelle. Rappelons que la longitude de cette projection qui varie uniformément dans le temps est appelée improprement « longitude moyenne » de l'astre au lieu de longitude de la « Lune moyenne ».

L'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs de la Lune au méridien du lieu est appelé jour lunaire vrai. Sa moyenne est le jour lunaire moyen, noté T_L. En temps moyen, nous avons $T_L = 24\text{h } 50 \text{ min } 28{,}3 \text{ s}$. C'est, en première approximation, la période fondamentale de la marée lunaire dite « diurne ». On utilise parfois le terme d'heure lunaire, égale à $T_L/24$, avec la relation : « 1 heure lunaire = 1,035 050 101 heure de temps moyen ».

3.3 • Temps solaires, vrai et moyen ; l'équation du temps

L'année tropique T_A, réglant le retour des saisons et le rythme des activités humaines, a été choisie comme la base de référence principale pour le temps. Mais, bien que le déplacement de la Terre puisse être perçu en première approximation comme un mouvement circulaire héliocentrique, l'orbite est en réalité une ellipse parcourue, conformément aux lois de Kepler, à vitesse aréolaire constante. Il en résulte une vitesse angulaire orbitale de la Terre, par rapport au Soleil (situé à l'un des foyers), oscillant autour d'une valeur moyenne avec un maximum au périhélie et un minimum à l'aphélie. En d'autres termes, l'angle horaire du Soleil $\text{Æ}_{S\nu}$, qui définit le temps solaire vrai (indice $S\nu$ pour « solaire vrai ») présente l'inconvénient de ne pas avoir une variation uniforme. Ainsi le jour solaire vrai, symbolisé ici par $T_{S\nu}$, est déterminé par le temps écoulé entre deux passages successifs du Soleil au méridien d'un lieu déterminé. Il commence à midi vrai, au moment du passage supérieur. Ce temps, primitivement mesuré par le gnomon, a été déterminé par la suite avec plus de précision par les cadrans solaires ayant le style parallèle à l'axe du monde. Ces instruments ont servi très longtemps à définir l'heure locale en usage. Cette base de temps a été utilisée notamment pour les premiers relevés du niveau marin à Brest de 1806 à 1897.

Au cours de l'année, le jour solaire vrai subit des fluctuations $\Delta T_{S\nu}$, par rapport à sa moyenne $\overline{T_{S\nu}}$ avec $\max|\Delta T_{S\nu}/\overline{T_{S\nu}}| \approx 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, bien plus importantes que celles du jour sidéral T_γ (pour mémoire : $\max|\Delta T_\gamma/\overline{T_\gamma}| \approx 10^{-7}$). Ses valeurs extrêmes sont 23 h 59 min 39 s et 24 h 00 min 30 s.

Si l'on retranche ces variations, fournies par les lois de la mécanique, au temps solaire vrai fourni par l'observation, on obtient le temps moyen local

(symbolisé par la lettre t) dont l'unité correspondante est le jour moyen, valeur moyenne $\overline{T_{S\nu}}$ établie sur la durée d'une année tropique T_A. Le temps moyen local se compte de 0 à 24 heures à partir de midi. L'écart entre les deux temps solaires (« moyen » moins « vrai ») est appelé l'équation du temps.

Nous allons formuler ci-dessous la relation donnant $T_{S\nu}$ en fonction de la longitude moyenne du Soleil, paramètre défini comme ayant une variation uniforme. Pour un lieu déterminé, nous avons la relation des angles horaires :

$$Æ H_\gamma = \alpha_{S\nu} + Æ H_{S\nu}$$

avec

$Æ H_\gamma$: angle horaire du point vernal (temps sidéral local),

$\alpha_{S\nu}$: ascension droite,

$Æ H_{S\nu}$: angle horaire du Soleil.

En dérivant cette expression par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial Æ H_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_{S\nu}}{\partial t} + \frac{\partial Æ H_{S\nu}}{\partial t}.$$

Or la dérivée du temps sidéral local $\partial Æ H_\gamma / \partial t$ n'est autre que la vitesse angulaire de la rotation terrestre $\omega_T = 2\pi / T_\gamma$, considérée comme constante. Mais il n'en est pas de même pour la dérivée de $\partial Æ H_{S\nu} / \partial t$ qui présente une variation, continue mais lente, autour d'une valeur moyenne. Aussi avec une très bonne approximation, nous avons, en assimilant la dérivée $\partial Æ H_{S\nu} / \partial t$ à l'accroissement $\delta Æ H_{S\nu} / \delta t$, avec $\delta Æ H_{S\nu} = 2\pi$ et le temps correspondant δt qui n'est autre que $T_{S\nu}$:

$$\frac{2\pi}{T_\gamma} \approx \frac{\partial \alpha_{S\nu}}{\partial t} + \frac{2\pi}{T_{S\nu}}$$

ou encore :

$$T_{S\nu} \approx \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_\gamma} - \frac{\partial \alpha_{S\nu}}{\partial t}}$$

Pour simplifier les écritures, l'indice $S\nu$ sera omis pour les coordonnées urographiques (α, β) ou écliptiques $(\lambda, 0)$ du Soleil réel. La valeur de $\partial \alpha / \partial t$ étant faible par rapport à $\omega_T = 2\pi / T_\gamma$ (de l'ordre de 1/366), nous pouvons écrire également avec un bon degré d'approximation :

$$T_{S\nu} \approx T_\gamma \left[1 + \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\omega_T} \right]$$

Par ailleurs, les relations entre coordonnées écliptiques et urographiques

nous donnent :

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan\lambda \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\lambda + \sin^2\lambda\cos^2\varepsilon} \times \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

Ainsi en tenant compte de la loi des aires de Kepler, nous avons :

$$\frac{r_{\mathrm{S}v}^2 \partial\lambda}{\partial t} = ab\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_{\mathrm{A}n}}\right)$$

avec :

$r_{\mathrm{S}v}$: distance terre – Soleil vrai à l'instant t,

a et b : demi-grand axe et demi-petit axe de l'écliptique,

$\mathrm{T}_{\mathrm{A}n}$: durée de l'année anomalistique (pour mémoire : temps écoulé entre deux passages successifs au périgée solaire : 365,259 4 jours).

Le jour solaire vrai $\mathrm{T}_{\mathrm{S}v}$, en fonction des coordonnées polaires du Soleil apparent, $(r_{\mathrm{S}v}, \lambda)$, s'exprime donc avec une très bonne approximation par :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{S}v} \approx \mathrm{T}_\gamma \left(1 + \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\lambda + \sin^2\lambda\cos^2\varepsilon} \times \frac{ab}{r_{\mathrm{S}v}^2} \times \frac{\mathrm{T}_\gamma}{\mathrm{T}_{\mathrm{A}n}}\right).$$

Pour obtenir l'équation du temps, il nous faut établir les expressions de $r_{\mathrm{S}v}$ et de λ en fonction du temps moyen t (pour mémoire : exprimé en jour de temps moyen).

En prenant la direction du périgée solaire de longitude λ_{ps} comme axe de référence dans l'écliptique, la position du Soleil apparent par rapport au centre de la Terre est donnée par l'expression en coordonnées polaires $[r_{\mathrm{S}v}, (\lambda - \lambda_{ps})]$ de l'ellipse :

$$r_{\mathrm{S}v} = a\frac{1 - e^2}{1 + e\cos(\lambda - \lambda_{ps})} \tag{A.4}$$

où e est l'excentricité de l'orbite (pour mémoire : le périgée solaire se déplace lentement dans le sens direct en accomplissant une révolution en 209,4 siècles). L'angle $(\lambda - \lambda_{ps})$ que fait la direction du Soleil par rapport à celle de son périgée est appelé « anomalie vraie ». Sa variation dans le temps n'étant pas uniforme, on définit « l'anomalie moyenne », symbolisée par la lettre M qui représente à tout moment la valeur que prendrait cet angle si la variation de la longitude du Soleil était uniforme, les époques de passage au périhélie restant les mêmes. Son expression par rapport au temps est : $\mathrm{M} = h - p_1$ où h est la longitude moyenne du Soleil (symbole h pour hélios), et p_1 la longitude moyenne du périgée solaire.

Désignons par t_0 l'instant du passage de la Terre au périhélie et par t le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier de l'an 2000 à 0 heure. La valeur de l'anomalie M en degré d'arc est déterminée par :

$$\mathrm{M}^\circ \approx \frac{360(t - t_0)}{\mathrm{T}_{\mathrm{A}n}} = 357{,}036\,3 + 0{,}985\,60t$$

Dès lors, les paramètres $(r_{\mathrm{S}\nu}, \lambda)$ du Soleil apparent peuvent s'exprimer en fonction de M. En raison de la faible valeur de l'excentricité e égale à 0,016 73, la relation A.4 nous donne en première approximation la valeur de $r_{\mathrm{S}\nu}$ en mètres :

$$r_{\mathrm{S}\nu} \approx a(1 - e\cos \mathrm{M}) = 149{,}6 \cdot 10^9 \times (1 - 0{,}016\,73 \cos \mathrm{M}).$$

Notons que le demi-grand axe de l'orbite terrestre définit avec cette approximation la distance moyenne terre – Soleil. La valeur de la longitude λ en degrés s'obtient par : $\lambda^\circ \approx 282{,}94 + \mathrm{M} + 1{,}917 \sin \mathrm{M}$.

En première approximation, la durée du jour solaire vrai $\mathrm{T}_{\mathrm{S}\nu}$ présente donc des variations cycliques de période T_{A}. L'équation du temps $\mathrm{E}(t)$ ci-dessous, fournie par le Bureau des Longitudes (Paris, France), est valable de 1900 à 2100. Elle permet de calculer l'écart $\mathrm{E}(t)$ en minutes entre temps moyen et temps solaire vrai, en exprimant les valeurs du temps t dans cette équation en jours moyens :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(t)\ \mathrm{min} = {} & 7{,}362 \sin \mathrm{M} - 0{,}144 \cos \mathrm{M} + 8{,}955 \sin 2\mathrm{M} \\ & + 4{,}302 \cos 2\mathrm{M} + 0{,}288 \sin 3\mathrm{M} + 0{,}133 \cos 3\mathrm{M} + 0{,}131 \sin 4\mathrm{M} \\ & + 0{,}167 \cos 4\mathrm{M} + 0{,}009 \sin 5\mathrm{M} + 0{,}011 \cos 5\mathrm{M} + 0{,}001 \sin 6\mathrm{M} \\ & + 0{,}006 \cos 6\mathrm{M} - 7{,}064 \cdot 10^{-5} t \sin 2\mathrm{M} + 1{,}46 \cdot 10^{-5} t \cos 2\mathrm{M}\end{aligned}$$

Les extremums sont atteints en février (+14 min) et en novembre (−16 min). Cette différence s'annule 4 fois par an (vers mi-avril, mi-juin, début septembre et la fin décembre).

Enfin il convient de noter que le jour moyen résulte d'une variation uniforme, de 0 à 24 heures, comptée à partir de midi. Afin de ne pas subir l'inconvénient d'un changement de date intervenant au milieu de la journée (entre le lever et le coucher du Soleil), on définit le temps civil qui est égal au temps moyen augmenté de 12 heures.

3.4 • Temps en usage, temps universel

Le temps civil du lieu n'est plus utilisé car par définition il change d'un lieu à l'autre ce qui n'est guère commode. C'est l'avènement du chemin de fer au XIXe siècle qui rendit nécessaire l'utilisation d'une heure commune à

des territoires étendus (par exemple, en France, la loi du 14 mars 1891 avait imposé à l'ensemble de la Métropole et à l'Algérie l'usage du temps civil de Paris). Aux époques plus anciennes et dans les endroits isolés, avant les possibilités offertes par les transmissions hertziennes, le temps civil local ou, en l'absence d'horloge publique, l'heure du cadran solaire constituait généralement le temps en usage. Ainsi, depuis leur début en 1806, les mesures marégraphiques de Brest ont été relevées ou enregistrées d'abord en temps vrai, puis en temps civil local, ensuite en temps civil de Paris, et enfin en Temps Universel.

Après le Congrès international de Washington (1884), le temps civil de Greenwich est devenu le temps légal universel, sous le nom de Temps Universel, dont le symbole est TU. Notons que la notation TMG (Temps moyen de Greenwich), souvent rencontrée à la place de TU, est impropre car elle fait référence au temps moyen et non au temps civil.

Les temps en usage dans le monde dérivent directement du Temps Universel. La surface du globe a été divisée en 24 fuseaux ayant respectivement pour lignes médianes les 24 méridiens dont les longitudes sont multiples de 15°. Ces fuseaux sont numérotés de 0 à 23 vers l'Est, à partir du méridien de Greenwich. Selon l'usage des marins, ils ont reçu le nom d'une lettre de l'alphabet par ordre alphabétique croissant, la lettre A étant attribuée au fuseau 1 et la lettre Z au fuseau 0. Par convention, le temps correspondant à chacun d'eux est le Temps Universel augmenté du numéro du fuseau. Le méridien inférieur de Greenwich, situé dans le 12e fuseau, constitue la ligne de changement de date. Lorsque le numéro du fuseau dépasse 12, il faut donc retrancher un jour à la date. Pour le 12e fuseau, on ne retranche ce jour que si le lieu est à l'Est de la ligne de changement de date.

Remarquons toutefois que les dispositions instituées par la conférence de Washington en 1884 supportent de nombreuses dérogations. Beaucoup de pays ont deux temps légaux, « l'heure d'été » et « l'heure d'hiver ». Dans certaines régions, le temps légal diffère de 30 minutes de celui du fuseau et dans certains cas, la différence est même quelconque.

Le temps universel définit à la fois une échelle de temps concrétisée, d'une part, par les calendriers et, d'autre part, par une unité de temps « la seconde de temps moyen ». Cette définition d'une unité fondamentale s'est cependant révélée trop imprécise pour certains besoins de la physique moderne, ce qui a entraîné la création du temps des éphémérides (TE) puis du temps atomique international (TAI), qui ne sont cités ici que pour mémoire, une telle précision étant inutile pour les applications concernant la marée.

3.5 • Les Calendriers

Le calcul des éléments astronomiques pour une date donnée nécessite la connaissance du temps écoulé depuis une date origine. C'est le problème de la chronologie. Les dates sont fournies par les calendriers qui définissent sans ambiguïté la numérotation de base en jours. Mais, pour des raisons de tradition et aussi de commodité, ces calendriers se présentent sous la forme d'un découpage complexe en années et en mois. Chaque civilisation a créé son propre calendrier : julien, grégorien, copte, musulman, israélite, républicain, hellénistique, indien, tamoul, cambodgien, chinois,…

Les premiers calendriers connus étaient des calendriers lunaires ou « almanachs » (de l'arabe *al* et *méné*, la lunaison), basés sur les lunaisons, intervalles de temps entre deux Nouvelles Lunes consécutives. Ce fut le cas du calendrier chaldéen. C'est encore le cas du calendrier de l'ère musulmane (l'hégire) qui est officiel dans un certain nombre de pays du Golfe Persique. On peut rappeler que le premier jour de l'an I de l'hégire correspond au 17 juillet 622, jour où Mahomet quitta La Mecque pour Médine. Mais la plupart des pays musulmans ont adopté le calendrier grégorien et n'utilisent celui de l'hégire que dans le cadre religieux.

Dans ces calendriers, la lunaison est donc utilisée comme une unité de temps. Ce choix peut sembler étonnant, mais à une époque où la notion de « temps uniforme » de la mécanique n'avait pas de sens, le cycle lunaire a pu sembler plus régulier que les cycles diurnes, qui présentent des durées de jours et de nuits variant au cours des saisons. Il est pourtant évident que cette façon de dater, indépendante des rythmes de la vie (jours, saisons, années) présente de sérieux inconvénients. Par ailleurs, la lunaison présentant des variations importantes (de 29 jours et 6 heures à 29 jours et 20 heures), son utilisation en tant qu'unité de temps n'est pas compatible avec la marche des horloges. Il est nécessaire pour cela, d'introduire la notion de lunaison moyenne, égale à 29,530 588 1 jours (29j 12h 44min) de temps moyen.

Le calendrier grégorien, actuellement d'usage quasi universel, comporte deux genres d'années, les années « communes » divisées en douze mois, ayant respectivement 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 et 31 jours, et les années « bissextiles » pour lesquelles le deuxième mois comporte 29 jours. Les années bissextiles sont celles dont le millésime est multiple de 4, sauf celles dont le millésime est multiple de 100, sans l'être de 400. Ainsi, l'année « 1900 » est commune et l'année « 2000 » (divisible par 400) est bissextile. La durée moyenne de l'année ainsi obtenue, appelée année grégorienne, est égale à 365,242 5 jours de temps moyen, voisine de la durée de l'année tropique (365,242 2 jours).

Le calendrier grégorien a été défini par rapport au calendrier julien créé en l'an 45 avant J.-C.. Dans le calendrier julien, toutes les années, dont le millésime est multiple de 4 (multiple de 100 compris), sont bissextiles. La durée moyenne de l'année julienne est donc égale à 365,25 jours, sensiblement différente de la durée de l'année tropique (une unité de temps souvent utilisée en astronomie est le siècle julien de 36 525 jours de temps moyen). De cette différence a résulté, au cours des siècles, un décalage des dates des solstices et des équinoxes qui a été corrigé (en partie seulement) par l'adoption du calendrier grégorien en supprimant 10 jours au mois d'octobre 1582 : le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 (julien) est le vendredi 15 octobre 1582 (grégorien). Le calendrier grégorien a été adopté immédiatement en Italie, en Espagne, au Portugal et aux Pays-Bas catholiques. En France, la réforme n'a été appliquée qu'en décembre de la même année, en passant du dimanche 9 décembre 1582 au lundi 20 décembre 1582. En Grande-Bretagne, c'est seulement en 1752 que cette modification a été appliquée : le 2 septembre 1752 a été suivi immédiatement du 14 septembre. Adopté progressivement jusqu'au début du XXe siècle, le calendrier grégorien est maintenant en usage dans le monde entier (sauf pour la célébration de certaines fêtes religieuses).

Ces considérations sont importantes pour les calculs astronomiques ou les calculs de marée qui sont parfois effectués pour la reconstitution d'événements historiques : il est nécessaire dans ce cas de savoir traduire une date, après en avoir vérifié son calendrier d'appartenance, dans un système chronologique cohérent.

Selon une convention adoptée par les astronomes afin de faciliter le comptage chronologique, les jours de temps moyen, commençant à midi TU, sont numérotés à partir d'une époque suffisamment éloignée dans le passé pour précéder la période historique. Le numéro du jour, compté à partir de cette date origine, est le jour julien, dont l'origine est le premier janvier 4713 avant J.-C. du calendrier julien. Le jour julien représente donc le temps écoulé à midi TU depuis cette époque. Notons à ce propos que pour les historiens, le calendrier julien est utilisé pour les dates antérieures à sa création (−45) et que l'année qui précède l'an I de l'ère chrétienne est notée 1 avant J.-C. Elle est bissextile. Les années bissextiles sont donc les années 1, 5, 9, etc., avant J.-C. Les astronomes utilisent la notation algébrique : l'an 1 avant J.-C. correspond à l'année « 0 » des astronomes, l'an 2 avant J.-C. à l'année « −1 », etc.

B

Champs de forces et potentiels

Dans de nombreux problèmes faisant intervenir des champs de vecteurs (forces ou courants), l'introduction de la notion de potentiel peut apporter des simplifications appréciables avec une meilleure compréhension de la physique du phénomène. Dans le cas de la marée (chapitre III), nous avons analysé la distribution spatiale de la force génératrice de la marée sur le globe à un instant déterminé. Cette distribution est représentative d'un champ de forces qui a une structure « méridienne » admettant la direction des centres astre-terre comme axe de révolution. La question se pose de savoir si cette distribution de forces dérive d'un potentiel afin d'en examiner la structure.

Cette annexe donne un bref rappel sur les champs de vecteurs et de potentiel, dont les notions sont communes à de nombreux phénomènes physiques : électricité, magnétisme, hydrodynamique, gravitation, etc. Dans la suite du texte, le terme de « force » sera utilisé de préférence à celui de « vecteur » ou de « vitesse ». Les principales définitions nécessaires à la compréhension des notions de champs de forces et de potentiel sont d'abord rappelées. Ensuite, l'examen des champs plans permettra d'assurer une meilleure liaison avec les champs dits « méridiens » dans l'espace à trois dimensions.

1 • Champs de forces : terminologie et définitions

Soit un repère orthonormé O*xyz*. Nous supposons qu'il existe une région de l'espace simplement connexe où un champ de forces est défini par des fonctions régulières (uniformes, non nulles, continues et admettant des

dérivées partielles continues). Ces conditions entraînent l'existence de lignes de force et de tubes de force.

Une ligne de force a pour propriété d'admettre comme tangente la force appliquée en chacun de ses points M de coordonnées (x, y, z). Si le vecteur force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M), caractérisant le champ étudié, admet des fonctions régulières pour composantes $[\mathrm{F}_{(x)}, \mathrm{F}_{(y)}, \mathrm{F}_{(z)}]$, les lignes de forces vérifient les deux équations différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{F}_{(x)}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{F}_{(y)}} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{F}_{(z)}}. \tag{B.1}$$

Ainsi, il passe par tout point M de cet espace une ligne et une seule (application du théorème de Cauchy sur l'existence des solutions d'un système d'équations différentielles).

Un tube de force est une surface constituée par un ensemble de lignes de force s'appuyant sur une courbe fermée, entièrement contenue dans l'espace connexe considéré. En outre, cette courbe ne doit avoir aucun point double et aucun arc commun avec une ligne de force.

Le champ de forces, jouissant des propriétés ci-dessus définies, est dit « solénoïdal » si la divergence de la force « $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M) y est nulle en tout point M, c'est-à-dire si :

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{F}}\,(\mathrm{M}) = \frac{\partial \mathrm{F}_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}_{(z)}}{\partial z} = 0 \tag{B.2}$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ est « l'opérateur vectoriel » de composantes $\left(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\right)$ en coordonnées cartésiennes, et le symbole $\times$ désigne le produit scalaire. Cette dernière propriété entraîne la conservation du flux à travers un tube de force. L'équivalent en hydrodynamique est la conservation du débit d'un écoulement fluide incompressible dans un tube de courant.

La force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M) dérive d'un potentiel scalaire U(M) si ses composantes vérifient la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}\,(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\nabla}\,\mathrm{U}(\mathrm{M}) \tag{B.3a}$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ est l'opérateur vectoriel défini précédemment. Cette égalité donne en représentation matricielle les composantes cartésiennes de la force :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}\,(\mathrm{M}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{F}_{(x)} \\ \mathrm{F}_{(y)} \\ \mathrm{F}_{(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \mathrm{U}/\partial x \\ \partial \mathrm{U}/\partial y \\ \partial \mathrm{U}/\partial z \end{bmatrix} \tag{B.3b}$$

Ainsi, pour qu'une force dérive d'un potentiel, la condition nécessaire et suffisante est d'avoir un rotationnel (ou tourbillon) nul, soit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(M) = 0 \tag{B.4}$$

Signalons que dans un certain nombre d'applications (en électricité et en magnétisme notamment), il est souvent convenu d'appeler U(M) la fonction de forces, le potentiel étant défini par l'opposé $-U(M)$.

Pour un champ solénoïdal dérivant d'un potentiel scalaire, la force $\vec{F}(M)$ satisfait les deux conditions B.2 et B.3, d'où la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U(M) = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 z} = \Delta U = 0 \tag{B.5}$$

où l'opérateur Δ est le « Laplacien ». La fonction U(M), qui possède la propriété d'être à la fois régulière (définie, continue et dérivable) et solution de l'équation de Laplace sans second membre, est dite « harmonique ».

2 • Champs plans

Dans le cas de certains phénomènes physiques, la force $\vec{F}(M)$ possède les deux propriétés suivantes : d'une part elle reste parallèle à un plan fixe et d'autre part son intensité et sa direction restent les mêmes quand son origine M se déplace selon une perpendiculaire au plan précité. Le champ de forces ainsi défini est un « champ plan ». Avec un trièdre orthonormé O*xyz*, où le champ de forces reste identique dans tous les plans parallèles à O*xy*, il suffit d'examiner ce qui se passe dans ce dernier plan pour connaître la totalité du champ dans l'espace considéré. Dans cette partie, la coordonnée z n'intervient pas ($z = 0$).

2.1 • Lignes de forces d'un champ plan solénoïdal

En prenant le repère cartésien O*xy* comme référence, l'équation différentielle d'une telle ligne s'écrit :

$$-F_{(y)} \cdot dx + F_{(x)} \cdot dy = 0 \tag{B.6}$$

Dans le cas d'un champ solénoïdal (divergence nulle) le premier membre de B.6 est une différentielle totale $d\Lambda$. Il existe alors, en tout point $M(x, y)$, une fonction $\Lambda(M)$ dite de flux ou de débit, satisfaisant l'équation :

$$\Lambda(x, y) = \lambda$$

où λ est constant. La ligne de force correspondante sera désignée par le symbole Λ_λ. La représentation matricielle des composantes de $\overrightarrow{F}(M)$ peut s'écrire :

$$\overrightarrow{F}(M) \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{(x)} \\ F_{(y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\partial\Lambda/\partial y \\ -\partial\Lambda/\partial x \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

Considérons la variation de la fonction $\Lambda(x, y)$ le long d'un chemin joignant un point quelconque P de la ligne Λ_p à un point quelconque Q de la ligne Λ_q. Le long du parcours PQ, soit $\overrightarrow{ds}$ le déplacement élémentaire défini par ses composantes :

$$\overrightarrow{ds} \Rightarrow \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

et $\overrightarrow{n}$ le vecteur unité de la normale en chacun de ses points, obtenu par une rotation de sens direct de $\pi/2$ à partir de $\overrightarrow{ds}$. Nous avons ainsi en chaque point de la courbe PQ les composantes du vecteur $\overrightarrow{n}\, ds$,

$$\overrightarrow{n}\, \mathrm{d}s \Rightarrow \begin{bmatrix} -dy \\ +dx \end{bmatrix}$$

avec $ds = \| \overrightarrow{ds} \|$.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda(Q) - \Lambda(P) &= \int_P^Q \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\, dy \right] \\ &= \int_P^Q \Big(-F_{(y)}\, dx + F_{(x)}\, dy \Big) \end{aligned}$$

soit :

$$\Lambda(Q) - \Lambda(P) = -\int_P^Q \overrightarrow{F}(M) \times \overrightarrow{n}\, ds.$$

C'est, au signe près, le flux de la force $\overrightarrow{F}(M)$ à travers le chemin PQ. Dans une interprétation hydrodynamique, ceci correspond au débit du fluide entre les deux lignes de courant correspondantes Λ_p et Λ_q.

2.2 • Champ plan solénoïdal : potentiel complexe

Pour qu'une force $\overrightarrow{F}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire U(M), la condition nécessaire et suffisante est que le rotationnel de cette force soit nul.

En tenant compte de B.7, ce rotationnel s'écrit :

$$\frac{\partial F_{(y)}}{\partial x} - \frac{\partial F_{(x)}}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 y}\right) = -\Delta_h \Lambda$$

où le symbole Δ_h est l'opérateur Laplacien dans le plan Oxy, supposé horizontal (indice h), soit :

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}.$$

Ainsi pour un champ plan solénoïdal, cette condition nécessaire et suffisante revient à dire que la fonction de flux $\Lambda(M)$ vérifie comme le potentiel scalaire U(M), l'équation de Laplace.

2.2.1 • Relations d'association entre potentiel et ligne de force

Les propriétés démontrées précédemment nous permettent d'écrire les relations d'association suivantes entre les fonctions représentatives d'un potentiel plan solénoïdal et celles des lignes de flux :

$$F_{(x)} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \tag{B.8a}$$

$$F_{(y)} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x}. \tag{B.8b}$$

Comme pour $\Lambda(x, y)$, considérons la variation de la fonction $U(x, y)$ le long d'un chemin joignant un point quelconque P de la ligne U_p à un point quelconque Q de la ligne U_q. Sur la courbe PQ, soit $\overrightarrow{ds}\,(dx, dy)$ le déplacement élémentaire le long du parcours.

Nous avons ainsi la différence de potentiel :

$$\begin{aligned} U(Q) - U(P) &= \int_P^Q \left[\frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy\right] \\ &= \int_P^Q (F_{(x)}\, dx + F_{(y)}\, dy) \\ &= \int_P^Q \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{ds}. \end{aligned}$$

Elle représente le travail effectué par la force $\overrightarrow{F}$ (M) le long de PQ, quel que soit le chemin choisi pour joindre ces deux points.

La connaissance de l'une des deux fonctions, $U(x, y)$ ou $\Lambda(x, y)$, entraîne la détermination de l'autre à une constante additive près. De plus, les lignes équipotentielles U_u et les lignes de flux Λ_λ sont orthogonales.

En orientant les lignes équipotentielles U_u dans le sens croissant des lignes de flux Λ_λ, et ces dernières dans le sens décroissant des premières,

c'est-à-dire dans le sens de la force $\overrightarrow{F}(M)$, nous avons, en tout point M, $(\overrightarrow{ds_\Lambda}, \overrightarrow{ds_U}) = \pi/2$, $\overrightarrow{ds_\Lambda}$ et $\overrightarrow{ds_U}$ étant les déplacements vectoriels élémentaires sur les lignes correspondantes définies par les indices.

La somme $\Phi = U + j\Lambda$ devient alors une fonction régulière de la variable complexe $\zeta = x+jy$: la fonction Φ définit le « potentiel complexe » du champ solénoïdal dérivant du potentiel U.

Il est important de remarquer que la linéarité de l'opérateur gradient fait que toute combinaison linéaire de potentiels complexes élémentaires (représentatifs de champs plans solénoïdaux dérivant d'un potentiel) est elle-même une fonction potentielle complexe. En outre, signalons que les relations d'association B.8a et B.8b permettent la permutation du rôle des deux fonctions. Si nous considérons les lignes Λ_λ comme des équipotentielles, les lignes de flux correspondantes sont les U_u.

2.2.2 • Exemples de potentiels complexes

Considérons, à titre d'exemple, les cas très simples suivants :

Le potentiel complexe « parallèle ». La fonction complexe $\Phi_{(p)} = \zeta = x + jy = U_{(p)} + j\Lambda_{(p)}$ est représentative d'un champ plan « parallèle » que nous indiçons par le symbole (p) ». Les équipotentielles et les lignes de flux sont respectivement $x = u$ et $y = \lambda$, u et λ étant des constantes. Ainsi, les lignes de forces sont « parallèles » à l'axe Ox et les équipotentielles sont parallèles à Oy. La force $\overrightarrow{F}_{(p)}(M)$ a pour composantes :

$$\overrightarrow{F}_{(p)}(M) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} F_{(x)} = 1 \\ F_{(y)} = 0 \end{array} \right.$$

Le travail effectué pour passer d'un point quelconque de l'équipotentielle $x = u$ à un point quelconque de l'équipotentielle $x = u + k$ est égal à k et le flux entre tout point de $y = \lambda$ et de $y = \lambda + \nu$ est égal à ν, k et ν étant des constantes arbitraires.

Le potentiel complexe « radial ». Avec $\zeta = re^{j\varphi}$, la fonction $\Phi_{(r)} = (\kappa/2\pi)\log\zeta = (\kappa/2\pi)\log(re^{j\varphi})$, où κ est une constante, positive ou négative, représente le champ plan dont les lignes de forces sont « radiales », ce qui se traduit par l'indice (r). Ce potentiel peut encore s'écrire : $\Phi_{(r)} = (\kappa/2\pi)(\log r + j\varphi) = U_{(r)}(r) + j\Lambda_{(r)}(\varphi)$

Au coefficient $\kappa/2\pi$ près, les équipotentielles sont les circonférences concentriques $\log r \propto u$ ayant pour centre l'origine des axes d'où émanent les lignes de forces selon les rayons $\varphi \propto \lambda$ (p.m. u et λ constants).

La force $\overrightarrow{F}_{(r)}(M)$ sur le rayon $\overrightarrow{OM}$ de vecteur unité $\overrightarrow{\nu}$ est égale à :

$$\overrightarrow{F_{(r)}}(M) = \frac{\partial U_{(r)}}{\partial r}\overrightarrow{\nu} = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{1}{r}\overrightarrow{\nu}$$

Le flux de la force à travers chacune des circonférences reste le même et égal à κ. Ce flux s'obtient aussi par : $\Lambda(\varphi = 2\pi) - \Lambda(\varphi = 0) = \kappa$. L'origine se comporte comme une source si la constante κ est positive, comme un puits si elle est négative.

Le potentiel complexe « hyperbolique ». La fonction complexe $\Phi_{(h)} = \zeta^2 = (x + jy)^2$ s'exprime aussi par la relation :

$$\Phi_{(h)} = (x^2 - y^2) + j2xy = \mathrm{U}_{(h)} + j\Lambda_{(h)}$$

C'est un champ plan dont les lignes de forces sont hyperboliques ; il est indicé par le symbole (h). En effet, les équipotentielles ont pour équation $\mathrm{U}_{(h)} = x^2 - y^2 = u$ et les lignes de flux $\Lambda_{(h)} = 2xy = \lambda$, u et λ constants. Ces équations définissent deux familles d'hyperboles orthogonales. Les asymptotes des équipotentielles sont les bissectrices (droites $y = \pm x$) des axes Ox et Oy, et celles des lignes de forces sont les axes eux-mêmes.

Les composantes de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{(h)}(\mathrm{M})$ sont ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{(h)}(\mathrm{M}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{F}_{(x)} = \partial \mathrm{U}_{(h)}/\partial x = +2x \\ \mathrm{F}_{(y)} = \partial \mathrm{U}_{(h)}/\partial y = -2y \end{bmatrix}$$

L'origine est un point particulier mais non singulier. La dérivée $\mathrm{d}\Phi_{(h)}/\mathrm{d}\zeta = 2\zeta$ y est définie et continue ; elle s'y annule. Sur chaque axe du repère Oxy, la force change de sens au passage de l'origine qui est un point d'arrêt du flux : point de convergence sur Oy, de divergence sur Ox.

3 • Champs méridiens

Les champs sont dits « méridiens » lorsque les lignes de forces et les lignes équipotentielles sont contenues dans des demi-plans méridiens délimités par une droite, axe de révolution du champ. En d'autres termes, les surfaces équipotentielles et les tubes de flux associés sont de révolution autour de cet axe. Pour examiner les diverses propriétés de ces champs, nous suivrons une démarche analogue à celle qui a été adoptée pour les champs plans.

Considérons le repère orthonormé Oxyz ; l'axe Ox est l'axe de révolution qui permet d'engendrer les surfaces équipotentielles et de flux à partir des lignes correspondantes contenues dans le demi-plan $y \geq 0$ de Oxy. Les propriétés des champs méridiens s'étudient également par la considération des fonctions de flux et de potentiel comme pour les champs plans. Mais des différences existent et proviennent essentiellement des relations d'association (B.8a et B.8b) qui ne sont pas les mêmes.

3.1 • Relations d'association entre flux et potentiels méridiens

Dans le demi-plan $y \geq 0$ de Oxy, soit les composantes de la force et les coordonnées du point d'application :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{F}_{(x)} \\ \mathrm{F}_{(y)} \end{array} \right. \qquad \mathrm{M} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$$

La force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est tangente à la ligne de flux Λ_λ au point M. Dans le trièdre Oxyz, nous désignons par ϖ la « longitude du champ » dont le « méridien origine » est le méridien « supérieur » de l'axe Oy, l'axe de révolution Ox étant considéré comme axe « polaire » du champ étudié.

Soit $\partial\Lambda = d\Lambda\partial\varpi$ la variation du flux correspondant à la différentielle $d\Lambda = (\partial\Lambda/\partial x)dx + (\partial\Lambda/\partial y)dy$ au point M le long de l'élément de circonférence $y\overrightarrow{\partial\varpi}$. Ceci correspond au flux de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M) à travers l'élément tronconique ayant pour côtés la portion d'arc $y\overrightarrow{\partial\varpi}$ et la portion de courbe $\overrightarrow{ds_{\mathrm{U}}}(dy, -dx)$ normale à la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M). Le flux à travers la surface annulaire engendrée par une rotation complète autour de Ox de l'élément $\overrightarrow{ds_{\mathrm{U}}}$ est ainsi donné par la relation :

$$2\pi d\Lambda = 2\pi y(-\mathrm{F}_{(y)}dx + \mathrm{F}_{(x)}dy).$$

Ainsi au point M considéré, nous avons :

$$d\Lambda(x, y) = -y\mathrm{F}_{(y)}dx + y\mathrm{F}_{(x)}dy$$

et les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (M) s'expriment dans le plan Oxy par :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{F}_{(x)} = +\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y} \\ \mathrm{F}_{(y)} = -\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, si $\mathrm{U}(x, y)$ est la fonction représentant la ligne équipotentielle passant par M, nous obtenons les relations d'association suivantes:

$$\mathrm{F}_{(x)} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = +\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial\Lambda}{\partial y} \tag{B.9a}$$

$$\mathrm{F}_{(y)} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial\Lambda}{\partial x} \tag{B.9b}$$

Ces relations sont à comparer à celles des champs plans (B.8a et B.8b). Les lignes U_u et Λ_λ se coupent à angle droit, mais ne sont pas permutables.

À partir des expressions B.9a et B.9b et par dérivations croisées pour éliminer successivement les fonctions Λ et U, nous obtenons :

$$\partial^2 \mathrm{U}/\partial^2 x + \partial^2 \mathrm{U}/\partial^2 y + y^{-1}\partial \mathrm{U}/\partial y = 0 \tag{B.10a}$$

$$\partial^2 \Lambda/\partial^2 x + \partial^2 \Lambda/\partial^2 y - y^{-1}\partial \Lambda/\partial y = 0 \tag{B.10b}$$

Il est possible de vérifier l'équivalence de la relation (B.10a) et de l'équation de Laplace. Considérons le trièdre OXYZ obtenu en posant $\mathrm{X} = x$, $\mathrm{Y} = y\cos\varpi$ et $\mathrm{Z} = y\sin\varpi$ (le plan OXY coïncide avec Oxy pour $\varpi = 0$). Nous avons alors, d'une part :

$$y^2 = \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 \Rightarrow y \cdot dy = \mathrm{Y} \cdot d\mathrm{Y} + \mathrm{Z} \cdot d\mathrm{Z}$$

soit

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{Y}}{y} = \cos\varpi$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{Z}}{y} = \sin\varpi$$

et d'autre part :

$$\tan\varpi = \mathrm{Z}/\mathrm{Y} \Rightarrow y \cdot d\varpi = -\sin\varpi \cdot d\mathrm{Y} + \cos\varpi \cdot d\mathrm{Z}$$

soit $\partial\varpi/\partial\mathrm{Y} = -y^{-1}\sin\varpi$ et $\partial\varpi/\partial\mathrm{Z} = y^{-1}\cos\varpi$.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \\
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Y}} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\cos\varpi - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varpi}\frac{\sin\varpi}{y} \\
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Z}} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\sin\varpi + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varpi}\frac{\cos\varpi}{y}.
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que l'écoulement est méridien (le potentiel U est indépendant de ϖ, donc $\partial\mathrm{U}/\partial\varpi = 0$), on obtient en dérivant une deuxième fois :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 \mathrm{X}} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 x} \\
\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 \mathrm{Y}} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 y}\cos^2\varpi + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\sin^2\varpi}{y} \\
\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 \mathrm{Z}} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial^2 y}\sin^2\varpi + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\cos^2\varpi}{y}.
\end{aligned}$$

Par addition, nous pouvons constater l'équivalence avec (B.10a) :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 Y} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad \text{(B.11a)}$$

Les deux expressions identiques B.10a et B.11a expriment le fait que le flux de force est constant entre deux tubes de révolution autour de l'axe Ox. Si les paramètres x et y demeurent constants, la fonction U(X, Y, Z) reste invariable quand le point M de coordonnées (X = x, Y, Z) décrit un parallèle de rayon y autour de Ox. La fonction U est dite « harmonique zonale ». Cette appellation traduit que la fonction U vérifie l'équation de Laplace sans second membre et que sa valeur est indépendante de l'angle ϖ, longitude du champ.

En revanche, la fonction associée Λ(X, Y, Z) n'est pas harmonique car, en opérant de même sur la fonction Λ, il vient :

$$\Delta\Lambda = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 Y} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 Z} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial^2 y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \text{(B.11b)}$$

Mais compte tenu de la relation B.10b, il en résulte que

$$\Delta\Lambda = \frac{2}{y}\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$

Le Laplacien de Λ n'est donc pas nul, mais la fonction de flux Λ est indépendante de ϖ comme U.

Ainsi, pour que les fonctions U et Λ constituent un ensemble associé (U; Λ) d'un champ méridien tel que U soit fonction harmonique zonale et Λ fonction de flux, il faut et suffit qu'elles soient liées par les relations B.9a et B.9b.

La linéarité des relations B.10a et B.10b entraîne la propriété suivante : si les ensembles, (U_A; Λ_A) et (U_B; Λ_B) constituent deux champs méridiens distincts, la combinaison linéaire de ces champs ($U_A + cU_B$; $\Lambda_A + c\Lambda_B$), où c est une constante (positive ou négative), représente également un champ méridien (U_C; Λ_C). Cette propriété permet, tout particulièrement, de définir un potentiel à partir de champs élémentaires des différentes forces en présence.

3.2 • Champs méridiens et polynômes de Legendre

Un champ méridien (U; Λ)$_n$ est dit homogène et de degré n si le potentiel U est une fonction homogène de x et y, et de degré n. En raison des relations linéaires d'association B.9a et B.9b, la fonction Λ est évidemment de degré $n + 1$.

En général, en posant $\mu = x/r$, les fonctions harmoniques zonales, homogènes et de degré n, sont de la forme $U = r^n f_n(\mu)$.

En tenant compte des relations $r^2 = x^2 + y^2$ et $\mu = x/r$, il vient :

$$dr = \mu dx + \sqrt{1-\mu^2}\, dy$$

$$\mathrm{d}\mu = \frac{dx}{r} - \frac{x}{r^2} dr = \frac{1}{r^3}\,(y^2 dx - dy \cdot dy)$$

Les équations d'association B.9a et B.9b, exprimées en fonction de r et de μ s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}\mu + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mu}\frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial r}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}\frac{xy}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mu}\frac{xy}{r^3} = -\frac{1}{y}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial r}\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}\frac{y^2}{r^3}\right).$$

En résolvant le système en $\partial \mathrm{U}/\partial r$ et en $\partial \mathrm{U}/\partial \mu$, nous obtenons :

$$r^2 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} \tag{B.12a}$$

$$(1-\mu^2)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mu} = +\frac{\partial \Lambda}{\partial r} \tag{B.12b}$$

Par dérivations croisées en éliminant Λ, nous obtenons l'équation différentielle de Legendre, équivalente à celle de Laplace pour les fonctions homogènes (B.11a) :

$$(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}^2\mu} - 2\mu\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}\mu} + n(n+1)f_n = 0 \tag{B.13}$$

La connaissance d'une intégrale particulière de cette équation permet l'obtention de l'intégrale générale. Ceci est le cas lorsque n est entier, l'intégrale est alors un polynôme, dit de Legendre, de degré n et désigné en général par $\mathrm{P}_n(\mu)$.

Les premiers polynômes sont formés de proche en proche. Pour les premiers, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(\mu) &= 1 \\
\mathrm{P}_1(\mu) &= \mu \\
\mathrm{P}_2(\mu) &= (3\mu^2 - 1)/2 \\
\mathrm{P}_3(\mu) &= (5\mu^3 - 3\mu)/2 \\
\mathrm{P}_4(\mu) &= (35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)/8 \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Nous pouvons constater qu'ils obéissent à la relation de récurrence :

$$(n+1)\cdot \mathrm{P}_{n+1}(\mu) - (2n+1)\cdot \mu \cdot \mathrm{P}_n(\mu) + n \cdot \mathrm{P}_{n-1}(\mu) = 0$$

Une propriété importante des champs méridiens, admettant l'axe de révolution Ox comme ligne de courant, concerne la possibilité de les définir à partir de champs plans admettant l'axe Ox à la fois comme ligne de courant et comme axe de symétrie. On démontre que la transformation du potentiel plan, représenté par une fonction complexe $\Phi(\zeta)$ avec $\zeta = x + jy$, en potentiel méridien U s'effectue par l'intermédiaire de l'intégrale :

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(x + jy\cos\varpi)\mathrm{d}\varpi \tag{B.14a}$$

Dans le cas d'un champ plan défini par une fonction $\Phi(\zeta)$ homogène et de degré n par rapport à ζ, la relation intégrale B.14a détermine nécessairemen un champ méridien et homogène de même degré. En prenant, par exemple, le champ plan représenté par la fonction complexe $\Phi(\zeta) = \zeta^n$ où n est un entier, nous obtenons avec $\mu = x/r$ le champ méridien :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_{(n)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x + jy\cos\varpi\right)^n \mathrm{d}\varpi \\ &= \frac{r^n}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\mu + j\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\right)^n \mathrm{d}\varpi \end{aligned} \tag{B.14b}$$

Le dernier terme apparaît comme le produit de r^n par un polynôme en μ, qui se trouve être le polynôme de Legendre de degré n, seul « polynôme intégrale » de l'équation différentielle de Legendre (A2.13), d'où l'expression intégrale de $\mathrm{P}_n(\mu)$:

$$\mathrm{P}_{n,}(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\mu + j\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\right)^n \mathrm{d}\varpi \tag{B.15}$$

Il est ainsi possible de démontrer que tout potentiel d'un champ méridien peut être développé en séries de fonctions homogènes dans le voisinage d'un point ordinaire de l'axe de révolution. Autrement dit, dans un espace connexe autour d'un point (qui n'est pas singulier sur l'axe du champ méridien : source ou puits par exemple), toute fonction harmonique zonale peut se développer en polynômes de Legendre. La démonstration de cette propriété s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses (en particulier l'axe de symétrie doit être ligne de force et l'origine du repère ne peut être point singulier) et sur l'expression intégrale des polynômes de Legendre B.15.

Soit $\Phi(\zeta = x + jy)$ la fonction analytique, définissant le champ dans le plan Oxy ($y \geq 0$), qui est réelle quand la variable ζ est réelle. Le potentiel $\Phi(\zeta = 0)$ est pris pour unité de potentiel, sa valeur est réelle. Le développement de la fonction $\Phi(\zeta)$ au voisinage de l'origine O, qui est un point

ordinaire du champ, peut s'écrire :

$$\Phi(\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} b_n \zeta^n \tag{B.16a}$$

où N est un entier dont la valeur peut varier de l'unité à l'infini selon la nature de la fonction $\Phi(\zeta)$, les b_n étant des constantes.

Le potentiel méridien correspondant s'exprime par :

$$\mathrm{U}(r, \mu) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} b_n r^n \mathrm{P}_n(\mu) \tag{B.16b}$$

Le potentiel à l'origine O ayant été choisi comme unité de potentiel, l'expression B.16b peut s'écrire aussi :

$$\mathrm{U(M)/U(O)} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\mathrm{N}} b_n r^n \mathrm{P}_n(\mu) \tag{B.16c}$$

Ce résultat est extrêmement important pour comprendre le rôle joué par les polynômes de Legendre dans l'étude des champs méridiens homogènes.

4 • Exemples de champs méridiens

Comme pour les champs plans, une représentation pratique des ensembles $(\mathrm{U}; \Lambda)$ est fournie par le tracé des courbes U_u et Λ_λ dans le demi-plan Oxy ($y \geq 0$). La différence avec les champs plans est due au facteur y^{-1}, présent dans les relations d'association (A2.09.a et b) ; ce facteur interdit la permutation des rôles entre lignes de forces et équipotentielles comme dans les champs plans.

Nous donnons ci-après des exemples qui sont en relation avec le potentiel de la force génératrice de la marée, correspondant à un astre déterminé.

4.1 • Champ méridien « parallèle »

Les lignes de forces sont « parallèles » à l'axe de révolution ; comme pour le champ plan, le champ méridien correspondant sera aussi indicé par le symbole (p). Nous avons vu que le champ plan donnant les lignes de forces parallèles à l'axe Ox s'exprime par le potentiel complexe dans le plan Oxy :

$$\Phi_{(p)} = \zeta = x + jy = re^{j\varphi}$$

Le champ méridien admettant les mêmes lignes de forces est obtenu avec des fonctions $\Lambda_{(p)}$ ne dépendant que de y seulement dans le plan Oxy et la relation B.9b donne :

$$\mathrm{F}_{(y)} = -\frac{1}{y}\frac{\partial \Lambda_{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{U}_{(p)}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Delta \mathrm{U}_{(p)} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}_{(p)}}{\partial^2 x} = 0$$

soit :

$$\mathrm{U}_{(p)} = x = r\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{F}_{(x)} = \partial \mathrm{U}_{(p)}/\partial x = 1$$

Pour les lignes de forces $\Lambda_{(p)}$ associées, nous avons ainsi :

$$\mathrm{d}\Lambda_{(p)} = y(-\mathrm{F}_{(y)}\mathrm{d}x + \mathrm{F}_{(x)}\mathrm{d}y) = y\mathrm{d}y \Rightarrow \Lambda_{(p)} = y^2/2 = (r\sin\varphi)^2/2$$

Le champ méridien dont les lignes de forces sont parallèles à l'axe est ainsi représenté dans Oxy par l'ensemble : $(\mathrm{U}_{(p)}; \Lambda_{(p)}) = (x; y^2/2)$

Ce champ méridien admet pour surfaces équipotentielles les plans $x = u$ et pour tubes de forces les surfaces cylindriques d'axe Ox et de rayon $y = \sqrt{2\lambda}$, u et λ étant constants.

Le travail de la force, entre deux points quelconques respectivement situés dans les plans $x = u_0$ et $x = u_1$ est égal à $u_1 - u_0$. Le flux, entre deux tubes de force de rayons respectifs $y = \sqrt{2\lambda_0}$ et $y = \sqrt{2\lambda_1}$, est égal à $2\pi(\lambda_1 - \lambda_0)$.

Ici, la fonction représentant le potentiel est homogène et du premier degré :

$$\mathrm{U}_{(p)}(\mathrm{M}) = x = r\mu \tag{B.17a}$$

La vérification de l'expression de ce champ méridien en polynôme de Legendre par l'intégrale B.14b est immédiate :

$$\mathrm{U}_{(p)} = \frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}(\mu + j\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi)\mathrm{d}\varpi = r\mu = r\mathrm{P}_1(\mu) \tag{B.17b}$$

4.2 • Champ méridien « radial » : source ou puits de forces

Dans un champ plan, nous avons vu l'exemple du potentiel complexe « radial » d'indice (r)

$\Phi_{(r)} = \mathrm{U}_{(r)}(r) + j\Lambda_{(r)}(\varphi) = (\kappa/2\pi)(\log r + j\varphi)$.

Ce potentiel plan est représentatif d'une source si $\kappa > 0$ ou d'un puits si $\kappa < 0$. Les circonférences centrées sur l'origine en sont les équipotentielles et leurs rayons les lignes de forces (forces radiales).

Pour des raisons de symétrie, le champ méridien radial comparable admet comme surfaces équipotentielles les sphères concentriques autour de l'origine et comme lignes de forces les demi-droites issues du centre (sens positif de l'origine au point d'application de la force). Dans le demi-plan Oxy

($y \geq 0$), où les coordonnées complexes du point M sont $x + jy = re^{j\varphi}$ avec φ variant de 0 à π le potentiel U_r n'est fonction que de r et Λ_r que de φ.

La considération du flux, qui doit rester le même à travers toute sphère centrée sur l'origine, implique une force normale à la sphère et inversement proportionnelle au carré du rayon de cette sphère. Si κ est la valeur de ce flux, nous avons donc :

$$\overrightarrow{F}_{(r)}(M) = \frac{dU_{(r)}}{dr}\overrightarrow{\nu} = \frac{\kappa}{4\pi r^2}\overrightarrow{\nu} \Rightarrow U_{(r)} = -\frac{\kappa/4\pi}{r}$$

$$F_{(x)} = F_{(r)}\cos\varphi; F_{(y)} = F_{(r)}\sin\varphi \Rightarrow d\Lambda = -F_{(r)}y(\sin\varphi\, dx - \cos\varphi\, dy)$$

avec $F_{(r)} = \|\overrightarrow{F}_{(r)}\|$ et $\overrightarrow{\nu}$ vecteur unitaire de de $\overrightarrow{OM}$

En tenant compte du fait que :

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$$

il vient :

$$d\Lambda_{(r)} = (\kappa/4\pi)\sin\varphi d\varphi \Rightarrow \Lambda_{(r)} = -(\kappa/4\pi)\cos\varphi.$$

Ainsi au facteur $\kappa/4\pi$ près, on obtient la représentation du champ méridien radial par le couple de fonctions :

$$(U_{(r)}; \Lambda_{(r)}) \propto (-1/r; -\cos\varphi)$$

Comme pour le champ plan correspondant, nous avons une source ou un puits selon que κ est positif ou négatif. Dans l'espace à trois dimensions, les tubes de forces sont des surfaces coniques de révolution ayant l'origine O pour sommet avec φ comme demi-angle. Comme il se doit, tous ces cônes coupent à angle droit les sphères équipotentielles.

Dans de nombreuses applications, il est souvent plus commode d'étudier la structure de ce type de champ au voisinage d'un point particulier T, point ordinaire très éloigné du point singulier du champ (source ou puits). Pour examiner la formulation du champ dans le voisinage du point T, nous changeons ici de convention. Le repère représenté jusqu'à présent par O*xyz* sera désigné par OXYZ. Le repère T*xyz* sera celui qui a le point T pour origine avec les axes parallèles à ceux de OXYZ ; la direction $\overrightarrow{TO}$ est axe de révolution de ce champ « radial ».

Avec $r_O = \|\overrightarrow{OT}\|$, distance entre les deux origines, la valeur de l'abscisse du point T sur OX est prise égale à $-r_O$.

Dans le demi-plan commun à T*xy* ($y \geq 0$) et à OXY ($Y \geq 0$), soit un point M aux distances respectives r et a des points O et T avec $a/r \ll 1$, nous avons :

— dans OXY (Y $\geqslant$ 0) : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \Rightarrow \mathrm{X} + j\mathrm{Y} = re^{j\varphi}$
— dans Txy ($y \geqslant 0$) : $\overrightarrow{\mathrm{TM}} \Rightarrow x + jy = ae^{j\theta}$

L'expression matricielle des composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ dans les deux repères et sa représentation complexe dans Txy s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\mathrm{X} \\ -\mathrm{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\mathrm{O} - x \\ 0 - y \end{bmatrix} \Rightarrow (r_\mathrm{O} - x) - jy = r_\mathrm{O}(1 - \zeta)$$

où

$$\zeta = \alpha e^{j\theta} \text{ avec } \alpha = a/r_\mathrm{O} \ll 1. \tag{B.18}$$

En posant $\mu = x/a = \cos\theta$, la distance r est ainsi donnée par :

$$r^2 = (x - r_0)^2 + y^2 = r_0^2(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)$$

Le potentiel $\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{M})$ au point M, rapporté à celui du point T, non nul et égal à $\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{T}) = \kappa/4\pi r_\mathrm{O}$, s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{M})}{\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{T})} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}} \tag{B.19a}$$

Signalons que, les calculs s'effectuant dans le repère d'origine T, il y a inversion du signe du paramètre κ dans sa relation avec le point singulier du champ radial (valeur positive pour un puits, négative pour une source).

Le point T étant sur l'axe de révolution $\zeta(\mathrm{T}) = 0$, son potentiel complexe est réel avec $\Phi_{(r)}(\mathrm{T}) = \mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{T})$. En tenant compte de l'expression complexe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ dans (A2.18), l'expression du potentiel complexe $\Phi_{(s)}(\mathrm{M})$ dans le plan Txy peut se développer sous la forme :

$$\frac{\Phi_{(r)}(\mathrm{M})}{\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{T})} = \frac{1}{1 - \zeta} = 1 + \sum_{n=1}^{n\to\infty} \zeta^n$$

En raison de la propriété résumée par les relations (B.16a) et (B.16c), le potentiel $\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{M})$ rapporté à celui de T s'exprime donc dans Txyz par la série en polynôme de Legendre suivante :

$$\frac{\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{M})}{\mathrm{U}_{(r)}(\mathrm{T})} = 1 + \sum_{n=1}^{n\to\infty} \alpha^n \mathrm{P}_n(\mu) \tag{B.19b}$$

Les relations B.19a et B.19b étant équivalentes, on en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{n\to\infty} \alpha^n \mathrm{P}_n(\mu)$$

où

$$|2\alpha\mu - \alpha^2| \ll 1 \tag{B.20}$$

Ainsi tout champ méridien radial, donc à surfaces équipotentielles sphériques, créé par un puits (ou une source), se développe à partir d'un point ordinaire de l'espace par la série harmonique (B.19b) en polynômes de Legendre, la droite joignant le point ordinaire au point singulier étant l'axe du champ.

4.3 • Champ méridien d'allure « hyperbolique » $a^2 P_2(\mu)$

Rappelons que, pour un astre déterminé A (Lune ou Soleil), la force génératrice de la marée en un point M est la différence des attractions gravitationnelles exercées par cet astre au point M (force radiale de direction $\overrightarrow{MA}$, donc fonction de la position du point sur le globe) et au centre T de la Terre (force d'intensité constante en tout point M et de direction fixe parallèle à $\overrightarrow{TA}$). Les champs de ces deux forces admettent $\overrightarrow{TA}$ pour axe de symétrie.

Le potentiel générateur de la marée, lié à un astre donné, est ainsi la différence entre un champ « radial $U_{(r)}$ et un champ « parallèle $U_{(p)}$.

Pour tout champ méridien radial $U_{(r)}$, nous venons de voir que la relation B.19b permet d'exprimer le potentiel de tout point M au voisinage de tout point ordinaire de l'axe de révolution. Le centre de la Terre T étant un point ordinaire du champ gravitationnel créé par l'astre A (puits de force), son potentiel $U_{(r)}(T)$ s'exprime par :

$$U_{(r)}(T) \equiv V_A(T) = km_A/r_A$$

où $V_A(T)$ est le potentiel d'attraction en T créé par l'astre A, k la constante de la gravitation universelle, m_A la masse de l'astre et r_A la distance des centres Terre-astre. Pour un point M à la surface du globe ($a = a_T$, rayon terrestre), l'expression B.19b devient :

$$\frac{U_{(r)}(M)}{V_A(T)} = 1 + \sum_{n=1}^{n\to\infty} \alpha^n P_n(\mu) \qquad \text{(B.21)}$$

où α et μ conservent les mêmes définitions, les distances r_O et a étant remplacées respectivement par r_A (origine O au centre de l'astre A) et par a_T, rayon terrestre.

En ce qui concerne le champ méridien parallèle, avec une force égale à l'unité et parallèle à l'axe du champ, le potentiel correspondant $U_{(p)}$ est donné par B.17a. En tenant compte d'une part des conventions adoptées pour travailler dans le repère d'origine T, et d'autre part, du fait que la deuxième force appliquée en M est constante, égale à km_A/r_A^2, et de direction fixe $\overrightarrow{TA}$ (force d'entraînement du repère Txyz), le potentiel du champ

parallèle correspondant $U_{(p)}(M)$ peut s'écrire :

$$U_{(p)}(M) - U_{(p)}(T) = \frac{km_A}{r_A^2}x = \frac{km_A}{r_A}\frac{a_T}{r_A}\cos\theta$$

soit :

$$U_{(p)}(M) - U_{(p)}(T) = V_A(T)\alpha P_1(\mu) \tag{B.22}$$

Les potentiels étant définis à une constante près, posons :

$$U_{(p)}(T) = V_A(T) = \frac{km_A}{r_A}$$

La dernière relation de B.22 peut donc s'exprimer par :

$$U_{(p)}(M)/V_A(T) = 1 + \alpha P_1(\mu) \tag{B.23}$$

La différence des deux champs élémentaires B.21 et B.23 donne ainsi le potentiel générateur de la marée à la surface du globe, créé par l'astre A, soit :

$$\frac{U_{(s)}(M) - U_{(p)}(M)}{V_A(T)} = \sum_{n=2}^{n\to\infty} \alpha^n P_n(\mu) \tag{B.24}$$

Les termes de la série B.24 sont rapidement décroissants avec $\alpha \ll 1$, aussi est-il intéressant d'étudier le champ méridien relatif au terme en $\alpha^2 P_2(\mu)$.

Ci-après, la distance r_A est supposée constante, par contre nous considérons la distance TM variable ; afin d'éviter qu'elle ne soit confondue avec le rayon terrestre a_T, nous reprenons la désignation initiale a. Posons (indice m pour marée) :

$$U_{(m)} = r_A^2\alpha^2 P_2(\mu) = a^2 P_2(\mu)$$

À une facteur multiplicatif $km_A r^{-3}$, U_m est représentatif du potentiel de marée crée par l'astre A.

Notons que ce champ méridien correspond, par l'intermédiaire de l'intégrale B.14b au champ plan hyperbolique $\Phi(\zeta) = \zeta^2$. Ce champ $U_{(m)}$ s'étudie aisément en examinant les intersections des surfaces équipotentielles et des tubes de forces avec le plan Txy. Rappelons les relations entre coordonnées cartésiennes et polaires d'un point M de ce plan :

$$x/a = \cos\theta = \mu \text{ avec } a^2 = x^2 + y^2$$

La partie du champ, représentée dans la figure B.1, est celle du quadrant aux coordonnées x et y positives, correspondant à $0 \leq \theta \leq 90°$. Les traces dans le plan Txy des surfaces équipotentielles correspondent aux lignes d'équation :

$$U_{(m)} = a^2 P_2(\mu) = a^2(3\cos^2\theta - 1)/2 = u$$

avec u constant, soit :

$$\mathrm{U}_{(m)} = \frac{2x^2 - y^2}{2} = u$$

Les surfaces équipotentielles, engendrées par rotation de ces lignes autour de Tx, constituent deux familles d'hyperboloïdes de révolution ayant le même cône asymptote de sommet T. Cette surface conique est donc au même potentiel que le point T, choisi ici comme potentiel de référence avec $u = 0$. Les traces de cette conique dans Txy sont les droites d'équation $y = \pm x\sqrt{2}$. Le demi-angle au sommet θ_0 est déterminé par :

$$\cos\theta_0 = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta_0 = 53°44$$

Dans la figure B.1, ce couple de droites correspond aux traces dont la couleur est référencée dans l'encart par $p(0)$, pour potentiel de valeur nulle $u = 0$. C'est le lieu des points où les lignes de flux (ou de forces) sont tangentes aux sphères centrées sur T.

Dans le cas où $u < 0$, l'expression $y^2 = 2(x^2 - u)$ est toujours positive et la première famille de surfaces équipotentielles est constituée d'hyperboloïdes de révolution à une nappe. Les traces correspondantes dans la figure B.1 sont les courbes $p(u)$ avec u négatif.

Dans le cas où $u > 0$, les valeurs de la fonction $y^2 = 2(x^2 - u)$ ne sont positives que pour $x^2 > u$. La deuxième famille de surfaces équipotentielles est formée d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes. Leurs traces dans la figure B.1 correspondent aux courbes $p(u)$, avec u positif.

Dans le plan Txy, les coordonnées de M et les composantes de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{(m)}(\mathrm{M})$ s'expriment par :

$$\mathrm{M} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathrm{F}}_{(m)}(\mathrm{M}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{F}_{(x)} = \partial \mathrm{U}_{(m)}/\partial x = 2x \\ \mathrm{F}_{(y)} = \partial \mathrm{U}_{(m)}/\partial y = -y \end{array} \right.$$

En notant que $\mathrm{F}_{(x)}$ est le double de l'abscisse de M, point d'application de la force, et $\mathrm{F}_{(y)}$ l'opposé de l'ordonnée, nous retrouvons le résultat de la construction de Proctor avec l'astre à l'infini.

Le module de $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{(m)}$ est ainsi égal à $a\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$.

Avec $a = a_{\mathrm{T}}$ et au facteur multiplicatif près $g(m_{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{T}})(a_{\mathrm{T}}^2/r_{\mathrm{A}}^3)$, c'est la relation donnée par Proctor. La règle de Proctor correspond donc à l'expression du potentiel générateur de la marée limitée au premier terme en $\mathrm{P}_2(\cos\theta)$.

La décomposition de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{(m)}$ selon $\overrightarrow{\mathrm{TM}}$ et la tangente à la circonférence passant par M (ce qui correspond à une rotation θ du repère Txy)

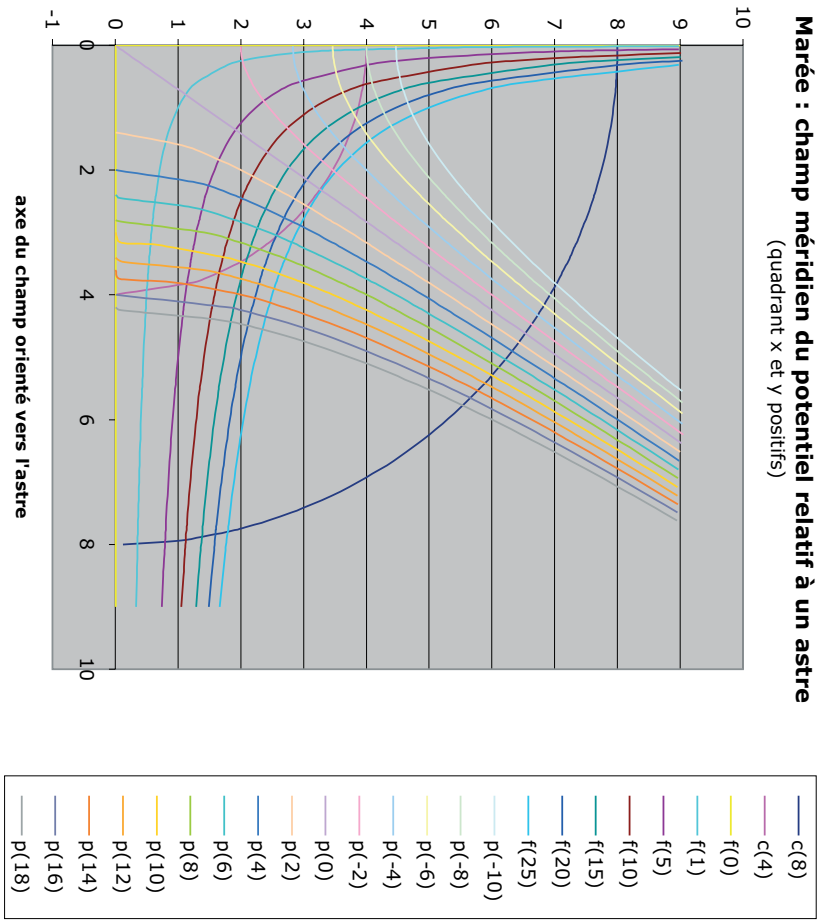


Figure B.1 — Champ du potentiel engendré par un astre : à une constante près, il correspond à l'approximation limitée au polynôme de Legendre $P_2(\cos\theta)$. Les lignes $c(a)$, $f(\lambda)$ et $p(n)$ représentent respectivement, dans le quadrant x et y positifs, les traces des sphères de rayon a, les lignes de flux de valeur *lambda* et les équipotentiels de valeur u.

donne respectivement la composante verticale $F_{(\zeta)}$ et l'horizontale $F_{(\xi)}$:

$$F_{(\xi)} = \frac{1}{a}\frac{\partial U_{(m)}}{\partial \theta} = -3a\cos\theta\sin\theta = -\frac{3}{2}a\sin 2\theta$$
$$F_{(\zeta)} = \frac{\partial U_{(m)}}{\partial a} = 2aP_2(\cos\theta) = a(3\cos^2\theta - 1)$$

La valeur absolue de la composante horizontale $F_{(\xi)}$ (celle qui agit sur la marée) est nulle sur l'axe Tx ($\theta = 0°$ et 180°) et dans le plan équatorial du champ ($\theta = 90°$) ; elle est maximale pour $\theta = 45°$ et 135°.

La composante verticale $F_{(\zeta)}$, comme $P_2(\cos\theta)$, est nulle sur la conique asymptote $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta_0 = 53°44$. La valeur absolue présente deux maximums, un principal sur l'axe Tx ($\theta = 0°$ et 180°) et un secondaire dans le plan équatorial du champ, qui est celui du grand cercle où l'astre est vu à l'horizon ($\theta = 90°$). Pour ce deuxième maximum, la force est toujours dirigée vers le centre T (composante horizontale nulle).

Les tubes de flux, de révolution autour de Tx, s'étudient de la même manière que les surfaces équipotentielles. Les équations de leurs traces dans Txy sont déduites des relations d'association B.9a et B.9b, soit à une constante près :

$$\frac{\partial \Lambda_{(m)}}{\partial y} = +y\frac{\partial U_{(m)}}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \Lambda_{(m)=} = xy^2$$

ou encore

$$\frac{\partial \Lambda_{(m)}}{\partial x} = -y\frac{\partial U_{(m)}}{\partial y} = y^2 \Rightarrow \Lambda_{(m)=} = xy^2$$

Dans Txy, les lignes de flux ont donc pour équations : $\Lambda_{(m)} = xy^2 = \lambda$, où λ est constant.

Dans Txy, les lignes de force sont du 3e degré avec une allure « hyperbolique ». Les tubes correspondants ont une structure ressemblant à une famille d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes admettant pour asymptotes l'axe Tx qui est ligne de flux ($\lambda = 0$ avec $y = 0$) et le plan de « l'équateur » du champ qui est surface de flux ($\lambda = 0$ avec $x^2 = 0$). Les nappes de flux λ et $-\lambda$ sont symétriques par rapport au plan $x = 0$, plan équatorial du champ. Ainsi quand les valeurs absolues des abscisses respectives croissent, les lignes de flux s'orientent dans des directions opposées. Dans le quadrant x et y positifs (voir figure B.1), les lignes de forces correspondent aux valeurs positives de λ. La courbe $f(\lambda)$ représente la ligne de flux pour la valeur positive λ correspondante.

Le tracé des quarts de circonférences, de rayons respectifs $a = 4$ et $a = 8$, permet une meilleure visualisation de la structure de ce champ méridien de « marée », lié à l'astre A, par rapport aux sphères de centre T.

C
Le puits de tranquillisation

L'étude de l'ensemble du système est très complexe. Sa réponse dépend non seulement des dimensions et des formes des différents éléments (puits, orifice et conduit), mais aussi des conditions hydrodynamiques internes et externes (viscosité, perte de charge, vagues, courant, différence de densité). De plus, les conditions environnementales du site entraînent généralement salissures, concrétions ou envasement au niveau de l'orifice ou du conduit.

Très peu d'auteurs se sont préoccupés de cette question. Nous pouvons citer O'Brien (1950), Lennon (1967), Cross (1968) et surtout Noye (1968, 1970, 1972, 1974a, b & c). Après avoir établi « l'équation du puits » concernant la réponse du niveau du puits dans sa configuration la plus simple (puits avec orifice sans conduit avec une viscosité nulle pour l'eau de mer), cette équation sera étendue au puits avec un conduit en tenant compte de la viscosité du fluide et de la rugosité du conduit. Ensuite, un modèle numérique très simplifié de la réponse d'un puits, aux dimensions bien déterminées, sera appliqué aux deux cas (puits avec orifice sans conduit et puits avec conduit) en supposant que l'excitation externe est purement sinusoïdale (marée ou houle).

1 • L'équation du puits de tranquillisation

La mise en équation exposée ci-dessous s'inspire des premiers travaux de Noye sur le puits avec orifice communiquant directement avec l'eau de mer, ce type de puits est le plus usité.

Considérons un site côtier où la profondeur est égale à H (par rapport au niveau moyen) et où $h(t)$ représente l'évolution du niveau de la mer (de moyenne nulle : $\overline{h(t)} = 0$), la variation étant positive selon la verticale ascendante.

Un puits cylindrique, de diamètre D , possède une ouverture circulaire de centre O et de diamètre d à une profondeur moyenne z_0 (fig. C.1), jamais atteinte par les plus basses mers. Autrement dit, le niveau moyen se trouve à la cote z_0 (valeur toujours positive) par rapport au point O. Désignons par $\eta(t)$ l'écart de $h(t)$ par rapport à $h_p(t)$, niveau du puits à l'instant t, soit :

$$\eta(t) = h(t) - h_p(t) \tag{C.1}$$

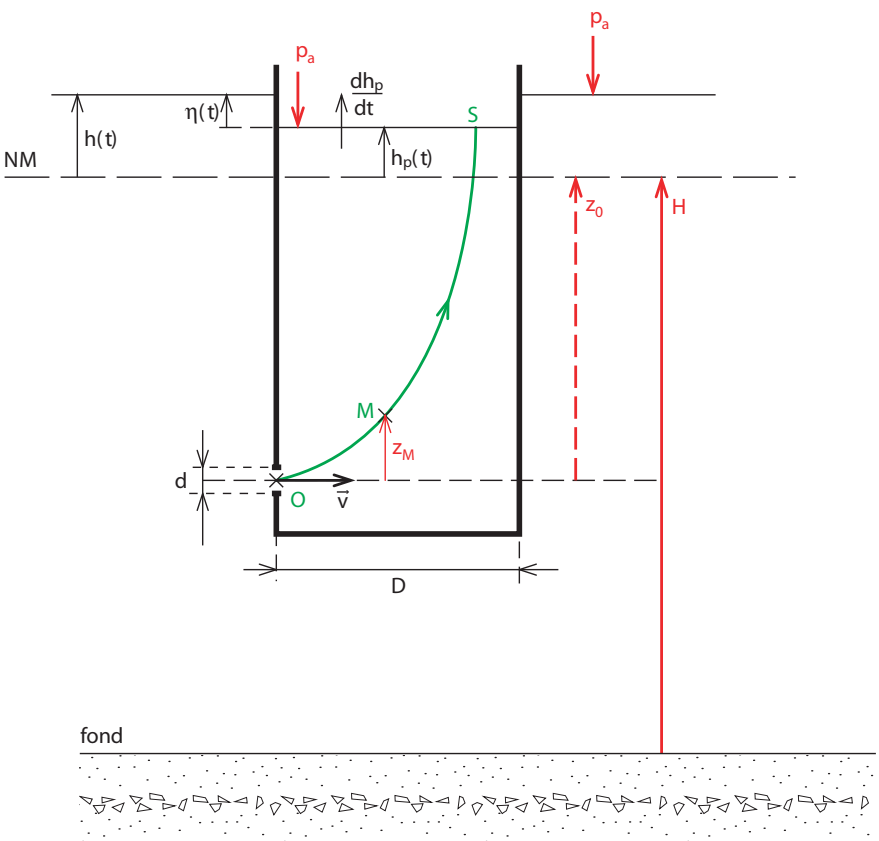


Figure C.1 — Schéma d'un puits de tranquillisation de diamètre D sans conduit : l'orifice O (diamètre d) communique directement avec la mer. Les notations sont précisées dans le texte. NM : niveau moyen $\overline{h(t)} = 0$.

Nous admettrons par ailleurs que l'eau de mer est un fluide parfait, incompressible et isotherme, donc de masse volumique ρ constante et de viscosité nulle ($\upsilon = 0$).

À l'intérieur du puits, en tout point M, de cote z_M par rapport à l'orifice et soumis à la pression p_M , la vitesse v_M dérive d'un potentiel Φ_M et l'équation de Bernoulli généralisée situé sur la ligne de courant passant par M (filet fluide OMS de la figure C.1, le point S étant à la surface de l'eau du puits) s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial t} + \frac{1}{2} v_M^2 + g z_M + \frac{p_M}{\rho} = f(t) \tag{C.2}$$

La fonction $f(t)$ étant la même le long cette ligne, l'équation (C.2) appliquée respectivement aux points S et O donne la relation :

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{dh_p}{dt}\right)^2 + g(z_0 + h_p) + \frac{p_a}{\rho} = \frac{\partial \Phi_O}{\partial t} + \frac{1}{2} v_O^2 + \frac{p_O}{\rho} \tag{C.3}$$

Dans cette dernière expression, p_a est la pression atmosphérique en S, p_O et v_O représentant respectivement la pression et la vitesse du fluide (sens positif vers le puits) au niveau de l'orifice O.

Pour déterminer la pression p_O, il convient de faire des hypothèses supplémentaires. Nous supposons que les courants autour du puits ne provoquent aucun effet Venturi et que la seule composante variable de p_O est celle liée à l'onde de surface h (supposée sinusoïdale : vagues, houles, seiches, marées). La pression associée à cette onde de gravité est fonction de l'immersion de l'orifice O. À cette immersion, égale à z_0, le facteur de transmission k_O (tenant compte de l'atténuation exponentielle de la pression) est également fonction du nombre d'onde κ de l'onde, soit :

$$k_O = \frac{\cosh[\kappa(H - z_0)]}{\cosh(\kappa H)} \approx \exp(-\kappa^2 z_0 H)$$

$$k_O \approx 1 - \kappa^2 z_0 H \tag{C.4}$$

avec $\kappa^2 z_0 H \ll 1$.

Pour les très grandes longueurs d'onde (marée par exemple), ce coefficient est égal à l'unité.

La pression au niveau de l'orifice s'exprime ainsi par :

$$p_O = p_a + \rho g(z_0 + k_O h) \tag{C.5}$$

En tenant compte de la convention choisie pour le signe de la vitesse v_O, l'équation de continuité s'écrit :

$$D^2(dh_p/dt) = d^2 \cdot v_O \Rightarrow v_O = (dh_p/dt)/r^2 \tag{C.6}$$

avec $r = d/D$.

La relation (C.3) devient alors :

$$\frac{\partial(\Phi_S - \Phi_O)}{\partial t} = g(k_O h - h_p) + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}h_p/\mathrm{d}t}{m}\right]^2 \tag{C.7}$$

où

$$m^2 = r^4/(1 - r^4) \tag{C.8}$$

L'estimation du premier membre de l'équation (C.7) peut s'obtenir par intégration de la vitesse v_M le long du filet fluide (ligne OMS). Si le puits est long et étroit ($D \ll z_0$), la vitesse dans le puits est en première approximation égale à $\mathrm{d}h_p/\mathrm{d}t$ et la distance OS peut s'assimiler à $z_0 + h_p$. Avec ces approximations, nous avons :

$$\Phi_S - \Phi_O \approx (z_0 + h_p)(\mathrm{d}h_p/\mathrm{d}t) \tag{C.9}$$

et la relation (C.7) s'exprime par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}h_p}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g\frac{2m^2}{1 - 2m^2}(k_p h_p - k_O h) \tag{C.10}$$

où

$$k_p = 1 + \frac{z_0}{g}\frac{\mathrm{d}^2 h_p/\mathrm{d}t^2}{h_p} \tag{C.11}$$

L'équation (C.10) est dite « équation du puits » pour un fluide, de viscosité nulle, communiquant directement à la mer.

Le coefficient k_p traduit l'inertie du puits. Pour une onde sinusoïdale caractérisée par sa vitesse angulaire ω et son nombre d'onde κ , les deux coefficients k_p et k_O sont du même ordre de grandeur. En raison des hypothèses faites et de la relation de dispersion de Laplace, pour les ondes de gravité, qui s'exprime par :

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa H) \tag{C.12}$$

il vient :

$$k_p \approx 1 - (z_0/g)\omega^2 = 1 - \kappa z_0 \tanh(\kappa H) \approx 1 - \kappa^2 z_0 H \tag{C.13}$$

En tenant compte de la définition (C.4) de k_O, nous obtenons ainsi pour une onde purement sinusoïdale :

$$k_p \approx k_O \tag{C.14}$$

L'équation (C.10) n'étant pas facile à modéliser (difficulté à définir les

coefficients k_p et k_O), nous admettrons que $k_p = k_O = 1$ et que $r = d/D \ll 1$ (ce qui entraîne $m \approx r^2$), l'équation du puits (C.10) simplifiée s'écrit :

$$\frac{dh_p}{dt} = \frac{d(h-\eta)}{dt} = m\eta\sqrt{\frac{2g}{|\eta|}} \tag{C.15}$$

soit :

$$\frac{d\eta}{dt} + m\eta\sqrt{\frac{2g}{|\eta|}} = \frac{dh}{dt} \tag{C.16}$$

où η est l'écart défini en (C.1)

Cette dernière relation est obtenue également en supposant que la vitesse v_O, définie par l'équation de continuité (C.6), est égale à chaque instant à la vitesse v donnée par la relation de Torricelli :

$$v^2/2 = g|\eta| \tag{C.17}$$

Ceci revient à faire l'hypothèse hydrostatique et à négliger l'inertie du puits (donc l'immersion de l'orifice).

En réalité, l'eau de mer n'est pas un fluide parfait. En tenant compte du coefficient de viscosité cinématique, Noye (1974,b) démontre qu'il est possible de construire un puits, avec un conduit de longueur l , ayant une réponse linéaire. Pour les fréquences relativement basses (notamment celles de la marée), le temps de réponse ne serait fonction que des caractéristiques du puits. La correction à apporter a posteriori au déphasage pour chaque composante de marée ne poserait pas de problème avec les moyens de calcul actuels. Cependant la réalisation d'un tel système exigerait un conduit, parfaitement lisse (sans rugosité), ayant une longueur l très grande par rapport à son diamètre d ($l > 10^2 d$) afin d'y maintenir un écoulement qui soit toujours laminaire. De plus la maintenance de l'ensemble ne serait pas aisée en raison des problèmes de salissure et d'envasement.

Même avec un puits sans conduit, l'écoulement à travers l'orifice est souvent turbulent. Ainsi, pour une même valeur de l'écart $|\eta|$, selon que le flux est entrant ou sortant, la turbulence n'est pas la même et la section efficace de l'orifice est modifiée dans chacun des cas. Il en résulte que les modules des vitesses correspondantes sont différents. Ceci s'explique par le fait qu'une partie de l'énergie cinétique se dissipe en chaleur ; pour simplifier les équations de conservation de l'énergie le long du filet fluide, cet effet est généralement représenté par une diminution du gradient de pression théorique (celui qui est obtenu dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait). L'intégrale de cet écart de gradient, sur l'ensemble du filet fluide, traduit une chute de potentiel ou « perte de charge ». Aussi convient-il de s'assurer que la

géométrie de l'orifice communicant avec la mer (soit directement, soit avec conduit) favorise un écoulement le moins turbulent possible.

Nous allons examiner ci-dessous les résultats de modèles numériques, appliqués à un puits aux caractéristiques bien déterminées (avec et sans conduit), prenant en compte la nature de l'écoulement. L'écoulement sera considéré laminaire pour un puits sans conduit. Dans le cas du puits avec conduit, la rugosité de ce dernier sera prise en compte, le régime sera laminaire ou turbulent selon la vitesse de l'écoulement.

2 • Modélisation numérique du système

Une modélisation numérique simplifiée, mais adéquate, de la réponse d'un puits aux caractéristiques bien déterminées, permet de quantifier les erreurs et de les réduire éventuellement (en agissant sur les caractéristiques du puits) afin d'obtenir des résultats satisfaisants pour les composantes de la marée.

L'évaluation de la perte de charge induite par la traversée d'un orifice ou d'une conduite est un problème difficile à résoudre. Elle fait intervenir la turbulence des écoulements fluides dont la physique n'est que partiellement maîtrisée dans les cas concrets. Il est néanmoins possible de s'appuyer sur des résultats empiriques (mais ayant des bases expérimentales), largement admis pour résoudre ce type de problème. Nous rappelons brièvement ces résultats qui seront utilisés dans les modèles présentés.

2.1 • Rappel sur les écoulements d'un fluide dans un tube

Ce sont les méthodes de l'analyse dimensionnelle qui fournissent la base de la formulation des paramètres dont les valeurs interviennent dans les équations des écoulements laminaires (écoulement de Poiseuille) ou turbulents (écoulement hydraulique). La notion de viscosité μ d'un fluide remonte à Newton (1713) qui eut l'idée d'une résistance intérieure proportionnelle à la vitesse relative d'éléments fluides glissant les uns sur les autres (pour l'eau à 20°C : $\mu \approx 10^{-3}$kg/ms). Dans les équations exprimant l'accélération du fluide d'un écoulement laminaire, c'est le rapport $\upsilon = \mu/\rho$ qui intervient ; il définit la « viscosité cinématique » ($\upsilon \approx 10^{-6} m^2/s$ pour l'eau à 20°), parfois appelée « viscosité cinématique moléculaire » pour la distinguer de la « viscosité cinématique turbulente » qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de $10^{11}\upsilon$, notamment pour les écoulements océaniques. Cette turbulence accroît considérablement la perte de charge, symbolisée par p_c dans la suite du texte.

Pour un conduit donné (tube de diamètre constant) à parois lisses (rugosité nulle), il semble logique d'admettre que, d'un point de vue hydrodynamique, le gradient de perte de charge par unité de longueur et par unité de masse – désignons-le par $\Gamma = (\mathrm{d}p_c/\mathrm{d}l)/\rho$ qui a les dimensions d'une accélération – soit fonction :

— de d , diamètre du tube,
— de ρ, masse volumique du fluide,
— de υ, coefficient de viscosité cinématique et
— de v, vitesse de l'écoulement.

Toutes ces grandeurs sont alors liées par une relation de la forme :

$$\mathrm{F}(\Gamma, d, \rho, \upsilon, v) = 0 \tag{C.18a}$$

Cette relation reste valable quelles que soient les unités choisies (dans un système cohérent). En prenant comme unités fondamentales, d pour la longueur, ρ pour la masse volumique et v pour la vitesse, la relation (C.18a) se ramène à une relation entre deux rapports sans dimensions :

$$\mathrm{F}(\Gamma d/v^2, 1, 1, \upsilon/vd, 1) = 0 \tag{C.18b}$$

Selon les conventions des hydrauliciens, le « coefficient de perte de charge λ » est défini par :

$$\lambda = \frac{\Gamma d}{(v^2/2)} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}l}\frac{d}{(v^2/2)} \tag{C.19}$$

et le nombre de Reynolds Re par :

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\upsilon} = \frac{\rho v d}{\mu}$$

On en déduit, à partir de (C.18b), que le coefficient de perte de charge est fonction du nombre de Reynolds :

$$\lambda = f(\mathrm{Re}) \tag{C.20}$$

La loi de Hagen-Poiseuille déterminée expérimentalement pour le régime laminaire donne :

$$\lambda = 64/\,\mathrm{Re} \tag{C.21}$$

Si l'on porte en abscisses log(Re) et log(λ) en ordonnées, la courbe représentative de (C.21) est une droite jusqu'à une certaine valeur de Re pour laquelle apparaît la turbulence (voir figure C.2 : diagramme de Moody). Cette valeur critique, dépendant de l'agitation du liquide lorsqu'il pénètre dans le tube, est d'autant plus élevée que cette agitation est plus faible. Cette valeur n'est jamais inférieure à $2{,}4 \cdot 10^3$, mais peut dépasser 10^4 par une régularisation extrême de l'écoulement à l'entrée du tube. Au-delà de la valeur

critique de Re, la courbe monte brusquement pour redescendre ensuite lentement. De nombreux auteurs ont étudié le régime turbulent dans un tube lisse ; ces résultats expérimentaux sont représentés par la courbe inférieure du diagramme de Moody correspondant à l'intervalle $(3 \cdot 10^3, 10^7)$ du nombre de Reynolds. L'équation donnée par Karman pour cette courbe est :

$$\lambda[\log_{10}(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}) - 0{,}40]^2 = 0{,}25 \qquad \text{(C.22)}$$

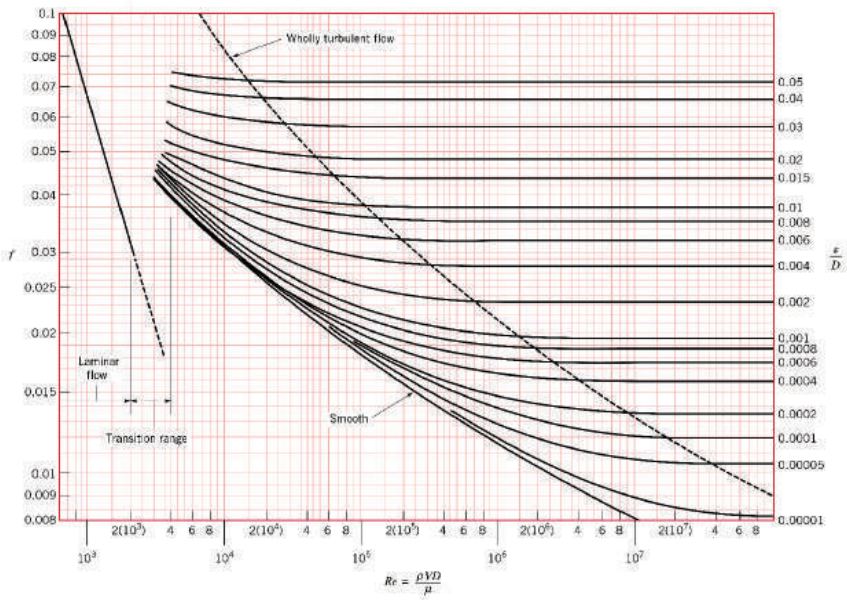


Figure C.2 — Le diagramme de Moody (échelle log-log) donnant le coefficient de perte de charge λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité ε/d (modifier f, V et D respectivement en λ, v et d)

En pratique pour la modélisation, on considère *grosso modo* que le régime d'écoulement est respectivement :

— laminaire si $\mathrm{Re} < 2 \cdot 10^3$,

— turbulent si $\mathrm{Re} > 4 \cdot 10^3$.

Entre ces deux valeurs, le régime est transitoire. En outre, pour les calculs des systèmes hydrauliques, la règle suivante est souvent adoptée. Un écoulement laminaire, dont la vitesse croît à partir de zéro, se maintient dans cet état jusqu'à ce que $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^3$; à l'inverse, lorsqu'un régime est pleinement turbulent au départ, il le reste tant que $\mathrm{Re} \geq 2 \cdot 10^3$.

Dans le cas d'une paroi rugueuse, le comportement est plus complexe. Si nous désignons par le symbole ϵ la dimension caractéristique des aspérités du tube, la rugosité d'un tube peut être caractérisée par le rapport ϵ/d. La grandeur ϵ fait partie des paramètres difficiles à évaluer. Pour les conduits utilisés dans les puits de tranquillisation, la valeur du millimètre est adoptée comme ordre de grandeur pour les tubes neufs, mais en raison des salissures qui peuvent se développer au cours du temps, cette valeur peut se révéler trop faible. Cependant, sous réserve de satisfaire la condition $\epsilon/d \ll 1$, une valeur très précise du paramètre ϵ n'est pas requise du fait que l'on constate que les effets de la rugosité ne se font sentir qu'à partir d'une certaine valeur de Re, d'autant plus faible que la rugosité est plus grande. Au-delà de cette valeur, le coefficient de perte de charge λ tend rapidement vers une valeur, indépendante de Re et fonction uniquement de la rugosité ϵ/d. Tous ces résultats sont résumés dans le diagramme de Moody (figure C.2).

2.2 • Application numérique à un puits aux caractéristiques données

Nous avons établi que le système hydraulique du puits de tranquillisation constitue un filtre non linéaire. Il serait utile d'étudier les fluctuations du niveau interne correspondant à la superposition de plusieurs ondes sinusoïdales du niveau marin externe. Malheureusement, cette étude, qui nécessite une sélection préalable de cas critiques représentatifs, reste à réaliser. Nous ne présentons ici que la réponse du puits à une onde sinusoïdale de fréquence bien déterminée. Les deux cas types (puits sans conduit et puits avec conduit) sont présentés, en examinant dans chaque cas la réponse à l'onde semi-diurne d'abord et à la houle ensuite. L'équation du puits est résolue numériquement dans le domaine spectral par la méthode de Runge-Kutta. Dans le cas d'un puits, équipé d'un conduit de diamètre constant, le coefficient de perte de charge λ est ajusté à chaque pas d'intégration à partir du diagramme de Moody.

Puits sans conduit. Le puits de tranquillisation avec orifice communiquant directement à la mer (sans conduit) est le type de puits le plus répandu. Il est généralement constitué d'un simple tube (acier inoxydable ou matière synthétique type PVC), et l'équation simplifiée (C.16) peut s'appliquer en première approximation (l'immersion de l'orifice n'est pas prise en considération). En supposant qu'il n'y ait aucun effet de la turbulence au niveau de l'orifice, tout se passe comme si l'eau de mer se comporte comme un fluide parfait.

La seule caractéristique à prendre en considération est le rapport des diamètres de l'orifice et du puits ($r = d/\mathrm{D}$). Les réponses à des ondes semi-

diurnes, purement sinusoïdales et avec des amplitudes variant de 1 m à 7 m, ont été calculées en fonction du rapport des diamètres $r = d/\mathrm{D}$. Les figures C.3a et C.3b, concernant respectivement les admittances et les phases de la réponse en fonction du rapport $r = d/\mathrm{D}$, résument l'ensemble des résultats issus des calculs effectués à cette fréquence.

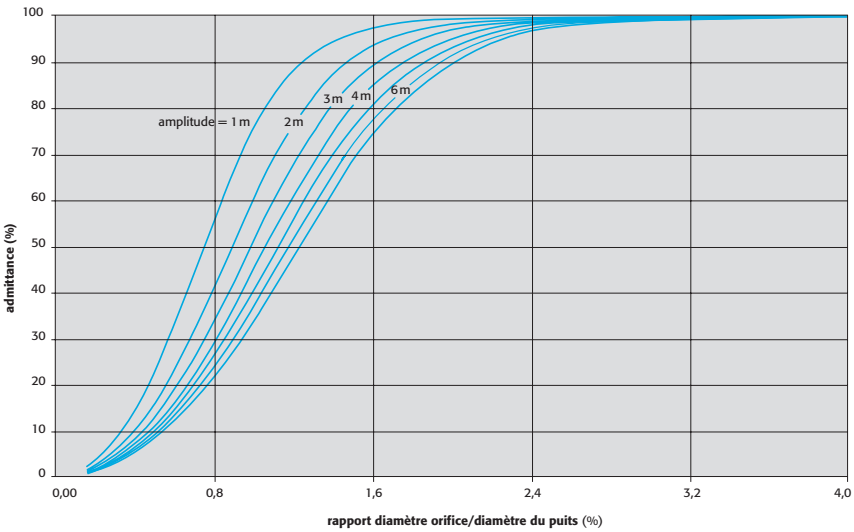


Figure C.3a — Admittance du puits pour une composante semi-diurne. Le puits avec orifice (sans conduit) : amplitude de la réponse à une onde semi-diurne. Chaque courbe correspond à une amplitude donnée de la marée (de 1 m à 7 m) et donne la réponse du puits, exprimée en pourcentage du signal d'entrée, en fonction du rapport $r = d/\mathrm{D}$ des diamètres de l'orifice et du puits.

Ces résultats montrent qu'un rapport $d/\mathrm{D} > 1/25$ (4 %) assure un déphasage et une atténuation négligeables pour les amplitudes extrêmes possibles (7 m dans les exemples présentés). En effet, on considère comme négligeable un déphasage inférieur à 30 secondes et une atténuation inférieure à 0,1%. Obtenue pour la composante semi-diurne, cette conclusion est également valable pour la diurne en raison de sa période plus élevée et pour les espèces d'interactions (quart diurne, sixième diurne, etc.) en raison de leur amplitude plus faible. Cependant, il est fort probable que le nombre élevé d'espèces d'interactions de hautes fréquences (présentes dans les estuaires) affecte la réponse du puits aux basses fréquences.

Pour étudier l'effet des ondes de gravité de très hautes fréquences (vagues, houle, seiches), la même procédure de calcul a été appliquée pour examiner leur influence sur le niveau du puits, avec diverses amplitudes (de 10 cm à

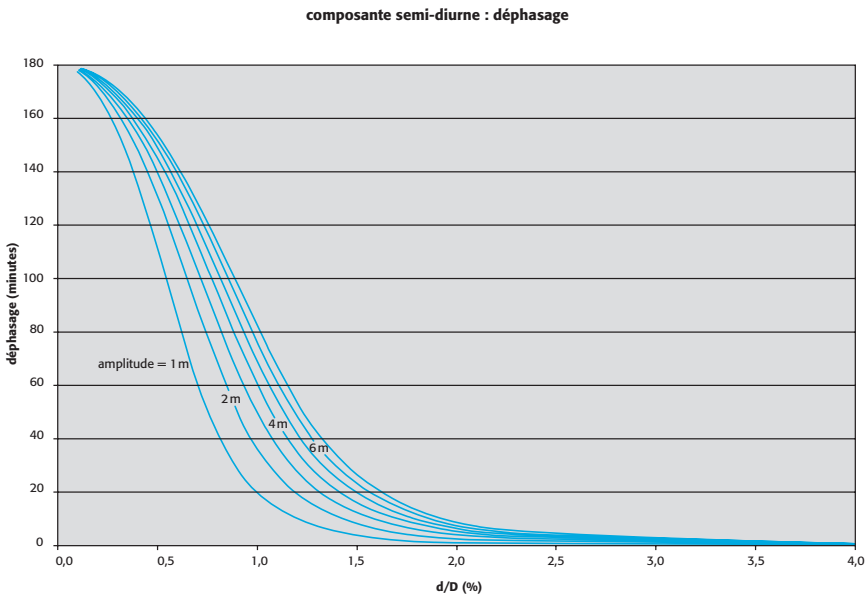


FIGURE C.3B — Le puits avec orifice (sans conduit) : déphasage de la réponse à une onde semi-diurne. Chaque courbe correspond à une amplitude déterminée de la marée (1 m à 7 m) et donne le déphasage de la réponse du puits, exprimé en degrés, en fonction du rapport $r = d/\mathrm{D}$ des diamètres de l'orifice et du puits.

1 m) et périodes (de 1 à 30 secondes). L'onde de surface est supposée purement sinusoïdale. La valeur de l'immersion de l'orifice n'étant pas pris en considération, il n'est pas tenu compte de l'effet d'atténuation exponentielle de la pression (en fonction de l'immersion) induite par l'onde. Les résultats obtenus représentent vraisemblablement une majoration des erreurs possibles. En raison des non-linéarités, le modèle montre que la réponse du puits se traduit à la fois par une variation du niveau moyen et par la présence d'une oscillation interne de même fréquence que l'onde externe.

Les résultats du modèle, concernant la composante oscillatoire de la réponse d'un puits sans conduit (rapport $d/\mathrm{D} = 4$ %) sont résumés par les graphiques de la figure C.4.

En ce qui concerne l'écart des niveaux moyens, le modèle donne dans le puits un abaissement qui, avec une houle de 1 m d'amplitude, atteint un maximum de 2 cm pour une période de 2 minutes. Il s'agit néanmoins d'un cas extrême. Pour les situations usuelles, cet écart n'excède guère 5 mm.

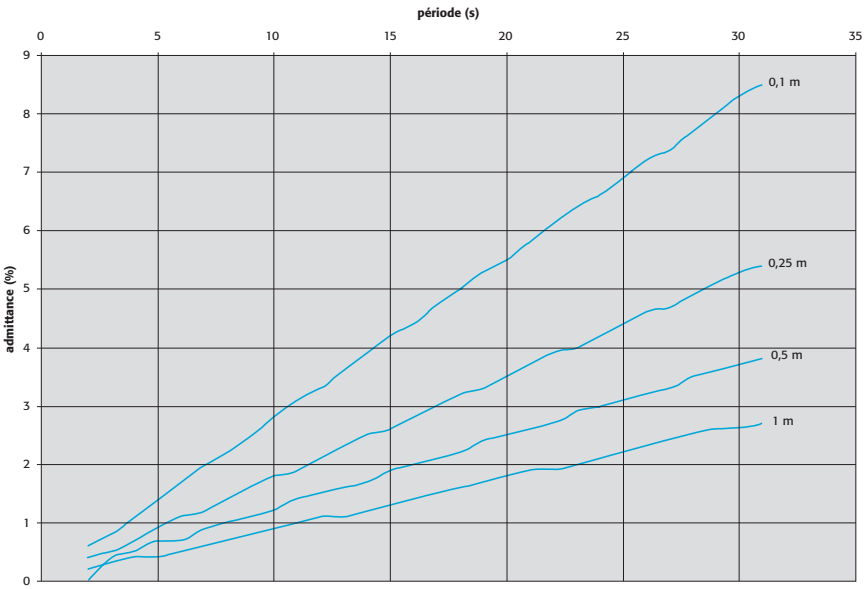


Figure C.4 — Cas du puits sans conduit avec un rapport $r = d/\mathrm{D} = 4\,\%$ des diamètres de l'orifice et du puits : réponse du puits à la fréquence du signal externe. Chaque courbe correspond à une amplitude constante de houle et donne l'amplitude de la composante oscillatoire de la réponse (en pourcentage de celle du signal d'entrée) en fonction de la période de la houle.

Puits avec conduit. Le puits de tranquillisation avec conduit est un système moins répandu. Ce type de puits se rencontre généralement dans des observatoires permanents, souvent très anciens (cas de Brest en France).

Avec ce type de puits, il y a lieu de tenir compte du coefficient de perte de charge λ et le nombre de paramètres à prendre en considération est alors trop élevé pour permettre de dégager des lois générales. En effet, non seulement le rapport d/D , mais aussi le rapport du diamètre d à la longueur l du conduit ainsi que la taille ϵ de ses aspérités ont une influence. La modélisation du puits se complique en raison de la nécessité d'effectuer une numérisation du diagramme de Moody afin de permettre les calculs selon le régime de l'écoulement dans le conduit.

L'équation du puits avec conduit s'établit en introduisant le coefficient de perte de charge λ, qui, pour un conduit de diamètre d et de longueur l, est donné par la relation C.19, soit :

$$\lambda = \frac{\Gamma d}{(v^2/2)} = \frac{d}{\rho(v^2/2)} \cdot \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}l} \tag{2.19}$$

L'intégrale du gradient de perte de charge sur toute la longueur l donne la perte de charge totale du conduit p_c. Notons que l'opposé de $p_c/\rho g$ traduit la diminution du dénivelé efficace. Ainsi, pour la perte de charge par unité de masse, il vient :

$$p_c/\rho = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \tag{C.23}$$

Cette perte de charge a pour effet de diminuer la vitesse donnée par la relation de Torricelli (C.17). La formule équivalente, connue sous le nom de « l'équation de Darcy-Weisbach », s'écrit donc :

$$v^2/2 = g|\eta| - (p_c/\rho) \tag{C.24}$$

et en tenant compte de (C.23), nous obtenons :

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g|\eta|}{1 + (\lambda l/d)} \tag{C.25}$$

Ainsi l'équation du puits conserve la même forme que la relation (C.16), soit :

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + m_c \eta \sqrt{\frac{2g}{|\eta|}} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

avec

$$m_c = \frac{r^2}{\sqrt{1 + (\lambda l/d)}} \tag{C.26}$$

La figure C.5 montre un exemple de l'influence des caractéristiques du conduit (longueur l et diamètre d) sur le déphase (exprimé en minutes de temps moyen) de la réponse du puits dans le cas d'une onde sinusoïdale semi-diurne. Dans cet exemple, les calculs ont été effectués en prenant le diamètre du puits D = 150 cm et l'amplitude du signal max $|h| = 5$ m.

Des valeurs autres donneraient des résultats différents. Mais les dimensions adoptées ici correspondent à des valeurs réalistes pour les anciens puits existants et permettent de fournir des ordres de grandeur applicables à des situations voisines ou plus favorables.

Nous pouvons constater en particulier que la règle empirique, couramment admise, selon laquelle une valeur de $r = d/\mathrm{D}$ supérieure à 1/10e (ici d $>$ 15 cm) est acceptable, est vérifiée en ce qui concerne le déphasage, quelle que soit la longueur du conduit. Cependant la valeur de 1/25e, soit $d = 6$ cm ($r = 4\%$), admissible pour une ouverture sans conduit, ne l'est déjà plus pour une longueur de conduit $l = 100$ cm. Le déphasage serait voisin de 30 s.

Les résultats concernant l'admittance de la réponse ne sont pas présentés, mais les calculs montrent que lorsque le déphasage est négligeable, l'atténuation du signal l'est également.

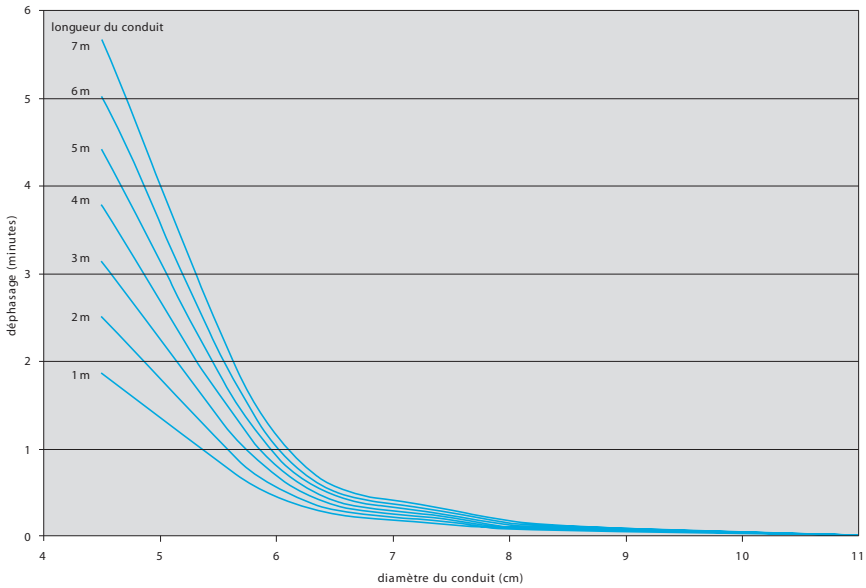


Figure C.5 — Cas d'un puits de diamètre D $= 150$ *cm* avec conduit, de diamètre d et de longueur l : réponse du puits à une onde semi-diurne de 5 m d'amplitude. Chaque courbe correspond à une longueur l constante du conduit (valeurs : 1 à 7 m) et donne le déphasage (en minutes de temps moyen) de la réponse en fonction du diamètre du conduit d en cm.

Cette modélisation de la réponse d'un puits avec conduit à l'onde semi-diurne, donne des résultats satisfaisants en ce qui concerne la performance des installations usuelles aux basses fréquences. Cependant, sa capacité à atténuer la houle révèle des performances moindres que celles du puits avec orifice (sans conduit) ayant le même paramètre $r = d/\mathrm{D}$. En adoptant la valeur $r = 1/10$ pour le puits avec conduit (ici $d = 15$ cm), la réponse restitue correctement les différentes espèces de marée, mais le taux d'atténuation de la houle se révèle en effet bien inférieur à celui que l'on obtient avec un puits avec orifice seul pour lequel il est possible d'adopter $r = 1/25$ (soit $d = 6$ cm). En raison des non-linéarités du système, on obtient une réponse où apparaissent plusieurs fréquences et une variation du niveau moyen. Les courbes de la figure C.6a résument les résultats concernant la réponse du puits à la même fréquence que l'onde sinusoïdale externe.

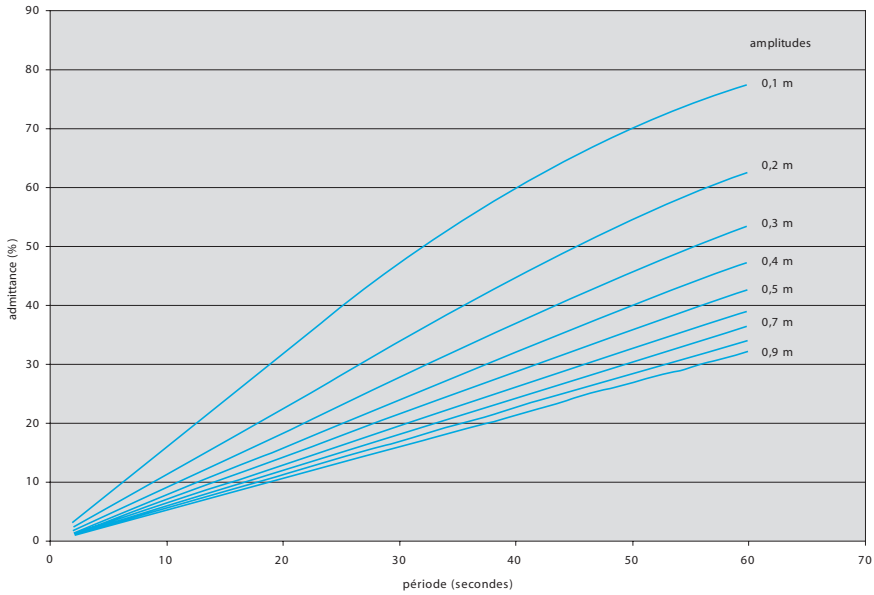


FIGURE C.6A — Puits de diamètre D = 150 cm avec conduit de longueur $l = 400$ cm et de diamètre $d = 15$ cm $\Rightarrow r = 10\%$: réponse du puits à la même fréquence que la houle. À amplitude constante de la houle, celle de la réponse (en %) est calculée en fonction de la période en secondes. Comparées aux résultats des figures C.4 a et b (puits sans conduit $r = 4\%$, sans contrainte sur D), les courbes de la figure C.6a illustrent bien la faiblesse des performances du puits avec conduit ($r = 10\%$ mais avec D = 150 cm).

Des composantes à des fréquences autres que celle du signal d'entrée apparaissent dans la réponse, mais leurs amplitudes sont faibles. Par contre, la modification du niveau moyen en présence de houle n'est pas toujours négligeable (figure C.6b).

Ces calculs ont été effectués avec une dimension caractéristique valant $\epsilon = 1$ mm pour les aspérités du tube. Sous réserve que la rugosité ϵ reste petite devant le diamètre d du conduit, les résultats obtenus ci-dessus ne sont pas sensiblement modifiés. Cependant, les concrétions et les salissures, qui s'accumulent au cours du temps dans le conduit, accroissent la difficulté d'évaluer correctement ce paramètre généralement mal connu à la mise en route du puits. En pratique, c'est davantage le rétrécissement du conduit (du fait de l'envasement ou des salissures) que l'augmentation de la rugosité qui risque de modifier les performances du puits.

Les résultats précédents montrent qu'une bonne atténuation des signaux hautes fréquences indésirables (houle, vagues, seiches portuaires) et une

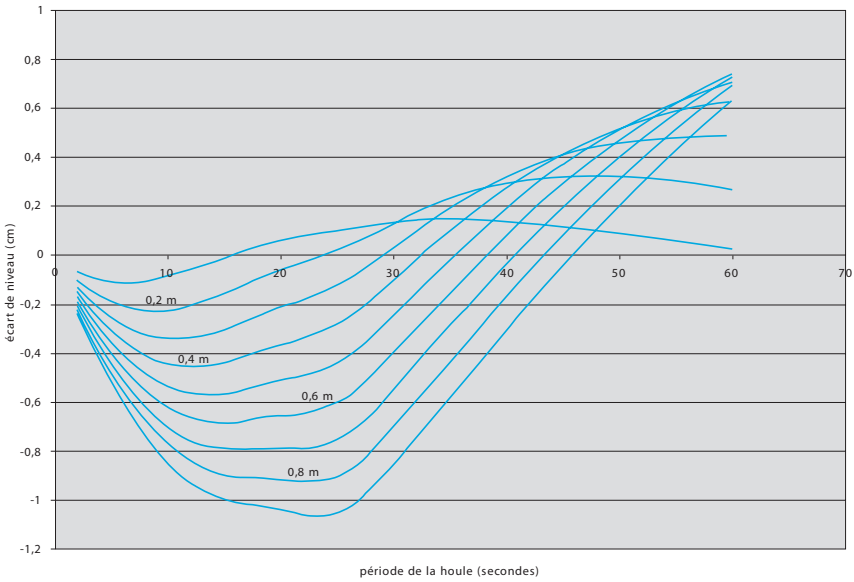


Figure C.6b — Puits de diamètre D = 150 cm avec conduit de longueur $l = 400$ cm et de diamètre $d = 15$ cm $\Rightarrow r = 10\%$: effet de la houle sur le niveau moyen du puits. Chaque courbe représente, pour une amplitude de houle déterminée, la variation du niveau moyen (en cm) dans le puits en fonction de la période du signal externe.

bonne préservation des basses fréquences (marée, ondes de tempête, tsunami) résultent d'un compromis qui doit être recherché pour un site donné, en fonction de l'amplitude de la marée, de l'exposition à la houle et des possibilités d'installation.

En ce qui concerne l'erreur liée à la réponse hydraulique du puits au signal externe, aucune règle générale ne peut être formulée, mais une simulation numérique préalable, tenant compte des caractéristiques du lieu, devrait permettre d'éviter des installations inadaptées.

D

Développement du potentiel, composantes harmoniques

Les calculs sont menés à partir de la formulation générale du potentiel :

$$U = \frac{k\, m_A}{r_A}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha_A \cos\theta + \alpha_A^2}} - 1 - \alpha_A \cos\theta\right)$$

$$k = 6{,}670 \;\; 10^{-11} \text{ unités SI}$$

$$m_A = \text{masse de l'astre}$$

$$r_A = \text{distance de l'astre}$$

$$\alpha_A = \frac{a_T}{r_A}, \text{ où } a_T \text{ est le rayon de la terre}$$

En reprenant les notations du chapitre III : $\cos\theta$, le cosinus de la distance zénithale géocentrique, est calculé à partir des formules suivantes :

$$\cos\theta = \sin L \sin\delta + \cos L \cos\delta \cos AH$$

$$\sin\delta = \sin\epsilon \cos\beta \sin\lambda + \cos\epsilon \sin\beta$$

$$\cos\delta \cos AH = \cos\beta \cos\lambda \cos\alpha + (\cos\epsilon \cos\beta \sin\lambda - \sin\epsilon \sin\beta) \sin\alpha$$

formules dans lesquelles :

$$L = \text{latitude de l'observateur}$$

$$\delta = \text{déclinaison de l'astre}$$

$$\epsilon = \text{inclinaison de l'écliptique}$$

$$\beta = \text{latitude écliptique de l'astre}$$

$$\lambda = \text{longitude écliptique de l'astre}$$
$$\alpha = \text{angle horaire du point vernal}$$
$$N = \text{longitude écliptique du nœud ascendant de la Lune}$$

Si t est le nombre de jours de temps moyen, écoulés depuis le 1er janvier 2000 à 12 heures TU, les angles étant exprimés en degrés décimaux :

$$\epsilon = 23{,}439\,29 - 3{,}56\,10^{-7}t$$
$$\alpha = 280{,}466\,448\,5 + 360{,}985\,647\,360\,t - 11{,}99\,10^{-13}t^2 - 4{,}785\,9\,10^{-3}\sin N\cos\epsilon - G$$
$$N' = -N = 234{,}955 + 1\,934{,}136\,3\,t + 0{,}002\,1\,t^2$$

1 • Potentiel lunaire

Pour le potentiel lunaire, les valeurs de $\sin\delta$, $\sin\beta$ et , i sont obtenues à tout instant à l'aide du développement de Brown donné par les tableaux suivants. Les arguments des sinus et cosinus sont obtenus en appliquant la méthode décrite dans le chapitre V à l'aide des nombres argument.

1.0.1 • Développement de Brown

Longitude écliptique λ		Latitude écliptique β		$(r_0/r)\ i_L$	
arg.	coeff. du sin $\times 10^6$	arg.	coeff. du sin $\times 10^6$	arg.	coeff. du cos $\times 10^6$
55 654	5	55 566	−4	55 555	10^6
55 753	1	55 665	−4 847	56 455	4
55 775	6	56 444	−25	56 554	−117
56 356	−12	56 466	4	57 355	−89
56 455	90	56 565	23	57 553	−3
56 554	−3 243	56 664	−27	57 575	−31
56 576	7	57 245	−1	58 354	−6
57 355	−1 026	57 465	−808	58 574	−2
57 553	−37	57 685	1	61 657	14
57 575	−267	58 464	−36	61 855	2
58 354	−42	59 463	−1	62 656	422
58 574	−11	61 547	5	62 755	−3
59 353	−1	61 745	3	63 435	−14
60 658	1	62 546	144	63 457	6
61 635	1	62 645	−2	63 655	10 025
61 657	36	63 545	3 024	64 456	337

Longitude écliptique λ		Latitude écliptique β		$(r_0/r)\ i_L$	
61 855	6	63 765	−8	64 555	−285
62 436	−2	64 346	1	64 654	−66
62 535	−1	64 445	−3	65 455	54 501
62 656	1 000	64 544	−59	65 554	44
62 755	−6	64 566	24	65 653	−6
63 435	−31	65 345	154	65 675	−209
63 457	13	65 565	89 504	66 355	5
63 556	−3	66 344	−2	66 454	−278
63 655	22 236	66 465	2	66 575	2
64 456	717	66 564	−31	67 255	−35
64 555	−605	67 365	−75	67 453	−3
64 654	−138	67 585	−11	67 475	−24
65 356	−2	68 364	−3	68 254	−1
65 455	109 760	70 646	3	70 756	9
65 554	87	71 645	32	71 557	27
65 653	−12	71 667	2	71 755	109
65 675	−192	72 446	9	72 556	561
66 355	9	72 545	−2	72 655	−11
66 454	−532	72 666	43	73 335	−1
66 575	3	73 445	162	73 555	8 249
67 255	−64	73 665	967	73 775	−4
67 453	−6	74 444	−4	74 356	37
68 254	−2	74 466	33	74 455	−32
70 558	2	74 565	−26	74 554	−88
70 756	13	74 664	−6	75 355	2 970
71 557	40	75 245	8	75 454	5
71 656	−1	75 465	4 897	75 575	−4
71 755	149	75 564	4	76 354	−30
72 556	802	75 685	−14	77 155	−4
72 655	−16	76 464	−26	77 375	−3
72 754	−2	77 265	−7	81 855	1
73 335	−2	77 485	−2	80 656	20
73 357	1	80 546	2	81 457	3
73 555	11 490	80 766	1	81 655	176

Longitude écliptique λ		Latitude écliptique β		$(r_0/r)\ i_L$	
73 654	1	81 545	18	82 456	67
73 775	−3	81 567	2	82 654	−3
74 356	47	81 765	12	83 455	902
74 455	−41	82 566	39	83 675	−3
74 554	−119	82 665	−1	84 256	4
75 355	3 728	83 345	10	84 355	−3
75 454	6	83 565	568	84 454	−14
75 575	−1 996	84 366	4	85 255	182
76 354	−37	84 465	−3	86 254	−3
76 574	2	84 564	−6	91 755	3
77 155	−5	85 365	300	90 556	10
77 375	3	85 585	−31	91 555	76
81 657	2	86 364	−3	92 356	6
81 855	1	90 666	2	92 554	−1
80 656	21	91 445	2	93 355	83
81 457	4	91 665	15	94 354	−1
81 655	186	92 466	6	95 155	12
82 456	71	93 465	73	101 655	3
82 555	2	93 685	−1	100 456	2
82 654	−3	94 464	−1	101 455	13
82 676	−2	95 265	19	103 255	7
83 455	931	95 485	−5	111 355	1
83 675	−46	101 565	6		
84 256	3	103 365	7		
84 355	−3	105 165	1		
84 454	−14	111 464	1		
84 476	−1				
84 575	1				
85 255	175				
85 475	−219				
86 254	−3				
91 755	3				
90 556	9				
91 555	67				

Longitude écliptique λ		Latitude écliptique β	$(r_0/r)\ i_L$
92 356	6		
92 554	−1		
92 576	−2		
93 355	70		
93 575	−28		
94 354	−1		
95 155	9		
95 375	−19		
95 595	2		
101 655	2		
100 456	1		
101 455	10		
101 675	−1		
103 255	5		
103 475	−5		
105 275	−2		
111 355	1		

2 • Potentiel solaire

Pour le Soleil, le développement est beaucoup plus simple. On peut négliger sa latitude et les développements pour la longitude et la parallaxe contiennent beaucoup moins de termes :

$$\cos\theta = \sin L \sin\delta + \cos L \cos\delta \cos AH$$
$$\sin\delta = \sin\epsilon \sin\lambda$$
$$\cos\delta \cos AH = \cos\lambda \cos\alpha + \sin\lambda \sin\alpha \cos\epsilon$$

En reprenant les notations du chapitre V où h désigne la longitude moyenne du Soleil et p_1 la longitude moyenne du périhélie,

$$\lambda = h + 3{,}3501 \cdot 10^{-3} \sin\left(h - p_1\right) + 3{,}51 \cdot 10^{-4} \sin 2\left(h - p_1\right) + 5 \cdot 10^{-6} \sin 3\left(h - p_1\right) + \ldots$$

$$i = 1 + 1{,}6750 \cdot 10^{-2} \cos\left(h - p_1\right) + 2{,}81 \cdot 10^{-4} \cos 2\left(h - p_1\right) + 5 \cdot 10^{-6} \cos 3\left(h - p_1\right) + \ldots$$

h et p_1 peuvent être calculés à tout instant à l'aide des relations données dans le chapitre V.

3 • Analyse harmonique du potentiel, séparation des espèces

À l'aide des formules précédentes, il est possible de calculer le potentiel générateur de la marée à intervalles réguliers et d'en faire une analyse harmonique.

Cependant, le potentiel dépendant de la latitude, il est commode d'adopter la présentation de Doodson où la latitude intervient dans des coefficients géodésiques en facteurs de termes variables, tels que présentés dans le tableau 5.2.

Afin de pouvoir comparer au développement de Doodson, le potentiel a été calculé aux latitudes 0°, 26,565 0°($\sin^2(26{,}565\,0°) = 1/5$), 45° et 90°.

En adoptant les notations du tableau 5.2 et en posant $C_{n,m} = G_{n,m}/C_L$, on obtient :

L	$C_{2,0}$	$C_{3,0}$	$C_{2,1}$	$C_{3,1}$	$C_{2,2}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
0°	0,5	0	0,0	0,726 18	1	0	1
26,565 0°	0,2	1	0,8	0	0,8	0,929 5	0,715 5
45°	0,2	0,395 28	1,0	−0,770 23	0,5	0,918 56	0,353 55
90°	−1	−2,236 06	0,0	0	0	0	0

À l'aide de différentes valeurs de la latitude, il est possible de séparer parfaitement les contributions des différents termes du développement du potentiel en polynômes de Legendre.

Ainsi, en adoptant les notations $U_{n,m}$ pour la composante du potentiel de l'espèce m issue du terme en P_n du développement en polynômes de Legendre ($n = 2$ ou $n = 3$), et U(L) le potentiel calculé à la latitude L,

le tableau suivant indique diverses combinaisons permettant de calculer les termes du potentiel.

$U_{2,0}$	$2U(0)$
$U_{3,0}$	$\dfrac{-[2U(0)+U(90)]}{2{,}236\,06}$
$U_{2,1}$	$U(45)+1{,}060\,6\ U(0)$
$U_{3,1}$	$1{,}37707\ U(0)$
$U_{2,2}$	$U(0)$
$U_{3,2}$	$\dfrac{[2U(45)-U(0)]}{1{,}837\,12}$
$U_{3,3}$	$U(0)$

D'autres combinaisons sont possibles. Elles ont été utilisées à titre de vérification.

Les différentes valeurs du potentiel ont été calculées toutes les heures sur une période couvrant 8 périodes de révolutions du nœud ascendant de la Lune, soit approximativement 150 années à partir du premier janvier 1950.

Pour le potentiel solaire, le terme en P_3 du développement en polynômes de Legendre étant négligeable, les résultats sont obtenus directement à partir des analyses de U(0) et U(45).

4 • Interactions non linéaires

Les composantes générées par les interactions non linéaires ont été calculées en procédant aux analyses harmoniques des séries obtenues à partir des produits suivants :

$U^2_{2,2}$: composantes quart-diurnes et longues périodes D22

$U^3_{2,2}$: composantes sixième-diurnes et semi-diurnes T23

$U^4_{2,2}$: composantes huitième-diurnes et quart-diurnes Q24

$U^5_{2,2}$: composantes dixième-diurnes, sixième-diurnes et semi-diurnes C25

$U^6_{2,2}$: composantes douzième-diurnes, huitième-diurnes et quart-diurnes S26

$U_{2,1}^2$: composantes semi-diurnes et longues périodes D11

$U_{2,1}U_{2,2}$: composantes diurnes et tiers-diurnes D12

$U_{2,1}^3$: composantes diurnes et tiers-diurnes T11

$U_{2,1}U_{2,2}^2$: composantes tiers-diurnes et cinquièmes diurnes T122

$U_{2,1}U_{2,2}^3$: composantes septième-diurnes Q123

On remarque que les interactions non linéaires faisant intervenir les composantes semi-diurnes sont privilégiées au détriment des composantes diurnes. Dans les régions où les composantes diurnes sont prépondérantes, le calcul d'autres combinaisons peut être souhaitable.

Par ailleurs (très légitimement) les combinaisons faisant intervenir la composante P_3 du potentiel sont négligées.

5 • Développements harmoniques

Les résultats des calculs décrits précédemment sont inscrits dans les tableaux suivants.

Les coefficients des termes du potentiel (PL, PS et P3) sont issus directement de l'expression du potentiel. Ils sont comparables à ceux de Doodson.

Les coefficients issus des composantes d'interaction ont été calculés en attribuant arbitrairement la valeur 1 000 au plus important d'entre eux dans une même colonne. Seule leur importance relative dans une même colonne est à considérer. La comparaison des coefficients des composantes d'origines différentes et donc de colonnes différentes n'a aucun sens.

En règle générale, les composantes issues directement du potentiel (PL et PS) sont les plus importantes, et les composantes d'interaction décroissent avec leur degré au-delà des interactions du second ordre. Les interactions du second ordre (T11, T23, T123) sont issues principalement des termes de frottement des équations de propagation. Elles ont une origine différente des interactions du premier ordre (D22, D11, D12), issues principalement des termes d'advection. Leur importance relative ne peut être déterminée a priori, de même que l'importance relative des interactions faisant intervenir des composantes diurnes et semi-diurnes qui dépendent du type de marée.

5.1 • Longues périodes

```
                          ARGUMENT
NOM         deg/heure    NUM  ALPHA     PL      PS     D22     D11
                                      |       |       |       |       |
Niv Moy     0.00000000 055555 ZZZZZZ|Z 50458|Z 23411|Z  1000|Z  1000|
            0.00220641 055565 ZZZZAZ|B  6553|- -----|B    18|Z     6|
            0.00441283 055575 ZZZZBZ|Z    70|- -----|- -----|- -----|
                                      |       |       |       |       |
Sa          0.04106864 056555 ZZAZZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|
                                      |       |       |       |       |
Ssa         0.08213728 057555 ZZBZZZ|- -----|Z  7245|Z    32|B     9|
            0.08434369 057565 ZZBZAZ|B   186|- -----|Z     9|B     1|
                                      |       |       |       |       |
Sta         0.12320396 058554 ZZCZZY|- -----|Z   423|Z     2|- -----|
                                      |       |       |       |       |
            0.46931466 063645 ZAXAYZ|B   112|- -----|B     1|- -----|
MSm         0.47152108 063655 ZAXAZZ|Z  1581|- -----|Z    12|Z     1|
            0.47372749 063665 ZAXAAZ|B   100|- -----|- -----|- -----|
                                      |       |       |       |       |
            0.54216827 065445 ZAZYYZ|B   544|- -----|B     3|Z     1|
Mm          0.54437468 065455 ZAZYZZ|Z  8253|B     2|Z    91|Z     6|
            0.54658110 065465 ZAZYAZ|B   538|- -----|B     3|Z     1|
            0.55365836 065655 ZAZAZZ|B   444|- -----|Z     2|B     1|
            0.55586477 065665 ZAZAAZ|B   182|- -----|Z     1|- -----|
                                      |       |       |       |       |
            0.62651196 067455 ZABYZZ|B   112|- -----|Z     2|B     1|
                                      |       |       |       |       |
Msf         1.01589576 073555 ZBXZZZ|Z  1367|- -----|Z   268|Z     7|
                                      |       |       |       |       |
            1.08874937 075355 ZBZXZZ|Z   677|- -----|Z    11|Z     1|
Mf          1.09803304 075555 ZBZZZZ|Z 15640|- -----|Z    70|B    19|
            1.10023945 075565 ZBZZAZ|Z  6487|- -----|Z    18|B     6|
            1.10244587 075575 ZBZZBZ|Z   608|- -----|Z     1|- -----|
                                      |       |       |       |       |
SN          1.56027044 083455 ZCXYZZ|Z   216|- -----|Z    52|Z     1|
MStm        1.56955412 083655 ZCXAZZ|Z   568|- -----|Z     3|B     1|
            1.57176053 083665 ZCXAAZ|Z   234|- -----|Z     1|- -----|
                                      |       |       |       |       |
Mfm         1.64240772 085455 ZCZYZZ|Z  2984|- -----|Z    17|B     5|
            1.64461414 085465 ZCZYAZ|Z  1237|- -----|Z     5|B     2|
            1.64682055 085475 ZCZYBZ|Z   116|- -----|- -----|- -----|
                                      |       |       |       |       |
MSqm        2.11392880 093555 ZDXZZZ|Z   474|- -----|Z     3|B     1|
            2.11613521 093565 ZDXZAZ|Z   198|- -----|Z     1|- -----|
```

5.2 • Diurnes

```
                          ARGUMENT
NOM         deg/heure    NUM  ALPHA     PL      PS     D12     T11     P3
                                      |       |       |       |       |       |
           12.30991155 115855 AVZCZZ|Y   107|- -----|Y     5|Y     8|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
           12.38055874 117645 AVBAYZ|Y    52|- -----|Y     1|Y    16|- -----|
           12.38276515 117655 AVBAZZ|Y   275|- -----|Y    12|Y    44|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
           12.45561876 119455 AVDYZZ|Y    54|- -----|Y     2|Y     8|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
           12.84964440 125655 AWZAZZ|- -----|- -----|- -----|A     2|Z    67|
```

Diurnes (suite)

```
                          ARGUMENT
NOM          deg/heure    NUM  ALPHA     PL      PS     D12     T11     P3
                                      |       |       |       |       |       |
            12.85207982 125745 AWZBYZ|Y   180|- -----|Y     3|Y    19|- -----|
2Q1         12.85428623 125755 AWZBZZ|Y   952|- -----|Y    39|Y    53|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            12.92493342 127545 AWBZYZ|Y   217|- -----|Y     5|Y    43|- -----|
SIGMA1      12.92713984 127555 AWBZZZ|Y  1148|- -----|Y    43|Y   120|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            12.96820652 128554 AWCZZY|Y    78|- -----|Y     2|Y     7|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.39181267 135545 AXZZYZ|- -----|- -----|- -----|- -----|Z    89|
            13.39401908 135555 AXZZZZ|- -----|A     3|- -----|- -----|Z   225|
q1          13.39645450 135645 AXZAYZ|Y  1360|- -----|Y    28|Y    82|- -----|
Q1          13.39866092 135655 AXZAZZ|Y  7206|- -----|Y   246|Y   265|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.43972759 136654 AXAAZY|Y    66|- -----|- -----|Y     5|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.46930811 137445 AXBYYZ|Y   258|- -----|Y     5|Y    16|- -----|
RHO1        13.47151452 137455 AXBYZZ|Y  1368|- -----|Y    48|Y    50|- -----|
            13.48079819 137655 AXBAZZ|A    79|- -----|A    66|A    57|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.51258120 138454 AXCYZY|Y    63|- -----|Y     2|Y     2|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.87018199 143755 AYXBZZ|A   113|- -----|Y     1|Y    11|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.90196892 144556 AYYZZA|A   130|- -----|Y     5|Y    11|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.93862277 145535 AYZZXZ|A   217|- -----|A     7|Y     9|- -----|
o1          13.94082919 145545 AYZZYZ|Y  7110|- -----|Y   101|Y   258|- -----|
O1          13.94303560 145555 AYZZZZ|Y 37689|- -----|Y  1000|Y   881|- -----|
            13.94767744 145655 AYZAZZ|- -----|- -----|- -----|Y     1|Z   104|
            13.95231927 145755 AYZBZZ|A   243|- -----|A    12|A    27|B     3|
                                      |       |       |       |       |       |
            13.98410228 146554 AYAZZY|Y   109|- -----|- -----|Y    15|Y     1|
                                      |       |       |       |       |       |
MP1         14.02517288 147555 AYBZZZ|A   492|- -----|A   341|A   231|- -----|
            14.02737929 147565 AYBZAZ|Y   107|- -----|- -----|A    30|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            14.41235026 153645 AZXAYZ|A    63|- -----|Y     6|Y    13|- -----|
            14.41455668 153655 AZXAZZ|A   278|- -----|Y    30|Y    73|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
            14.48520387 155445 AZZYYZ|A   197|- -----|Y     7|Y    27|- -----|
            14.48741028 155455 AZZYZZ|A  1064|- -----|Y    33|Y    87|- -----|
            14.48984571 155545 AZZZYZ|- -----|- -----|- -----|- -----|B    98|
            14.49205212 155555 AZZZZZ|B     1|- -----|- -----|- -----|Z   661|
            14.49448754 155645 AZZAYZ|Y    86|- -----|Y     7|A    23|- -----|
M1          14.49669396 155655 AZZAZZ|A  2961|- -----|A   100|A   180|- -----|
KHI1        14.49890037 155665 AZZAAZ|A   595|- -----|A    18|A    54|B     1|
                                      |       |       |       |       |       |
            14.56954756 157455 AZBYZZ|A   567|- -----|A    12|A    44|- -----|
            14.57175397 157465 AZBYAZ|A   125|- -----|A     4|A    13|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
PI1         14.91786468 162556 AAWZZA|Y     1|Y   984|Y    30|Y    32|- -----|
                                      |       |       |       |       |       |
                                      |       |       |       |       |       |
            14.95672495 163545 AAXZYZ|A   198|- -----|Y    60|Y    58|- -----|
P1          14.95893136 163555 AAXZZZ|Y    30|Y 16817|Y   466|Y   465|- -----|
```

Diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	PL	PS	D12	T11	P3
S1	15.00000000	164555	AAYZZZ	-----	-----	-----	-----	-----
	15.03886223	165545	AAZZYZ	Y 1049	-----	Y 42	A 108	-----
K1	15.04106864	165555	AAZZZZ	A 36232	A 16124	A 742	A 1000	-----
k1	15.04327505	165565	AAZZAZ	A 7186	A 1	A 100	A 260	-----
	15.04548147	165575	AAZZBZ	Y 154	-----	Y 7	A 8	-----
PSI1	15.08213532	166554	AAAZZY	Y 6	A 409	A 6	A 20	-----
PHI1	15.12320592	167555	AABZZZ	-----	A 714	A 41	Y 118	-----
THETA1	15.51258972	173655	ABXAZZ	A 566	-----	A 12	A 44	-----
	15.51479613	173665	ABXAAZ	A 112	-----	A 3	A 15	-----
	15.58323691	175445	ABZYYZ	Y 86	-----	Y 7	A 23	-----
J1	15.58544332	175455	ABZYZZ	A 2959	-----	A 100	A 182	-----
	15.58764974	175465	ABZYAZ	A 587	-----	A 17	A 56	-----
	15.59008516	175555	ABZZZZ	-----	-----	-----	-----	Z 247
SO1	16.05696440	183555	ACXZZZ	A 489	-----	A 341	A 224	-----
	16.05917081	183565	ACXZAZ	A 96	-----	A 64	A 70	-----
	16.12981801	185355	ACZXZZ	A 241	-----	A 12	A 26	-----
OO1	16.13910168	185555	ACZZZZ	A 1615	-----	A 87	Y 256	-----
oo1	16.14130809	185565	ACZZAZ	A 1034	-----	A 42	Y 108	-----
	16.14351451	185575	ACZZBZ	A 217	-----	A 7	Y 9	-----
	16.60133908	193455	ADXYZZ	A 77	-----	A 65	A 55	-----
	16.61062276	193655	ADXAZZ	A 58	-----	A 4	Y 16	-----
KQ1	16.68347636	195455	ADZYZZ	A 308	-----	A 22	Y 77	-----

5.3 • Semi-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	PL	PS	D11	T23	C25
2MN2S2	26.40793803	209655	BUDAZZ	Z 18	-----	-----	Z 9	Z 63
3M(SK)2	26.87017544	217555	BVBZZZ	-----	-----	B 25	Z 7	Z 57
2NS2	26.87945911	217755	BVBBZZ	Z 110	-----	Z 1	Z 30	Z 73
3M2S2	26.95231272	219555	BVDZZZ	Z 68	-----	-----	Z 24	Z 122
2NK2S2	26.96159639	219755	BVDBZZ	-----	-----	-----	-----	Z 4
	27.33949010	225645	BWZAYZ	-----	-----	B 49	Z 9	Z 18
OQ2	27.34169652	225655	BWZAZZ	-----	-----	B 132	Z 36	Z 83
	27.35098019	225855	BWZCZZ	Z 258	-----	Z 5	Z 9	Z 19
	27.42162738	227645	BWBAYZ	B 25	-----	Z 2	B 9	B 23
MNS2	27.42383379	227655	BWBAZZ	Z 667	-----	Z 13	Z 132	Z 253
	27.46490047	228654	BWCAZY	Z 51	-----	-----	Z 9	Z 19

Semi-diurnes (suite)

```
                          ARGUMENT
NOM          deg/heure    NUM  ALPHA     PL      PS     D11     T23     C25
                                      |       |       |       |       |       |
MNK2S2     27.50597107 229655 BWDAZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|Z    15|
MNUS2      27.49668740 229455 BWDYZZ|Z   129|- -----|Z     2|Z    25|Z    46|
                                      |       |       |       |       |       |
2MS2K2     27.80393392 233555 BXXZZZ|- -----|- -----|- -----|Z     2|Z    11|
                                      |       |       |       |       |       |
           27.88386479 235545 BXZZYZ|- -----|- -----|B   129|Z    19|Z    34|
2MK2       27.88607120 235555 BXZZZZ|- -----|- -----|B   348|Z    85|Z   162|
           27.89314846 235745 BXZBYZ|B    86|B     1|Z     7|B     4|B     8|
2N2        27.89535487 235755 BXZBZZ|Z  2300|- -----|Z    40|Z    57|Z   101|
                                      |       |       |       |       |       |
           27.96600206 237545 BXBZYZ|B   103|- -----|Z     7|B    25|B    47|
MU2 2MS2   27.96820848 237555 BXBZZZ|Z  2777|- -----|Z    43|Z   351|Z   529|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.00927515 238554 BXCZZY|Z   188|- -----|Z     2|Z    23|Z    41|
                                      |       |       |       |       |       |
SNK2       28.35759228 243655 BYXAZZ|- -----|- -----|B    56|Z    19|Z    61|
           28.36687595 243855 BYXCZZ|B    56|- -----|- -----|Z     2|Z     9|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.39866288 244656 BYYAZA|B   147|- -----|Z     1|Z     1|Z     7|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.42603306 245435 BYZYXZ|B    67|Y     1|- -----|B     1|B     2|
           28.43288131 245545 BYZZYZ|Y     3|- -----|- -----|- -----|- -----|
           28.43508772 245555 BYZZZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|- -----|
n2         28.43752314 245645 BYZAYZ|B   648|- -----|Z    40|B    18|B    30|
N2         28.43972956 245655 BYZAZZ|Z 17391|- -----|Z   246|Z   298|Z   403|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.47615636 246555 BYAZZZ|B    94|- -----|- -----|B     2|B     3|
           28.48079623 246654 BYAAZY|Z   163|- -----|Z     3|Z     5|Z    14|
                                      |       |       |       |       |       |
nu2        28.51037675 247445 BYBYYZ|B   123|- -----|Z     8|B     2|B    10|
NU2        28.51258316 247455 BYBYZZ|Z  3302|- -----|Z    48|Z    45|Z   119|
           28.52186683 247655 BYBAZZ|Z    14|- -----|- -----|Z    20|Z    61|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.55364984 248454 BYCYZY|Z   152|- -----|Z     2|Z     3|Z     8|
                                      |       |       |       |       |       |
2KN2S2     28.60400411 249655 BYDAZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|Z     1|
                                      |       |       |       |       |       |
           28.89976055 253545 BZXZYZ|- -----|- -----|B    56|Z    20|Z    38|
MSK2       28.90196696 253555 BZXZZZ|- -----|- -----|B   317|Z    76|Z   159|
gamma2     28.91125063 253755 BZXBZZ|B   272|- -----|Z     1|Z    16|Z    54|
                                      |       |       |       |       |       |
M(SK)2     28.94303756 254556 BZYZZA|B   313|- -----|- -----|Z    12|Z    27|
                                      |       |       |       |       |       |
m2         28.98189783 255545 BZZZYZ|B  3383|- -----|Z   163|B    56|B    70|
M2         28.98410424 255555 BZZZZZ|Z 90812|- -----|Z  1000|Z  1000|Z  1000|
           28.98631065 255565 BZZZAZ|B     5|- -----|Z   131|B    19|B    34|
           28.98874608 255655 BZZAZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|Z     1|
                                      |       |       |       |       |       |
M(KS)2     29.02517092 256554 BZAZZY|Z   277|- -----|Z    11|Z    18|Z    34|
                                      |       |       |       |       |       |
MKS2       29.06624152 257555 BZBZZZ|Z   104|- -----|Z     1|Z    82|Z   167|
           29.06844793 257565 BZBZAZ|B    51|- -----|Z     1|Z    23|Z    44|
                                      |       |       |       |       |       |
2SM2K2     29.14837880 259555 BZDZZZ|- -----|- -----|- -----|- -----|Z     5|
```

Semi-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	PL	PS	D11	T23	C25
LAMBDA2	29.45562532	263655	BAXAZZ	B 669	- -----	Z 30	Z 121	Z 254
2SN(MK)2	29.37348804	261655	BAVAZZ	- -----	- -----	Z 2	Z 1	Z 18
	29.52627251	265445	BAZYYZ	Z 94	- -----	Z 4	B 7	B 17
L2 2MN2	29.52847892	265455	BAZYZZ	B 2567	- -----	Z 34	Z 108	Z 233
	29.53312076	265555	BAZZZZ	- -----	- -----	- -----	- -----	- -----
NKM2	29.53776260	265655	BAZAZZ	Z 642	- -----	B 69	Z 39	Z 86
	29.53996901	265665	BAZAAZ	Z 283	- -----	B 22	Z 12	Z 23
	29.61061620	267455	BABYZZ	Z 122	- -----	B 14	Z 10	Z 43
2SK2	29.91786272	271555	BBVZZZ	- -----	- -----	B 74	Z 16	Z 63
T2	29.95893332	272556	BBWZZA	Z 3	Z 2472	Z 29	Z 45	Z 60
	29.99779359	273545	BBXZYZ	Z 94	- -----	B 12	B 20	B 39
S2	30.00000000	273555	BBXZZZ	Z 73	Z 42286	Z 454	Z 710	Z 816
	30.00220641	273565	BBXZAZ	- -----	- -----	Z 62	B 20	B 39
R2	30.04106668	274554	BBYZZY	- -----	B 437	- -----	- -----	- -----
	30.07993087	275545	BBZZYZ	B 147	- -----	Z 33	B 8	B 17
K2	30.08213728	275555	BBZZZZ	Z 7852	Z 3643	B 637	Z 207	Z 279
k2	30.08434369	275565	BBZZAZ	Z 3423	Z 1	B 166	Z 56	Z 70
	30.08655011	275575	BBZZBZ	Z 371	- -----	B 5	Z 5	Z 5
	30.12320396	276554	BBAZZY	B 1	Z 91	B 11	Z 3	Z 9
	30.16427456	277555	BBBZZZ	- -----	Z 76	B 19	Z 7	Z 22
MSnu2	30.47152108	281655	BCVAZZ	- -----	- -----	Z 5	Z 18	Z 79
MSN2	30.54437468	283455	BCXYZZ	Z 9	- -----	Z 26	Z 104	Z 225
XI2	30.55365836	283655	BCXAZZ	Z 122	- -----	B 14	Z 10	Z 43
KJ2	30.62651196	285455	BCZYZZ	Z 640	- -----	B 70	Z 39	Z 85
	30.62871838	285465	BCZYAZ	Z 279	- -----	B 26	Z 12	Z 22
2KM(SN)2	30.70864924	287455	BCBYZZ	B 1	- -----	B 2	Z 1	Z 6
	30.97482712	290555	BDUZZZ	Y 2	- -----	- -----	- -----	- -----
2SM2	31.01589576	291555	BDVZZZ	Z 1	- -----	Z 4	Z 154	Z 304
	31.05696440	292555	BDWZZZ	- -----	- -----	- -----	A 8	A 16
	31.08874937	293355	BDXXZZ	- -----	- -----	Z 2	Z 12	Z 42
	31.10023945	293565	BDXZAZ	Z 45	- -----	Z 4	Z 22	Z 41
SKM2	31.09803304	293555	BDXZZZ	Z 105	- -----	- -----	Z 82	Z 169
	31.18017032	295555	BDZZZZ	Z 165	- -----	B 41	Z 14	Z 30
	31.18237673	295565	BDZZAZ	Z 144	- -----	B 31	Z 8	Z 17
	31.18458315	295575	BDZZBZ	Z 47	- -----	B 9	Z 2	Z 4

Semi-diurnes (suite)

```
                          ARGUMENT
NOM          deg/heure    NUM  ALPHA     PL      PS     D11     T23     C25
                                       |       |       |       |       |       |
2SNU2      31.48741684 2X*655 BETAZZ|Y     1|- -----|- -----|Z     6|Z    18|
                                       |       |       |       |       |       |
2SN2       31.56027045 2X1455 BEVYZZ|- -----|- -----|Z     1|Z    30|Z    98|
                                       |       |       |       |       |       |
SKN2       31.64240772 2X3455 BEXYZZ|Z    16|- -----|- -----|Z    20|Z    61|
                                       |       |       |       |       |       |
3S2M2      32.03179152 2E*555 BFTZZZ|- -----|- -----|- -----|Z     4|Z    49|
                                       |       |       |       |       |       |
3SK2M2     32.11392880 2E1555 BFVZZZ|- -----|- -----|- -----|Z     3|Z    38|
```

5.4 • Tiers-diurnes

```
                          ARGUMENT
NOM          deg/heure    NUM  ALPHA     PL     D12     T11     P3
                                       |       |       |       |       |
           41.29401579 315855 CVZCZZ|- -----|Y    21|Y    17|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           41.36686939 317655 CVBAZZ|- -----|Y    37|Y    27|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           41.83618406 325745 CWZBYZ|- -----|Y     7|Y    30|- -----|
           41.83839047 325755 CWZBZZ|- -----|Y   110|Y    84|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           41.91124408 327555 CWBZZZ|- -----|Y    91|Y    65|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           42.38055874 335645 CXZAYZ|- -----|Y    31|Y   110|- -----|
 MQ3       42.38276515 335655 CXZAZZ|- -----|Y   431|Y   326|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           42.45561876 337455 CXBYZZ|Z     1|Y    83|Y    63|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           42.85428623 343755 CYXBZZ|- -----|Y    31|Y    23|- -----|
           42.84500256 343555 CYXZZZ|- -----|Y    40|A   227|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           42.92493342 345545 CYZZYZ|- -----|Y    68|Y   253|- -----|
 2MK3      42.92713984 345555 CYZZZZ|- -----|Y  1000|Y   753|- -----|
           42.93178167 345655 CYZAZZ|Z   329|- -----|Y     1|Z   158|
 2NKM3     42.93642351 345755 CYZBZZ|- -----|A    45|A    59|- -----|
                                       |       |       |       |       |
 2MS3      42.96820848 346555 CYAZZZ|B     2|- -----|- -----|B     1|
                                       |       |       |       |       |
 2MP3      43.00927712 347555 CYBZZZ|Z     1|A   353|A    47|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           43.39866092 353655 CZXAZZ|- -----|Y   221|Y   162|- -----|
                                       |       |       |       |       |
 m3        43.47394994 355545 CZZZYZ|B    66|Y     1|- -----|B    32|
 M3        43.47615636 355555 CZZZZZ|Z  1188|Y     1|B     1|Z   569|
                                       |       |       |       |       |
 NK3       43.48079819 355655 CZZAZZ|- -----|A   226|A   300|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           43.55365180 357455 CZBYZZ|- -----|A    29|A    60|- -----|
                                       |       |       |       |       |
           43.90196892 362556 CAWZZA|- -----|Y    56|Y    40|- -----|
                                       |       |       |       |       |
 SO3       43.94303560 363555 CAXZZZ|- -----|Y   905|Y   662|- -----|
```

Tiers-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	PL	D12	T11	P3
MS3	43.98410424	364555	CAYZZZ	- -----	B 11	- -----	- -----
	44.02296646	365545	CAZZYZ	X 1	Y 85	A 134	- -----
MK3	44.02517288	365555	CAZZZZ	- -----	A 762	A 1000	- -----
	44.02737929	365565	CAZZAZ	- -----	A 66	A 257	- -----
	44.06623956	366554	CAAZZY	- -----	A 15	A 19	- -----
	44.10731016	367555	CABZZZ	- -----	A 84	A 14	- -----
	44.48741028	373455	CBXYZZ	- -----	Y 28	Y 22	- -----
	44.49669396	373655	CBXAZZ	- -----	A 106	A 64	- -----
2MQ3	44.56954756	375455	CBZYZZ	- -----	A 85	A 95	- -----
	44.57418940	375555	CBZZZZ	Z 144	- -----	- -----	Z 69
	44.57883123	375655	CBZAZZ	- -----	A 36	Y 58	- -----
	44.58103765	375665	CBZAAZ	Z 1	A 18	Y 24	- -----
SP3	44.95893136	381555	CCVZZZ	- -----	Y 215	Y 152	- -----
S3	45.00000000	382555	CCWZZZ	- -----	- -----	- -----	- -----
SK3	45.04106864	383555	CCXZZZ	- -----	A 609	A 437	- -----
	45.04327505	383565	CCXZAZ	- -----	A 91	A 115	- -----
K3	45.12320592	385555	CCZZZZ	- -----	A 192	Y 369	- -----
	45.12541233	385565	CCZZAZ	- -----	A 85	Y 138	- -----
	45.58544332	393455	CDXYZZ	- -----	A 92	A 49	- -----
	45.66758060	395455	CDZYZZ	Y 1	A 37	Y 60	- -----
	45.66978701	395465	CDZYAZ	- -----	A 19	Y 31	- -----
2SO3	46.05696440	3X1555	CEVZZZ	- -----	A 159	A 5	- -----

5.5 • Quart-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	D22	Q24	S26
	55.86356335	417755	DVBBZZ	Z 7	Z 58	Z 112
4M2S4	55.93641695	419555	DVDZZZ	Z 3	Z 37	Z 120
	56.32580075	425655	DWZAZZ	- -----	Z 46	Z 99
	56.33508443	425855	DWZCZZ	Z 15	Z 26	Z 44
2MNS4	56.40793803	427655	DWBAZZ	Z 27	Z 183	Z 306
2MnuS4	56.48079164	429455	DWDYZZ	Z 5	Z 33	Z 55
3MK4	56.87017544	435555	DXZZZZ	- -----	Z 75	Z 149
N4	56.87945911	435755	DXZBZZ	Z 86	Z 128	Z 180

Quart-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	D22	Q24	S26
3MS4	56.95231272	437555	DXBZZZ	Z 74	Z 340	Z 488
mn4	57.42162738	445645	DYZAYZ	B 28	B 41	B 55
MN4	57.42383379	445655	DYZAZZ	Z 381	Z 465	Z 548
Mnu4	57.49668740	447455	DYBYZZ	Z 71	Z 73	Z 130
2MSK4	57.88607120	453555	DZXZZZ	- -----	Z 96	Z 179
	57.89535487	453755	DZXBZZ	Z 14	Z 66	Z 125
MA4	57.92713984	454555	DZYZZZ	- -----	- -----	- -----
m4	57.96600206	455545	DZZZYZ	B 73	B 87	B 97
M4	57.96820848	455555	DZZZZZ	Z 1000	Z 1000	Z 990
2MRS4	58.00927515	456554	DZAZZY	Z 8	Z 27	Z 42
2MKS4	58.05034576	457555	DZBZZZ	Z 11	Z 114	Z 201
SN4	58.43972956	463655	DAXAZZ	Z 161	Z 326	Z 451
ML4	58.51258316	465455	DAZYZZ	B 22	Z 111	Z 231
NK4	58.52186683	465655	DAZAZZ	Z 61	Z 110	Z 169
nk4	58.52407325	465665	DAZAAZ	Z 20	Z 33	Z 46
MT4	58.94303756	472556	DBWZZA	Z 50	Z 64	Z 76
ms4	58.98189783	473545	DBXZYZ	B 32	B 58	B 74
MS4	58.98410424	473555	DBXZZZ	Z 915	Z 995	Z 1000
mK4	59.06403510	475545	DBZZYZ	B 12	B 23	B 34
MK4	59.06624152	475555	DBZZZZ	Z 249	Z 314	Z 374
Mk4	59.06844793	475565	DBZZAZ	Z 74	Z 87	Z 96
2SNM4	59.45562532	481655	DCVAZZ	B 7	Z 82	Z 189
2MSN4	59.52847892	483455	DCXYZZ	B 26	Z 118	Z 249
2MKN4	59.61061620	485455	DCZYZZ	Z 8	Z 52	Z 107
ST4	59.95893332	490556	DDUZZA	Z 25	Z 49	Z 67
S4	60.00000000	491555	DDVZZZ	Z 211	Z 403	Z 524
SK4	60.08213728	493555	DDXZZZ	Z 117	Z 224	Z 306
	60.08434369	493565	DDXZAZ	Z 35	Z 61	Z 76
	60.16427456	495555	DDZZZZ	Z 20	Z 38	Z 59
	60.16648097	495565	DDZZAZ	Z 13	Z 23	Z 34

5.6 • Cinquièmes-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA		T122
	70.27812003	515855	EVZCZZ	Y	32
	70.35097363	517655	EVBAZZ	Y	47
	70.82028830	525745	EWZBYZ	Y	15
	70.82249471	525755	EWZBZZ	Y	137
	70.89534831	527555	EWBZZZ	Y	96
	71.36466298	535645	EXZAYZ	Y	49
2MQ5	71.36686939	535655	EXZAZZ	Y	431
	71.43972300	537455	EXBYZZ	Y	78
	71.83839047	543755	EYXBZZ	Y	75
	71.90903766	545545	EYZZYZ	Y	84
4MK5	71.91124408	545555	EYZZZZ	Y	766
	71.92052775	545755	EYZBZZ	A	94
	71.95231075	546554	EYAZZY	Y	11
4MP5	71.99338135	547555	EYBZZZ	A	77
	72.38276515	553655	EZXAZZ	Y	368
	72.46490243	555655	EZZAZZ	A	365
	72.88607316	562556	EAWZZA	Y	52
2MP5	72.92713984	563555	EAXZZZ	Y	1000
	73.00707070	565545	EAZZYZ	Y	123
2MK5	73.00927712	565555	EAZZZZ	A	846
	73.01148353	565565	EAZZAZ	A	85
	73.05034379	566554	EAAZZY	A	13
	73.09141439	567555	EABZZZ	A	29
	73.39866092	571655	EBVAZZ	Y	75
	73.47151452	573455	EBXYZZ	A	39
	73.48079819	573655	EBXAZZ	A	188
	73.55365180	575455	EBZYZZ	A	38
	73.56293547	575655	EBZAZZ	A	85
	73.56514189	575665	EBZAAZ	A	41
	73.94303560	581555	ECVZZZ	Y	464
2SK5	74.02517288	583555	ECXZZZ	A	773
	74.02737929	583565	ECXZAZ	A	78
	74.10731016	585555	ECZZZZ	A	284

Cinquièmes-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	T122	
	74.10951657	585565	ECZZAZ	A	122
	74.56954756	593455	EDXYZZ	A	25
	74.65168484	595455	EDZYZZ	A	27
	74.65389125	595465	EDZYAZ	A	12
	74.95893136	5X*555	EETZZZ	Y	72
	75.04106864	5X1555	EEVZZZ	A	181
	75.12320592	5X3555	EEXZZZ	A	143

5.7 • Sixièmes-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	T23	C25	
2(MN)K6	84.76553031	615755	FVZBZZ	- -----	Z	18
5MKS6	84.83838391	617555	FVBZZZ	- -----	Z	11
2(MN)S6	84.84766759	617755	FVBBZZ	Z	16	Z 75
	84.92052119	619555	FVDZZZ	Z	7	Z 42
	85.30990499	625655	FWZAZZ	- -----	Z	43
	85.31918867	625855	FWZCZZ	Z	32	Z 48
3MNS6	85.39204227	627655	FWBAZZ	Z	48	Z 189
3NKS6	85.40132594	627855	FWBCZZ	- -----	Z	6
3MnuS6	85.46489588	629455	FWDYZZ	Z	9	Z 34
4MK6	85.85427968	635555	FXZZZZ	- -----	Z	57
2NM6	85.86356335	635755	FXZBZZ	Z	138	Z 183
4mS6	85.93421054	637545	FXBZYZ	B	11	B 38
4MS6	85.93641695	637555	FXBZZZ	Z	97	Z 278
	85.97748363	638554	FXCZZY	Z	7	Z 21
2MSNK6	86.32580075	643655	FYXAZZ	- -----	Z	53
2mn6	86.40573162	645645	FYZAYZ	B	47	B 61
2MN6	86.40793803	645655	FYZAZZ	Z	432	Z 510
2Mnu6	86.48079164	647455	FYBYZZ	Z	78	Z 82
2MNKS6	86.49007531	647655	FYBAZZ	Z	10	Z 68
3mSk6	86.86796902	653545	FZXZYZ	- -----	Z	17
3MSK6	86.87017544	653555	FZXZZZ	- -----	Z	88
	86.87945911	653755	FZXBZZ	Z	75	Z 140
MA6	86.91124408	654555	FZYZZZ	- -----	- -----	

Sixièmes-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	T23		C25	
m6	86.95010630	655545	FZZZYZ	B	83	B	95
M6	86.95231272	655555	FZZZZZ	Z	764	Z	812
3MKS6	87.03444999	657555	FZBZZZ	Z	25	Z	119
3MkS6	87.03665641	657565	FZBZAZ	Z	5	Z	33
MTN6	87.38276712	662656	FAWAZA	Z	18	Z	29
MSN6	87.42383379	663655	FAXAZZ	Z	368	Z	492
	87.49448099	665445	FAZYYZ	Z	1	B	11
2ML6	87.49668740	665455	FAZYZZ	Z	11	Z	107
MNK6	87.50597107	665655	FAZAZZ	Z	120	Z	173
MKnu6	87.57882468	667455	FABYZZ	Z	23	Z	34
2(MS)K6	87.88607120	671555	FBVZZZ	-	-----	Z	57
	87.89535487	671755	FBVBZZ	Z	3	Z	42
2MT6	87.92714180	672556	FBWZZA	Z	52	Z	65
2mS6	87.96600206	673545	FBXZYZ	B	72	B	89
2MS6	87.96820848	673555	FBXZZZ	Z	1000	Z	1000
2MK6	88.05034576	675555	FBZZZZ	Z	277	Z	338
2Mk6	88.05255217	675565	FBZZAZ	Z	83	Z	95
	88.13248303	677555	FBBZZZ	Z	4	Z	23
2SN6	88.43972956	681655	FCVAZZ	Z	74	Z	204
3MTN6	88.47151648	682456	FCWYZA	B	1	Z	8
3MSN6	88.51258316	683455	FCXYZZ	B	39	Z	108
	88.52186683	683655	FCXAZZ	Z	62	Z	130
3MKN6	88.59472044	685455	FCZYZZ	Z	12	Z	57
	88.59692685	685465	FCZYAZ	Z	5	Z	17
MST6	88.94303756	690556	FDUZZA	Z	52	Z	70
2SM6	88.98410424	691555	FDVZZZ	Z	459	Z	585
	89.02517288	692555	FDWZZZ	A	21	A	28
MSK6	89.06624152	693555	FDXZZZ	Z	252	Z	335
MSk6	89.06844793	693565	FDXZAZ	Z	76	Z	92
	89.14837880	695555	FDZZZZ	Z	39	Z	59
	89.15058521	695565	FDZZAZ	Z	24	Z	35
2MSTN6	89.48741224	6X0456	FEUYZA	B	2	Z	8
2(MS)N6	89.52847892	6X1455	FEVYZZ	B	12	Z	72
2MSKN6	89.61061620	6X3455	FEXYZZ	Z	8	Z	58

5.8 • Septièmes-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	Q123	
	99.26222426	715855	GVZCZZ	Y	54
	99.33507787	717655	GVBAZZ	Y	68
	99.40793147	719455	GVDYZZ	Y	12
	99.80439253	725745	GWZBYZ	Y	14
	99.80659895	725755	GWZBZZ	Y	185
	99.87945255	727555	GWBZZZ	Y	113
	99.92051923	728554	GWCZZY	Y	8
	100.34876722	735645	GXZAYZ	Y	34
3MQ7	100.35097363	735655	GXZAZZ	Y	456
	100.39204031	736654	GXAAZY	Y	10
	100.42382724	737455	GXBYZZ	Y	80
	100.82249471	743755	GYXBZZ	Y	170
	100.89314190	745545	GYZZYZ	Y	45
5MK7	100.89534831	745555	GYZZZZ	Y	624
	100.90463199	745755	GYZBZZ	A	126
	100.93641499	746554	GYAZZY	Y	14
	100.97748559	747555	GYBZZZ	A	86
	101.36686939	753655	GZXAZZ	Y	560
	101.43972300	755455	GZZYZZ	Y	45
	101.44900667	755655	GZZAZZ	A	359
	101.87017740	762556	GAWZZA	Y	51
	101.91124408	763555	GAXZZZ	Y	1000
3MS7	101.95231272	764555	GAYZZZ	B	6
	101.99117494	765545	GAZZYZ	Y	127
3MK7	101.99338135	765555	GAZZZZ	A	591
	101.99558777	765565	GAZZAZ	A	45
	102.03444803	766554	GAAZZY	A	13
	102.07551863	767555	GABZZZ	A	41
	102.38276515	771655	GBVAZZ	Y	241
	102.45561876	773455	GBXYZZ	A	34
	102.46490243	773655	GBXAZZ	A	327
	102.53775604	775455	GBZYZZ	A	50

Septièmes-diurnes (suite)

```
                          ARGUMENT
NOM         deg/heure    NUM  ALPHA    Q123
                                     |       |
          102.53996245 775465 GBZYAZ|A     6|
          102.54703971 775655 GBZAZZ|A   143|
                                     |       |
          102.92713984 781555 GCVZZZ|Y   683|
                                     |       |
 3SK7     103.00927712 783555 GCXZZZ|A   764|
          103.01148353 783565 GCXZAZ|A    58|
                                     |       |
          103.09141439 785555 GCZZZZ|A   299|
          103.09362081 785565 GCZZAZ|A   124|
                                     |       |
          103.55365180 793455 GDXYZZ|A    18|
                                     |       |
          103.63799549 795465 GDZYAZ|A    14|
                                     |       |
          103.94303560 7X*555 GETZZZ|Y   211|
                                     |       |
          104.02517288 7X1555 GEVZZZ|A   351|
                                     |       |
          104.10731016 7X3555 GEXZZZ|A   272|
```

5.9 • Huitièmes-diurnes

```
                          ARGUMENT
NOM         deg/heure    NUM  ALPHA    Q24     S26
                                     |       |       |
          113.83177183 817755 HVBBZZ|Z    27|Z    95|
                                     |       |       |
2MNS8     114.37614651 827655 HWBAZZ|Z    69|Z   199|
                                     |       |       |
5MK8      114.83838391 835555 HXZZZZ|- -----|Z    47|
                                     |       |       |
          114.91831478 837545 HXBZYZ|B    16|B    42|
                                     |       |       |
2(MN)8    114.84766759 835755 HXZBZZ|Z   187|Z   245|
                                     |       |       |
5MS8      114.92052119 837555 HXBZZZ|Z   114|Z   250|
                                     |       |       |
3MSNK8    115.30990499 843655 HYXAZZ|- -----|Z    64|
                                     |       |       |
          115.38983586 845645 HYZAYZ|B    65|B    83|
3MN8      115.39204227 845655 HYZAZZ|Z   458|Z   553|
                                     |       |       |
3Mnu8     115.46489588 847455 HYBYZZ|Z    79|Z    89|
                                     |       |       |
          115.85207326 853545 HZXZYZ|- -----|Z    13|
4MSK8     115.85427968 853555 HZXZZZ|- -----|Z    82|
          115.86356335 853755 HZXBZZ|Z   170|Z   243|
                                     |       |       |
          115.93421054 855545 HZZZYZ|B    88|B   105|
M8        115.93641695 855555 HZZZZZ|Z   624|Z   708|
                                     |       |       |
          115.97748363 856554 HZAZZY|Z    14|Z    31|
```

Huitièmes-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	Q24		S26	
4MKS8	116.01855423	857555	HZBZZZ	Z	42	Z	129
	116.02076065	857565	HZBZAZ	Z	11	Z	36
2MSN8	116.40793803	863655	HAXAZZ	Z	560	Z	657
3ML8	116.48079164	865455	HAZYZZ	Z	45	Z	117
2MNK8	116.49007531	865655	HAZAZZ	Z	176	Z	242
	116.56292892	867455	HABYZZ	Z	33	Z	45
3M2SK8	116.87017544	871555	HBVZZZ	-	-----	Z	68
	116.87945911	871755	HBVBZZ	Z	43	Z	109
3MT8	116.91124604	872556	HBWZZA	Z	51	Z	66
	116.95010630	873545	HBXZYZ	B	108	B	120
3MS8	116.95231272	873555	HBXZZZ	Z	1000	Z	1000
	117.03224358	875545	HBZZYZ	B	35	B	49
3MK8	117.03444999	875555	HBZZZZ	Z	290	Z	363
	117.03665641	875565	HBZZAZ	Z	86	Z	103
	117.11658727	877555	HBBZZZ	Z	8	Z	31
2SMN8	117.42383379	881655	HCVAZZ	Z	240	Z	382
	117.49668740	883455	HCXYZZ	B	34	Z	110
	117.50597107	883655	HCXAZZ	Z	160	Z	241
4MSN8	117.57882468	885455	HCZYZZ	Z	23	Z	69
2MST8	117.92714180	890556	HDUZZA	Z	40	Z	44
2(MS)8	117.96820848	891555	HDVZZZ	Z	677	Z	749
2MSK8	118.05034576	893555	HDXZZZ	Z	373	Z	442
	118.05255217	893565	HDXZAZ	Z	113	Z	124
	118.13248303	895555	HDZZZZ	Z	58	Z	82
3SN8	118.43972956	8X*655	HETAZZ	Z	30	Z	112
	118.51258316	8X1455	HEVYZZ	B	30	Z	80
	118.52186683	8X1655	HEVAZZ	Z	41	Z	107
3M2SN8	118.59472044	8X3455	HEXYZZ	Z	8	Z	72
	118.98189783	8E*545	HFTZYZ	B	6	B	18
3SM8	118.98410424	8E*555	HFTZZZ	Z	203	Z	303
2SMK8	119.06624152	8E1555	HFVZZZ	Z	170	Z	256
	119.06844793	8E1565	HFVZAZ	Z	51	Z	70

5.10 • Dixièmes-diurnes

```
                                ARGUMENT
   NOM         deg/heure    NUM  ALPHA    C25
                                        |       |
             142.81587606 X17755 JVBBZZ|Z    42|
                                        |       |
   5MNS10    143.36025075 X27655 JWBAZZ|Z    91|
                                        |       |
             143.82956541 X35745 JXZBYZ|B    43|
   3M2N10    143.83177183 X35755 JXZBZZ|Z   243|
|       |
   6MS10     143.90462543 X37555 JXBZZZ|Z   129|
                                        |       |
   4MN10     144.37614651 X45655 JYZAZZ|Z   492|
                                        |       |
   4Mnu10    144.44900011 X47455 JYBYZZ|Z    83|
                                        |       |
   5MSK10    144.83838391 X53555 JZXZZZ|B     4|
                                        |       |
             144.91831478 X55545 JZZZYZ|B    97|
   M10       144.92052119 X55555 JZZZZZ|Z   557|
                                        |       |
             144.96158787 X56554 JZAZZY|Z    17|
                                        |       |
             145.00265847 X57555 JZBZZZ|Z    61|
             145.00486488 X57565 JZBZAZ|Z    16|
                                        |       |
   3MSN10    145.39204227 X63655 JAXAZZ|Z   746|
                                        |       |
   4ML10     145.46489588 X65455 JAZYZZ|Z    79|
   3MNK10    145.47417955 X65655 JAZAZZ|Z   238|
                                        |       |
             145.54703315 X67455 JABYZZ|Z    45|
                                        |       |
             145.86356335 X71755 JBVBZZ|Z   137|
                                        |       |
             145.93421054 X73545 JBXZYZ|B   143|
   4MS10     145.93641695 X73555 JBXZZZ|Z  1000|
                                        |       |
             146.01634782 X75545 JBZZYZ|B    47|
   4MK10     146.01855423 X75555 JBZZZZ|Z   311|
                                        |       |
             146.10069151 X77555 JBBZZZ|Z    14|
                                        |       |
   2(MS)N10  146.40793803 X81655 JCVAZZ|Z   476|
                                        |       |
             146.48079164 X83455 JCXYZZ|B    17|
             146.49007531 X83655 JCXAZZ|Z   297|
                                        |       |
   5MSN10    146.56292892 X85455 JCZYZZ|Z    42|
                                        |       |
   3M2S10    146.95231272 X91555 JDVZZZ|Z   870|
                                        |       |
   3MSK10    147.03444999 X93555 JDXZZZ|Z   487|
             147.03665641 X93565 JDXZAZ|Z   147|
                                        |       |
             147.11658727 X95555 JDZZZZ|Z    78|
```

Dixièmes-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	C25
3SMN10	147.42383379	XX*655	JETAZZ	Z 133
	147.49668740	XX1455	JEVYZZ	B 43
	147.50597107	XX1655	JEVAZZ	Z 138
4M2SN10	147.57882468	XX3455	JEXYZZ	Z 13
	147.96600206	XE*545	JFTZYZ	B 26
3S2M10	147.96820848	XE*555	JFTZZZ	Z 388
2(MS)K10	148.05034576	XE1555	JFVZZZ	Z 322
	148.05255217	XE1565	JFVZAZ	Z 97

5.11 • Douzièmes-diurnes

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ALPHA	S26
	171.79998030	T17755	LVBBZZ	Z 63
	171.87283391	T19555	LVDZZZ	Z 21
	172.27150138	T25855	LWZCZZ	Z 121
4MNS12	172.34435499	T27655	LWBAZZ	Z 118
	172.41720859	T29455	LWDYZZ	Z 18
	172.81366965	T35745	LXZBYZ	X 62
4M2N12	172.81587606	T35755	LXZBZZ	Z 297
	172.88652326	T37545	LXBZYZ	X 31
4M2N12	172.88872967	T37555	LXBZZZ	Z 145
	172.92979635	T38554	LXCZZY	Z 11
	173.28739714	T43855	LYXCZZ	Z 153
	173.35804433	T45645	LYZAYZ	X 107
5MN12	173.36025075	T45655	LYZAZZ	Z 519
	173.40131742	T46654	LYAAZY	Z 20
	173.43089794	T47445	LYBYYZ	X 17
5Mnu12	173.43310435	T47455	LYBYZZ	Z 82
	173.83177183	T53755	LZXBZZ	Z 444
	173.90021260	T55535	LZZZXZ	Z 8
	173.90241902	T55545	LZZZYZ	X 106
M12	173.90462543	T55555	LZZZZZ	Z 518
	173.91611552	T55765	LZZBAZ	Z 46
	173.94569211	T56554	LZAZZY	Z 20

Douzièmes-diurnes (suite)

NOM	deg/heure	ARGUMENT NUM	ARGUMENT ALPHA		S26
	173.98676271	T57555	LZBZZZ	Z	84
	173.98896912	T57565	LZBZAZ	Z	24
	174.33507983	T62656	LAWAZA	Z	42
4MSN12	174.37614651	T63655	LAXAZZ	Z	895
	174.40793344	T64456	LAYYZA	Z	10
	174.44679370	T65445	LAZYYZ	X	16
4ML12	174.44900011	T65455	LAZYZZ	Z	102
4MNK12	174.45828379	T65655	LAZAZZ	Z	298
	174.46049020	T65665	LAZAAZ	Z	91
	174.53113739	T67455	LABYZZ	Z	53
	174.84766759	T71755	LBVBZZ	Z	290
5MT12	174.87945451	T72556	LBWZZA	Z	54
	174.91831478	T73545	LBXZYZ	X	172
5MS12	174.92052119	T73555	LBXZZZ	Z	967
	175.00045206	T75545	LBZZYZ	X	61
5MK12	175.00265847	T75555	LBZZZZ	Z	331
	175.00486488	T75565	LBZZAZ	Z	99
	175.00707130	T75575	LBZZBZ	Z	11
	175.04372515	T76554	LBAZZY	Z	10
	175.08479575	T77555	LBBZZZ	Z	24
3M2SN12	175.39204227	T81655	LCVAZZ	Z	745
	175.46489588	T83455	LCXYZZ	Z	19
	175.47417955	T83655	LCXAZZ	Z	454
5MSN12	175.54703315	T85455	LCZYZZ	Z	64
	175.54923957	T85465	LCZYAZ	Z	20
	175.86356335	T9*755	LDTBZZ	Z	84
4MST12	175.89535028	T90556	LDUZZA	Z	109
	175.93421054	T91545	LDVZYZ	X	143
4M2S12	175.93641695	T91555	LDVZZZ	Z	1000
	176.01634782	T93545	LDXZYZ	X	91
4MSK12	176.01855423	T93555	LDXZZZ	Z	575
	176.02076065	T93565	LDXZAZ	Z	175
	176.02296706	T93575	LDXZBZ	Z	18
	176.05962091	T94554	LDYZZY	Z	8
	176.10069151	T95555	LDZZZZ	Z	98

Douzièmes-diurnes (suite)

```
                          ARGUMENT
NOM         deg/heure    NUM  ALPHA    S26
                                     |       |
          176.95010630 TE*545 LFTZYZ|X    61|
3(MS)12   176.95231272 TE*555 LFTZZZ|Z   587|
                                     |       |
          177.03224358 TE1545 LFVZYZ|X    60|
3M2SK12   177.03444999 TE1555 LFVZZZ|Z   492|
          177.03665641 TE1565 LFVZAZ|Z   150|
```

E

Transformées et séries de Fourier

Pour l'étude d'un signal, il est fondamental d'avoir présent à l'esprit que deux types de représentation sont possibles :

— une représentation temporelle $f(t)$ dans laquelle la variable indépendante est la durée du temps t qui s'écoule ;

— une représentation fréquentielle $\mathrm{F}(\nu)$ dans laquelle la variable indépendante est la fréquence ν, dimension inverse d'un temps dont l'unité conventionnelle est le Hertz : $1\mathrm{Hz} = 1$ cycle/seconde.

Le passage de l'une à l'autre s'opère par la transformation dite de Fourier (1768-1830). Cette transformation peut s'étendre à d'autres couples que celui du « temps, fréquence ». Dans le cas où la variable indépendante serait une longueur, nous avons par exemple le couple « longueur et nombre d'onde ». Cette annexe résume un certain nombre de définitions, généralités et propriétés des transformées et séries de Fourier avec un rappel sur le rôle des « distributions » dans l'analyse des mesures échantillonnées avec un pas régulier dans le temps. La dernière partie, en complément du chapitre VI, donne deux exemples montrant l'influence de la durée des observations (le mois et l'année) sur le nombre de composantes de marée qui peuvent être séparées.

1 • Définitions et généralités

Lorsque la fonction réelle $f(t)$ est représentative d'un phénomène physique, considérons les deux cas suivants :

— premier cas : la fonction $f(t)$ est une série trigonométrique de période T (fréquence correspondante $\nu_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T} > 0$), c'est-à-dire que la valeur de la fonction est la même pour t et $t \pm k\mathrm{T}$, quelle que soit la valeur de $k \in \mathrm{N}^*$, ensemble des entiers strictement positifs. On appelle « transformée » de Fourier de la fonction périodique $f(t)$ à la fréquence $\nu_m = m\nu_{\mathrm{T}}$, avec $m \in \mathrm{Z}$ ensemble des entiers relatifs, la relation :

$$\mathrm{F}(\nu_m) = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{+\mathrm{T}/2} f(t) e^{-j2\pi m \nu_{\mathrm{T}} t} \mathrm{d}t \tag{E.1a}$$

— second cas : la fonction $f(t)$ est quelconque et le caractère apériodique peut se considérer comme une extension à l'infini de la période T. Sous réserve des conditions d'existence, la transformée de Fourier (TF) à la fréquence ν, d'une fonction $f(t)$, se définit par :

$$\mathrm{F}(\nu) = \mathrm{TF}\left[f(t)\right] = \int_t f(t) e^{-j2\pi\nu t} \mathrm{d}t \tag{E.1b}$$

la lettre t sous le signe « intégrale » signifiant que l'intégration se fait dans tout le domaine de $-\infty$ à $+\infty$. La transformée inverse, symbolisée par TF^{-1}, est alors obtenue par :

$$f(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{F}(\nu)\right] = \int_\nu \mathrm{F}(\nu) e^{+j2\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \tag{E.2}$$

Le « spectre d'amplitude » de $f(t)$ est la représentation de la valeur absolue $|\mathrm{F}(\nu)|$ en fonction de la fréquence. Pour une fonction périodique, ce spectre est défini pour des fréquences discrètes $\nu_m = m\nu_{\mathrm{T}}$; il est dit « spectre de raies » dont l'écart minimum sur l'axe des fréquences est de $\nu_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$. Pour une fonction quelconque admettant une transformée, l'intervalle des fréquences ν_{T} tend alors vers zéro, et le spectre devient continu, sous réserve cependant que la fonction $f(t)$ ne contienne aucunes composantes périodiques (cas de la turbulence). Pour qu'une fonction réelle$f(t)$, non périodique, ait une transformée de Fourier $\mathrm{TF}\left[f(t)\right]$, on démontre qu'il faut et suffit que la fonction remplisse les trois conditions :

— la fonction $f(t)$ doit être bornée (pas de valeur infinie),

— son intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ garde une valeur finie,

— ses éventuelles discontinuités ainsi que ses maxima et minima soient finis sur tout son domaine d'existence.

Les deux fonctions, $f(t)$ et sa transformée $\mathrm{F}(\nu)$ représentent le même phénomène dans leur domaine respectif (temps, fréquence). On démontre

qu'un certain nombre de propriétés sont rattachées à ces fonctions. Si la fonction $f(t)$ considérée est réelle, donc hermitienne (formée de deux éléments complexes conjuguées), les définitions (E.1a) et (E.1b) montrent que la transformée conserve cette propriété, ainsi :

$$\mathrm{F}(\nu) = \mathrm{F}^*(-\nu) \tag{E.3}$$

Par ailleurs, les deux fonctions sont reliées par la formule de Poisson :

$$\sum_{m \in \mathrm{Z}} f(m) = \sum_{n \in \mathrm{Z}} \mathrm{F}(n) \tag{E.4}$$

l'indication m ou $n \in \mathrm{Z}$ sous le symbole « somme » signifiant que celle-ci est faite dans tout l'ensemble **Z**. En outre, un théorème important, dit de Plancherel, établit que la transformée de Fourier d'un produit de convolution $(*)$ de deux fonctions est le produit simple $(\times)$ des transformées correspondantes et réciproquement. En posant :

$$\mathrm{TF}\left[f(t)\right] = \mathrm{F}(\nu) \quad \text{et} \quad \mathrm{TF}\left[g(t)\right] = \mathrm{G}(\nu)$$

cette propriété fondamentale est résumée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}\left[f(t) * g(t)\right] &= \mathrm{F}(\nu) \times \mathrm{G}(\nu) \\ \mathrm{TF}\left[f(t) \times g(t)\right] &= \mathrm{F}(\nu) * \mathrm{G}(\nu) \end{aligned} \tag{E.5a}$$

et réciproquement :

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{F}(\nu) \times \mathrm{G}(\nu)\right] &= f(t) * g(t) \\ \mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{F}(\nu) * \mathrm{G}(\nu)\right] &= f(t) \times g(t) \end{aligned} \tag{E.5b}$$

Ce théorème permet de simplifier les calculs dans de nombreux cas.

Dans la nature, un phénomène quantifiable est toujours observé sur un laps de temps fini T et la fonction représentative de son évolution temporelle satisfait en général aux conditions d'existence de la transformée. Cependant l'application de la transformée de Fourier à l'étude d'un phénomène évolutif et continu se heurte au problème de l'échantillonnage de la courbe représentative. Dans la majorité des cas, l'échantillonnage d'un signal analogique $f(t)$ (donc continu) s'effectue avec un intervalle de temps régulier t_e entre deux relevés consécutifs : on dit que l'on échantillonne le signal tous les t_e ou à la fréquence (ou cadence) d'une valeur par t_e ($\nu_e = 1/t_e$). On obtient une série dont le terme général $f(mt_e)$ a pour numéro d'ordre la valeur $m \in \mathrm{Z}$ (en supposant que la fonction représentative puisse être échantillonnée sur tout son domaine d'existence). Pour un même signal, il existe plusieurs techniques d'échantillonnage qui sont de deux types :

— l'échantillonnage « ponctuel » : les données sont les valeurs de la fonction continue $f(t)$, relevées aux instants $t = mt_e$;

— l'échantillonnage « moyenne » : l'échantillon tous les t_e est le résultat d'une moyenne de $f(t)$, simple ou pondérée (filtrage), effectuée sur tout ou partie des intervalles $[mt_e, (m+1)t_e[$.

Nous ne traiterons ici que le cas de l'échantillonnage « ponctuel » régulier. La fonction continue $f(t)$ devient une série de valeurs discrètes $f(mt_e)$ et la question se pose alors de savoir comment restituer la transformée réelle $\mathrm{F}(\nu)$ à partir de cette série. La détermination de $\mathrm{F}(\nu)$, à partir de la série échantillonnée, est cependant rendue possible par l'introduction de la théorie des distributions (le « peigne de Dirac » et la « porte » notamment) qui permet de résoudre ce problème sous réserve que certaines conditions soient respectées. Avant d'aborder cette question, il nous semble utile de rappeler quelques éléments concernant les distributions et leurs transformées.

2 • Distributions et leurs transformées

Nous résumons ci-dessous les éléments concernant la distribution et le peigne de Dirac ainsi que la « porte » et les transformées de Fourier correspondantes.

2.1 • La distribution de Dirac

La distribution de Dirac $\delta(x - x_i)$ est une forme linéaire, égale à l'unité pour $x = x_i$ et nulle ailleurs dans le domaine de la variable indépendante ($x \in \mathrm{R}$). Nous adoptons le symbolisme $\delta(x - x_i)$ bien qu'il représente un abus de notation, le symbolisme correct étant δ_{x_i}. Ainsi nous avons :

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x \neq x_i, \end{cases} \tag{E.6}$$

Notons que pour $x_i = 0$, avec notre convention la distribution s'écrit $\delta(x)$. La transformée à la fréquence ν du Dirac $\delta(t - t_i)$ est parfaitement définie par :

$$\mathrm{TF}\left[\delta(t - t_i)\right] = \int_t \delta(t - t_i) e^{-j2\pi\nu t} \mathrm{d}t = e^{-j2\pi\nu t_i} \tag{E.7}$$

Cette transformée étant complexe, le spectre d'amplitude est alors égal à la norme $\left\| e^{-j2\pi\nu t_i} \right\|$, de valeur unité quelle que soit la fréquence, mais son spectre de phase est fonction linéaire de la fréquence ($\varphi = 2\pi\nu t_i$). Par contre, la fonction temporelle qui a pour spectre un Dirac $\delta(\nu - \nu_i)$ est obtenue par la transformée inverse qui nous donne :

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\delta(\nu - \nu_i)\right] = \int_\nu \delta(\nu - \nu_i) e^{+j2\pi\nu t} \mathrm{d}t = e^{j2\pi\nu_i t} \tag{E.8}$$

Cette exponentielle complexe peut s'interpréter comme la fonction cyclique représentative (en coordonnées polaires) d'un mobile décrivant une circonférence de rayon unité à la vitesse angulaire constante, égale à $2\pi\nu_i$, sauf pour $\nu_i = 0$, valeur pour laquelle $\mathrm{TF}^{-1}[\delta(\nu)] = 1$. En tenant compte de la formule de Poisson et des relations (E.7) et (E.8), on déduit l'égalité :

$$\sum_{m\in\mathrm{Z}} \delta(t-m) = \sum_{n\in\mathrm{Z}} e^{j2\pi nt}$$

Cette dernière expression définit les deux formes de la distribution « peigne de Dirac » à la cadence unité, que nous symboliserons par $\mathrm{X}_1(t)$, soit :

$$\mathrm{X}_1(t) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} \delta(t-m) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} e^{j2\pi mt} \tag{E.9}$$

L'indice, ici égal à unité (1) et affecté à X, représente l'intervalle de temps entre deux distributions de Dirac successives de la série. Nous allons examiner ci-dessous les propriétés de la distribution « peigne » $\mathrm{X}_{t_e}(t)$, ayant une portée plus générale avec un intervalle t_e entre deux distributions de Dirac successives.

2.2 • La distribution « peigne » de Dirac

La distribution « peigne » de Dirac $\mathrm{X}_{t_e}(t)$ est la distribution périodique, de période t_e, définie par la relation :

$$\mathrm{X}_{t_e}(t) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} \delta(t-mt_e). \tag{E.10}$$

Cette distribution représente l'opérateur mathématique d'échantillonnage de toute fonction continue $f(t)$ avec un pas de temps t_e. Nous avons en effet :

$$f(t)\cdot \mathrm{X}_{t_e}(t) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} f(t)\delta(t-mt_e) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} f(mt_e). \tag{E.11}$$

Si nous appliquons $\mathrm{X}_1(t)$, définie par (E.9), à une fonction régulière $h(t)$, il vient :

$$\int_t h(t) \sum_{m\in\mathrm{Z}} \delta(t-m)\cdot \mathrm{d}t = \sum_m h(m) = \sum_m \int_t h(t) e^{j2\pi mt}\mathrm{d}t. \tag{E.12}$$

En opérant le changement de variable tel que $h(t) = \mathrm{H}(t/a)$ avec $a > 0$, la dernière égalité de (E.12) peut s'écrire :

$$\sum_{m\in\mathrm{Z}} \mathrm{H}(m/a) = a\sum_m \int_t \mathrm{H}(t/a) e^{j2\pi ma(t/a)}\mathrm{d}t/a \tag{E.13}$$

Ce résultat aboutit à une relation semblable à (E.9) définissant $X_1(t)$, mais avec une échelle distincte :

$$\frac{1}{a}\sum_{m\in Z}\delta\left(t-\frac{m}{a}\right)=\sum_{n\in Z}e^{j2\pi nat}, \tag{E.14}$$

Ainsi, en prenant $a = 1/t_e$, nous obtenons :

$$t_e X_{t_e}(t)=\sum_{m\in Z}e^{j2\pi m\frac{t}{t_e}}. \tag{E.15}$$

Par ailleurs, en tenant compte de (E.7), la transformée du peigne $X_{t_e}(t)$ s'écrit :

$$\mathrm{TF}\left[X_{t_e}(t)\right]=\sum_{k\in Z}e^{j2\pi\nu k t_e}. \tag{E.16}$$

Au regard de (E.14) appliquée à ν, on déduit de (E.16) que la transformée d'un peigne est un peigne à une constante près. Il vient ainsi :

$$\mathrm{TF}\left[X_{t_e}(t)\right]=\frac{1}{t_e}\cdot X_{1/t_e}(\nu)$$

soit, avec $\nu_e = 1/t_e$:

$$\mathrm{TF}\left[t_e X_{t_e}(t)\right]=X_{\nu_e}(\nu). \tag{E.17}$$

Ce dernier résultat très important est à la base de toute la théorie de l'échantillonnage. Ainsi au peigne $t_e X_{t_e}(t)$ de période t_e correspond la transformée $X_{\nu_e}(\nu)$, distribution également périodique, qui introduit dans le domaine des fréquences la « période » $\nu_e = 1/t_e$. Nous retrouverons cette répétition séquentielle ν_e dans toute transformée de fonction « peignée » par $t_e X_{t_e}(t)$.

2.3 • Fonction et distribution « porte »

Une fonction régulière $f(t)$, représentative d'un phénomène physique, n'est connue que sur un intervalle limité dans le temps. L'échantillonnage de $f(t)$ sur une durée T nous amène tout naturellement à définir la distribution « porte » à partir de la fonction de même nom.

2.3.1 • La fonction « porte »

La « porte » est également un outil important dans le traitement du signal. Appelée également « fenêtre » ou « créneau », cette fonction est définie par sa « largeur T » sur l'axe des temps. Elle est égale à l'unité sur l'intervalle $\left[t_i, t_j\right]$, bornes comprises, telles que $t_j - t_i = \mathrm{T}$, et nulle ailleurs. L'étude d'un signal se faisant en général à partir d'un instant pris pour origine sur une durée

déterminée T, nous symboliserons par $\Pi_T(t)$ la fonction porte définie selon les éléments suivants :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, T]. \end{cases} \tag{E.18}$$

La porte est dite « symétrique » lorsqu'elle est centrée sur l'origine de la variable (temps ou fréquence). Dans le domaine temporel, elle est le résultat de la convolution du Dirac $\delta(t + T/2)$ avec $\Pi_T(t)$, qui translate le début de la nouvelle porte à l'instant $t = -T/2$:

$$\int_\tau \delta(\tau + T/2)\Pi_T(t - \tau)d\tau = \Pi_T(t + T/2). \tag{E.19}$$

La transformée de cette porte symétrique normée par sa largeur T s'exprime par :

$$\mathrm{TF}\left[\frac{1}{T}\Pi_T(t + T/2)\right] = \frac{1}{T}\int_t \Pi_T(t + T/2)e^{-j2\pi\nu t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi\nu t}dt$$

La dernière intégrale de la relation précédente nous donne ainsi :

$$\mathrm{TF}\left[\frac{1}{T}\Pi_T(t + T/2)\right] = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}. \tag{E.20}$$

Cette transformée est paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe $\nu = 0$. Elle est maximale et égale à l'unité pour $\nu = 0$ et atteint des extrema relatifs pour les fréquences $\nu = (1/2 + k)\nu_T$ avec $k \in \mathrm{Z}$ et $\nu_T = 1/T$; les amplitudes de ces extrema tendent vers zéro quand $|\nu| \to \infty$. Cette fonction s'annule pour les fréquences égales à $\nu = k\nu_T$ avec ici $k \in \mathbf{Z}^*$ (ensemble des entiers relatifs, zéro exclu). Il convient de noter que lorsque T tend vers l'infini, la relation E.20 tend vers la distribution $\delta(\nu)$. Nous avons vu que $\mathrm{TF}^{-1}[\delta(\nu)] = 1$ pour tout t. La fonction porte $\Pi_T(t)$, considérée comme convolution de $\Pi_T(t+T/2)$ avec $\delta(t-T/2)$, nous permet d'obtenir sa transformée par le produit simple des transformées respectives. Par ailleurs, cette transformée normée par la largeur T étant une fonction continue qui reviendra en permanence, nous la symboliserons par $\Lambda_T(\nu)$, d'où :

$$\begin{aligned}\Lambda_T(\nu) &= \mathrm{TF}\left[\frac{1}{T}\Pi_T(t)\right] = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{T}\Pi_T(t + T/2) * \delta(t - T/2)\right] \\ &= \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}e^{-j\pi\nu T}\end{aligned} \tag{E.21}$$

Il apparaît un déphasage fonction linéaire de la fréquence ($\pi\nu T$). Le module, quant à lui, garde les mêmes caractéristiques que (E.20) ; autrement dit le

spectre reste identique. Cette transformée $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu)$ est une des fonctions de base pour l'étude de tout signal sur une durée limitée ($0 \leq t \leq \mathrm{T}$).

2.3.2 • La distribution « porte »

Une fonction porte de largeur T échantillonnée par le peigne $t_e \mathrm{X}_{t_e}(t)$ définit la distribution « porte », mais bien souvent le terme « porte » désigne selon le contexte la fonction ou la distribution. Pour la distribution, la largeur T et le pas d'échantillonnage t_e sont toujours reliés par $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$ avec M entier, représentant le nombre d'échantillons (dans cette annexe, pour des raisons de simplification, la valeur de M sera toujours paire). Soit donc $\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)$ la distribution porte, résultat de l'échantillonnage de la fonction $\Pi_{\mathrm{T}}(t)$ par le peigne $t_e \mathrm{X}_{t_e}$ avec $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$; elle peut s'exprimer par :

$$\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t) = t_e \mathrm{X}_{t_e} \cdot \Pi_{\mathrm{T}}(t) = t_e \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} \delta(t - mt_e). \tag{E.22}$$

Nous attirons l'attention sur le fait que l'échantillonnage se fait à partir de l'instant $t = 0$, jusqu'à l'instant $t = (\mathrm{M} - 1)\, t_e$. Nous obtenons une série de M valeurs égales à t_e, et comme $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$, il vient :

$$\frac{1}{\mathrm{M}t_e} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} t_e \delta(t - mt_e) = 1 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \Pi_{\mathrm{T}}(t) \mathrm{d}t. \tag{E.23}$$

La somme de la série ainsi échantillonnée est égale à l'intégrale de la fonction porte correspondante. Autrement dit, la somme de la série s'identifie à l'intégrale de la fonction quand t_e tend vers zéro. En considérant la distribution normée de la porte (E.22), sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\mathrm{TF}\left[\frac{1}{\mathrm{T}} \Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)\right] = \mathrm{TF}\left[\frac{t_e}{\mathrm{T}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} \delta(t - mt_e)\right] = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} e^{-j2\pi\nu m t_e}. \tag{E.24a}$$

Notons que la série du dernier membre de (E.24a) représente une progression géométrique de raison $e^{-j2\pi\nu t_e}$. Nous désignerons cette transformée par $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$, il vient ainsi :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\mathrm{T}} \Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)\right] = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \frac{e^{-j2\pi\nu \mathrm{M} t_e} - 1}{e^{-j2\pi\nu t_e} - 1},$$

soit :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu\mathrm{T})}{\mathrm{M}\sin(\pi\nu\mathrm{T}/\mathrm{M})} e^{-j\pi\nu\mathrm{T}(1-1/\mathrm{M})}. \tag{E.24b}$$

Une troisième expression de $\Lambda_{\mathrm{T},t_e}(\nu)$ peut s'obtenir par le produit de convolution :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \Lambda_{\mathrm{T}}(\nu) * \mathrm{TF}\left[t_e \mathrm{X}_{t_e}(t)\right] = \frac{\sin(\pi\nu\mathrm{T})}{\pi\nu\mathrm{T}} e^{-j\pi\nu\mathrm{T}} * \mathrm{X}_{\nu_e}(\nu),$$

qui s'écrit encore, en rappelant que :

$$\mathrm{X}_{\nu_e}(\nu) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \delta(\nu - k\nu_e)$$

avec $\nu_e = \mathrm{M}/\mathrm{T}$:

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \frac{\sin\left[\pi(\nu + k\nu_e)\mathrm{T}\right]}{\pi(\nu + k\nu_e)\mathrm{T}} e^{-j\pi(\nu+k\nu_e)\mathrm{T}}. \tag{E.24c}$$

La comparaison de $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu)$, transformée de la fonction porte normée E.24, avec $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$, donnée sous ses trois formes (E.24a), (E.24b) et (E.24c), nous montre que l'échantillonnage apporte des modifications très nettes sur la nature du spectre :

— le spectre de la distribution porte se reproduit à lui-même tous les $k\nu_e$ (périodicité) avec $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu + k\nu_e)$; il n'est pas possible d'obtenir par l'échantillonnage le spectre exact de la fonction porte ; on peut noter que dans la relation (E.24b), le dénominateur devient égal à $\mathrm{M}\sin(\pi\nu\mathrm{T}/\mathrm{M})$, qui converge vers $\pi\nu\mathrm{T}$ quand M tend vers l'infini ($t_e \to 0$) ;

— nous avons vu que le spectre de $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu)$ a un maximum absolu égal à l'unité pour $\nu = 0$; en raison de la périodicité, le spectre de $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ atteint ses maxima absolus, également de valeur unité, pour tout $\nu = k\nu_e$;

— les deux transformées étant hermitiennes avec $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu) = \Lambda_{\mathrm{T}}^*(-\nu)$ et $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \Lambda_{\mathrm{T,M}}^*(-\nu)$, les deux spectres sont symétriques par rapport à l'axe $\nu = 0$; mais la répétition séquentielle de $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ fait que les axes $\nu = k\nu_e$ sont également axes de symétrie pour le spectre de la distribution porte ;

— Si $\Delta\nu$ représente un écart de fréquence quelconque, positif ou négatif le caractère périodique et hermitien de $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ entraîne l'égalité suivante :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu_e/2 - \Delta\nu) = \Lambda_{\mathrm{T,M}}^*(\nu_e/2 + \Delta\nu + k\nu_e).$$

Cette relation peut se vérifie facilement à partir des différentes expressions de $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ et apporte une propriété supplémentaire au spectre : les axes $\nu = \left(1/2 + k\right)\nu_e$ sont également axes de symétrie de ce spectre. On parle alors de « repliement » du spectre (*aliasing* en anglais). La fréquence $\nu_{\mathrm{N}} = \nu_e/2$ est dite fréquence de Nyquist.

Ainsi, une bonne image de la transformée $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu)$ est obtenue par $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ en la limitant à l'intervalle de fréquence $(-\nu_{\mathrm{N}}, \nu_{\mathrm{N}})$, mais cette image ne restitue pas les composantes de $\Lambda_{\mathrm{T}}(\nu)$ à l'extérieur de ce domaine. Cependant

si nous assimilons les deux intervalles, temporel T et fréquentiel $\nu_e = 2\nu_N$, chacun dans leur domaine à des « périodes », nous avons :

$$M = \frac{T}{t_e} = \frac{\nu_e}{\nu_T}. \tag{E.25}$$

À la distribution de la porte normée (série discrète de pas temporel t_e) :

$$\frac{1}{T}\Pi_{T,t_e}(t) = \frac{t_e}{T}X_{t_e} \cdot \Pi_T(t) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{m=M-1} \delta(t - mt_e), \tag{E.26}$$

on peut ainsi faire correspondre une transformée discrète (spectre de raies tous les $\nu_T = 1/T$) dans la porte fréquentielle symétrique de largeur ν_e, ayant un même nombre de termes M. En effet, à partir de $\Lambda_{T,M}(\nu)$ définie par (E.24b) et en notant que $\nu_N = \nu_e/2 = M\nu_T/2$, on obtient alors la série suivante :

$$\begin{aligned}\Lambda_{T,M}(\nu) \cdot \sum_{n=-M/2}^{n=M/2-1} \delta(\nu - n\nu_T) \\ = \sum_{n=-M/2}^{n=M/2-1} \frac{\sin n\pi}{M\sin(n\pi/M)} e^{-jn\pi(1-1/M)} = \delta(n).\end{aligned} \tag{E.27}$$

Ainsi, tous les termes de cette transformée discrétisés aux valeurs $\nu = n\nu_T$ sont nuls, à l'exception du terme pour lequel $n = 0$ qui correspond au Dirac $\delta(\nu)$ dont la transformée inverse a pour valeur l'unité. Notons que la discrétisation de $\Lambda_T(\nu)$, donnée par (E.21), donne le même résultat. Ainsi on obtient la même image pour les spectres discrétisés respectifs de la fonction et de la distribution porte normée dans l'intervalle fréquentiel $(-\nu_N, \nu_N)$. La transformée inverse de (E.27) étant égale à l'unité, son échantillonnage dans l'intervalle (0, T) redonne bien la distribution porte (E.26). Il y a une correspondance totale entre les deux relations. Nous verrons que cette correspondance est une propriété commune à toute fonction admettant une transformée de Fourier et échantillonnée sur un laps de temps déterminé. Signalons que ces transformées de Fourier discrètes (TFD), appelées plus souvent séries de Fourier, sont la conséquence de la dualité « échantillonnage-périodisation » dans les deux domaines, temporel et fréquentiel. Les outils ainsi définis facilitent l'analyse des séries de données représentant les valeurs discrètes d'un signal régulièrement échantillonné sur un laps de temps déterminé.

3 • Fonctions périodiques réelles

Rappelons qu'une fonction réelle f d'une variable réelle t est dite périodique, de période T (nombre positif), si la valeur de la fonction est la même pour t et $t \pm k\mathrm{T}$ ($k \in \mathrm{N}^*$).

3.1 • Séries périodiques

Considérons la série exponentielle complexe

$$\sum_{m \in \mathrm{Z}} \lambda_m e^{j2\pi\nu_m t},$$

où les fréquences ν_m sont définies par $\nu_m = m\nu_\mathrm{T} (m \in \mathrm{Z})$ et $\nu_\mathrm{T} = 1/\mathrm{T} > 0$), avec les coefficients complexes ($\lambda_m \in \mathrm{C}$) satisfaisant à la relation $\lambda_m = \lambda^*_{-m}$. Cette série définit alors une série trigonométrique réelle, exprimée en notation complexe. Sous réserve que la somme soit bornée, cette série est représentative d'une fonction réelle périodique, de période T et définie pour tout t. Sa valeur est la même en tout point $t \pm k\mathrm{T}$ et ne dépend pas de $k \in \mathrm{N}^*$. Soit donc une fonction $f(t)$, définie pour toute valeur de t et périodique de période T. S'il existe une série trigonométrique dont $f(t)$ est la somme, cette série définit la série de Fourier de la fonction, soit en notation complexe :

$$f(t) = \sum_{m \in \mathrm{Z}} \lambda_m e^{j2\pi m\nu_\mathrm{T} t}. \tag{E.28a}$$

Cette série de Fourier peut encore s'écrire sous différentes formes, avec ici $\nu_n = n\nu_\mathrm{T}$ ($n \in \mathrm{N}$) :

$$f(t) = \lambda_0 + \sum_{n \in \mathrm{N}^*} \left[\lambda_n e^{+j2\pi n\nu_\mathrm{T} t} + \lambda^*_n e^{-j2\pi . n\nu_\mathrm{T} t}\right]. \tag{E.28b}$$

$$f(t) = \frac{c_0 e^{-j\varphi_0}}{2} + \sum_{n \in \mathrm{N}^*} \frac{c_n}{2}\left(e^{+j(2\pi n\nu_\mathrm{T} t - \varphi_n)} + e^{-j(2\pi n\nu_\mathrm{T} t - \varphi_n)}\right), \tag{E.28c}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathrm{N}^*} c_n \cos(2\pi n\nu_\mathrm{T} t - \varphi_n), \tag{E.28d}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathrm{N}^*} \left[a_n \cos(2\pi n\nu_\mathrm{T} t) + b_n \sin(2\pi n\nu_\mathrm{T} t)\right]. \tag{E.28e}$$

Ainsi pour $n \in \mathrm{N}^*$ ($\lambda_n \in \mathrm{C}$) ; $c_n \in \mathrm{R}^+$; $a_n, b_n \in \mathrm{R}$), la fonction $f(t)$ étant réelle, les différents coefficients sont liées par les expressions suivantes :

$$\lambda_n = \frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}. \tag{E.29}$$

Les relations suivantes s'en déduisent :

$$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2 = 4\lambda_n\lambda^*_n$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n = \lambda_n + \lambda_n^*$$
$$b_n = c_n \sin \varphi_n = j\left(\lambda_n - \lambda_n^*\right)$$

Pour $n = 0$: la moyenne λ_0 de la fonction sur une période T (ou un multiple entier) est réelle, d'où : $2\lambda_0 = c_0 e^{j\varphi_0} = a_0$, avec $\varphi_0 = 0$ si $\lambda_0 > 0$ et $\varphi_0 = \pi$ si $\lambda_0 < 0$, b_0 étant évidemment nul. Ainsi, connaissant une fonction périodique réelle $f(t)$ de période T, la question se pose de savoir :

— primo, sous quelles conditions cette fonction peut être représentée par une série de Fourier,

— secundo, comment calculer les coefficients de cette série.

3.2 • Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Pour qu'une fonction périodique $f(t)$ puisse se développer en série de Fourier, il faut et il suffit que cette fonction soit bornée, continue et intégrable. C'est le théorème de Jordan, qu'il énonce ainsi : « Si (une fonction) $f(x)$ est périodique et à variation bornée sur tout intervalle fini, sa série de Fourier est convergente, uniformément dans tout intervalle où $f(x)$ est continue ». Supposons que les conditions d'existence d'une série de Fourier pour la fonction périodique $f(t)$ de période T soient remplies. Nous avons vu au début de cette annexe que la « transformée de Fourier » d'une fonction périodique $f(t)$, à la fréquence $\nu_m = m\nu_\mathrm{T}$ (avec $m \in \mathrm{Z}$ et $\nu_\mathrm{T} = 1/\mathrm{T}$), est définie par l'intégrale (E.1a). En remplaçant la fonction $f(t)$ par sa forme (E.28a), il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(m\nu_\mathrm{T}) &= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{+\mathrm{T}/2} \sum_{\mu \in \mathrm{Z}} \lambda_\mu e^{j2\pi(\mu - m)\nu_\mathrm{T} t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{\mu \in \mathrm{Z}} \lambda_\mu \left(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} e^{j2\pi(\mu - m)\nu_\mathrm{T} t} \mathrm{d}t \right). \qquad \text{(E.30)}\end{aligned}$$

L'intégration de la partie entre parenthèses, contenue dans le terme général de la deuxième série de (E.30) donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{+\mathrm{T}/2} e^{j2\pi(\mu - m)\frac{t}{\mathrm{T}}} \mathrm{d}t &= \frac{e^{i\pi(\mu - m)} - e^{-i\pi(\mu - m)}}{2j\pi(\mu - m)} \\ &= \frac{\sin\left[\pi(\mu - m)\right]}{\pi(\mu - m)} = \delta(\mu - m), \qquad \text{(E.31)}\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathrm{F}(m\nu_\mathrm{T}) = \sum_{\mu \in \mathrm{Z}} \lambda_\mu \delta(\mu - m). \qquad \text{(E.32a)}$$

Tous les termes de la série (E.32a) sont nuls à l'exception de celui de rang $\mu = m$. La transformée $F(\nu)$ à la fréquence $\nu = m\nu_T$ de la fonction périodique $f(t)$ de période T n'est autre que le coefficient de Fourier λ_m, soit :

$$\lambda_m = F(\nu) \cdot \delta(\nu - m\nu_T). \tag{E.32b}$$

Pour $m = 0$, nous retrouvons la valeur λ_0, moyenne de la fonction périodique considérée $f(t)$. Nous venons de voir comment il est possible d'établir la série de Fourier d'une fonction réelle périodique, continue et bornée sur tout intervalle fini. Notons que la relation (E.42) peut s'interpréter comme l'échantillonnage fréquentiel d'une transformée $F(\nu)$ tous les $\nu_T = 1/T$. La série périodique (E.28a) peut s'assimiler alors à la transformée inverse de $F(\nu)$ échantillonnée par le peigne $X_{\nu_T}(\nu)$:

$$f(t) = TF^{-1}\left[F(\nu) \cdot X_{\nu_T}(\nu)\right] = TF^{-1}\left[F(\nu)\right] * T.X_{T(t)}$$

Ainsi, du fait que la transformée d'un peigne est un peigne à une constante près (E.17), la convolution de la transformée inverse avec $X_T(t)$ entraîne que la fonction $f(t)$ est périodique de période T avec : $f(t) = f(t+kT)$ $k \in Z^*$ En outre, il est important de remarquer que le spectre de la fonction périodique $f(t)$ de période T n'est pas un spectre continu. Il est composé de « **raies** » dont l'écart élémentaire sur l'axe des fréquences est ν_T. La fonction étant réelle, son spectre d'amplitude est entièrement défini pour les fréquences discrètes $\nu = n\nu_T \geq 0$ ($n \in N$) avec :

$$|F(\nu)| = \frac{c_0}{2}\delta(\nu) + \sum_{n \in N^*} c_n \delta(\nu - n\nu_T), \tag{E.33}$$

les coefficients c_n étant définis par (E.29). Examinons maintenant le cas général d'une fonction réelle, représentative de l'évolution temporelle d'un phénomène quantifiable et continu, échantillonnée à intervalle régulier tous les t_e sur une durée T.

4 • Fonction réelle échantillonnée

Rappelons que seul le cas de l'échantillonnage ponctuel est examiné ici (comme nous l'avons fait pour la fonction porte, voir §3.2) ; c'est-à-dire celui de la fonction échantillonnée par le peigne $t_e X_{t_e}(t)$, qui peut être défini sous ses deux formes avec $\nu_e = 1/t_e$:

$$t_e X_{t_e} = t_e \sum_{m \in Z} \delta(t - mt_e) = \sum_{m \in Z} e^{j2\pi m\nu_e t}. \tag{E.34}$$

4.1 • Échantillonnage sur tout le domaine d'existence

Soit une fonction réelle $f(t)$ continue et intégrable, admettant la transformée $\mathrm{F}(\nu)$ définie par (E.1b). Désignons par $f_{t_e}(t)$ la fonction échantillonnée sur tout son domaine d'existence par (E.34). Cette dernière peut s'exprimer selon les relations équivalentes suivantes :

$$f_{t_e}(t) = t_e \mathrm{X}_{t_e} f(t) = t_e \sum_{m \in \mathrm{Z}} f(t)\delta(t - mt_e) \tag{E.35a}$$

ou

$$f_{t_e}(t) = t_e \mathrm{X}_{t_e} f(t) = \sum_{m \in \mathrm{Z}} f(t) e^{j2\pi m \nu_e t} \tag{E.35b}$$

Notons que nous avons :

$$\sum_{m \in \mathrm{Z}} t_e f(mt_e) \xrightarrow[t_e \to 0]{} \int_t f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, quand le pas d'échantillonnage t_e tend vers zéro, la limite de la somme de la série est l'intégrale de la fonction continue $f(t)$. La question qui se pose est de savoir comment restituer la transformée $\mathrm{F}(\nu)$ à partir de cette série échantillonnée. Pour la fonction porte, nous avons vu qu'il n'est pas possible de reconstituer son spectre continu par l'échantillonnage sauf si T tend vers l'infini. Cependant une image identique du spectre a pu être obtenue à partir des transformées discrètes (ou séries de Fourier) en tenant compte de la dualité « échantillonnage-périodisation » tant dans le domaine temporel que fréquentiel. Soit donc la fonction échantillonnée $f_{t_e}(t)$, satisfaisant aux conditions énoncées au début (fonction bornée, intégrable avec un nombre fini de discontinuités sur son domaine d'existence). Elle admet aussi une transformée de Fourier : $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) = \mathrm{TF}\left[f_{t_e}(t)\right]$, l'indice (t_e) dans $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu)$ signifiant qu'il s'agit de la transformée d'une fonction échantillonnée à la cadence t_e. Le calcul de $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu)$ peut s'effectuer directement à partir de la définition de la transformée. En prenant l'expression (E.35a) de $f_{t_e}(t)$, nous obtenons une première relation définissant la transformée qui est fonction continue de la fréquence ν :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) &= t_e \int_t \sum_{m \in \mathrm{Z}} \delta(t - mt_e) f(t) e^{-j2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\ &= t_e \sum_{m \in \mathrm{Z}} f(mt_e) e^{-j2\pi\nu m t_e}\end{aligned} \tag{E.36a}$$

En utilisant les propriétés des transformées résumées dans (E.6), nous avons aussi :

$$\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) = \mathrm{TF}\left[t_e \mathrm{X}_{t_e}\right] * \mathrm{TF}\left[f(t)\right] = \mathrm{X}_{\nu_e}(\nu) * \mathrm{F}(\nu)$$

soit une deuxième relation équivalente en rappelant que

$$\mathrm{X}_{\nu_e}(\nu) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \delta(\nu - k\nu_e)$$

$$\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \delta(\nu - k\nu_e) * \mathrm{F}(\nu) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \mathrm{F}(\nu - k\nu_e). \tag{E.36b}$$

Ce résultat signifie que le spectre de $f_{t_e}(t)$ est celui de $f(t)$, mais « périodisé », c'est-à-dire que ce dernier se reproduit à lui-même sur l'axe des fréquences avec une « période » égale à $\nu_e = 1/t_e$, tout comme pour la « porte ». Il n'est donc pas possible de reconstruire les fonctions $f(t)$ ou $\mathrm{F}(\nu)$ à partir de la seule connaissance de $f_{t_e}(t)$ ou de $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu)$. Dans le cas général, il existe une infinité de solutions. Rappelons que, la fonction échantillonnée $f_{t_e}(t)$ étant réelle donc hermitienne, sa transformée conserve cette propriété : $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) = \mathrm{F}^*_{(t_e)}(-\nu)$. Ainsi nous retrouvons les deux familles d'axes de symétrie du spectre comme pour la porte. Le spectre de la fonction réelle échantillonnée $f_{t_e}(t)$ est symétrique dans le domaine des fréquences par rapport à tout axe d'équation $\nu = k\nu_e$ avec $k \in \mathrm{Z}$. De plus la périodisation ν_e (induite par l'échantillonnage) et le caractère hermitien entraînent l'égalité :

$$\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu_\mathrm{N} - \Delta\nu) = \mathrm{F}^*_{(t_e)}(\nu_\mathrm{N} + \Delta\nu + k\nu_e)$$

où $\nu_\mathrm{N} = \nu_e/2$ est la fréquence de Nyquist, $\Delta\nu$ un écart de fréquence quelconque, et $k \in \mathrm{Z}$. Cette dernière égalité engendre une deuxième famille d'axes de symétrie du spectre, d'équation $\nu = \nu_\mathrm{N} + k\nu_e$ (avec ici $k \in \mathrm{Z}^*$). Ce type de symétrie introduit, tout comme pour la distribution porte, le « repliement » du spectre. Si des précautions ne sont pas prises au moment de l'échantillonnage, des composantes de hautes fréquences ($\nu > \nu_\mathrm{N}$) du vrai spectre se « replient » dans les basses fréquences du spectre de $f_{t_e}(t)$. Cependant, supposons que $f(t)$ ait une transformée $\mathrm{F}(\nu)$ dont la fréquence maximale en valeur absolue soit $\nu_\mathrm{M} > 0$. Autrement dit, $\mathrm{F}(\nu)$ est nulle pour toutes les fréquences dont les valeurs absolues $|\nu| \geq \nu_\mathrm{M} > 0$. Le spectre de la fonction réelle $f(t)$ va s'étendre alors sur une largeur de $2\nu_\mathrm{M}$, allant de $-\nu_\mathrm{M}$ à ν_M.

Pour que le motif du vrai spectre ne soit pas modifié par la répétition périodique introduite par le peigne $\mathrm{X}_{t_e}(t)$, il faut et il suffit que la fréquence d'échantillonnage ν_e soit supérieure ou égale à $2\nu_\mathrm{M}$ (théorème de Shannon) :

$$\nu_e \geq 2\nu_\mathrm{M} \Rightarrow t_e = \frac{1}{\nu_e} \leq \frac{1}{2\nu_\mathrm{M}}. \tag{E.37}$$

Dans le cas où le signal possède des fréquences $|\nu| \geq \nu_e$, il convient donc de filtrer les fréquences dont les valeurs absolues sont supérieures au moins

à deux fois celle de l'échantillonnage. Ainsi, pour une fonction réelle quelconque $f(t)$, admettant une transformée de Fourier $\mathrm{F}(\nu)$ et échantillonnée sur l'ensemble du domaine d'existence à une cadence respectant la condition de Shannon ($\nu_e \geq 2\nu_\mathrm{M}$), la transformée $\mathrm{F}_{(t_e)}(\nu)$ limitée à l'intervalle de fréquences ($-\nu_e/2 < \nu < \nu_e/2$), c'est-à-dire correspondant au terme $k = 0$ de la relation (E.36b), est alors égale à $\mathrm{F}(\nu)$:

$$\delta(k) \cdot \mathrm{F}_{(t_e)}(\nu) = \mathrm{F}(\nu). \tag{E.38}$$

Les fonctions considérées ici étant réelles, leurs transformées sont hermitiennes, et la connaissance du spectre dans le domaine $(0, \nu_e/2)$ entraîne celle du spectre total dans ($-\nu_e/2 < \nu < \nu_e/2$).

4.2 • Échantillonnage sur une durée limitée

Dans la pratique, l'étude d'un signal s'effectue sur une durée limitée T. La fonction réelle continue $f(t)$ n'est donc pas connue dans tout son domaine d'existence, mais « perçue » à travers la porte $\Pi_\mathrm{T}(t)$. La transformée de Fourier $\mathrm{F}_\mathrm{T}(\nu)$ de la partie connue de la fonction s'exprime ainsi par :

$$\mathrm{F}_\mathrm{T}(\nu) = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_\mathrm{T}(t)f(t)\right] = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^\mathrm{T} f(t)e^{-j2\pi\nu t}\mathrm{d}t = \Lambda_\mathrm{T}(\nu) * \mathrm{F}(\nu), \tag{E.39}$$

$\Lambda_\mathrm{T}(\nu)$ étant donnée par (E.21).

Le signal ainsi capté peut alors recevoir deux interprétations :

— soit sa fonction représentative est périodique et de période T, et le signal peut être connu pour tout t ;

— soit il est apériodique et la transformée de sa partie connue est le produit de convolution de $\Lambda_\mathrm{T}(\nu)$, transformée de la porte normée par sa largeur T, avec la transformée de la totalité du signal ; le spectre complet ne peut alors être obtenu.

Le traitement du signal sur ordinateur exige l'échantillonnage à une cadence de temps t_e sur une durée déterminée T, ce qui a pour effet d'élargir le spectre initial en introduisant la période ν_e dans le domaine des fréquences. De même, nous avons vu que l'échantillonnage d'un spectre continu (tous les $\nu_\mathrm{T} = 1/\mathrm{T}$) fournit un spectre discret (ou de raies) et un signal de période T.

Nous avons déjà examiné l'effet de l'échantillonnage sur la fonction porte. Ce premier exemple va nous permettre de voir rapidement l'effet de cette discrétisation sur des fonctions simples périodiques : la fonction cyclique complexe $e^{j2\pi\nu_i t}$ et la fonction cosinus.

4.2.1 • La fonction cyclique complexe

Nous avons déjà vu (2.1) que la transformée de Fourier de la fonction cyclique exponentielle complexe $e^{j2\pi\nu_i t}$, avec $\nu_i \in= \lim \mathrm{R}e$, est le Dirac $\delta(\nu - \nu_i)$:

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\delta(\nu - \nu_i)\right] = \int_t \delta(\nu - \nu_i) e^{j2\pi\nu t} \mathrm{d}t = e^{j2\pi\nu_i t}$$

Considérons donc la distribution définie par (E.26) avec $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$. L'échantillonnage de $e^{j2\pi\nu_i t}$ dans cette porte fournit M relevés. On suppose évidemment que le pas d'échantillonnage t_e respecte le critère de Shannon, c'est-à-dire que $\nu_e = 1/t_e > 2\,|\nu_i|$. Nous avons ainsi la fonction échantillonnée : $\left(e^{j2\pi\nu_i t}\right)_{\mathrm{T},t_e} = e^{j2\pi\nu_i t} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{T}} \Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)$.

En rappelant que $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$, définie par (E.24a), est la transformée de la porte considérée, il vient :

$$\mathrm{TF}\left[\left(e^{j2\pi\nu_i t}\right)_{\mathrm{T},t_e}\right] = \delta(\nu - \nu_i) * \Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu - \nu_i), \qquad \text{(E.40a)}$$

soit en explicitant à partir de la relation (E.24b) :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu - \nu_i) = \frac{\sin\left[\pi(\nu - \nu_i)\mathrm{T}\right]}{\mathrm{M}\sin\left[\pi(\nu - \nu_i)\mathrm{T}/\mathrm{M}\right]} e^{-j\pi(\nu - \nu_i)\mathrm{T}(1-1/\mathrm{M})}. \qquad \text{(E.40b)}$$

On peut noter que :

$$\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu_i - \nu) = \Lambda^*_{\mathrm{T,M}}(\nu - \nu_i). \qquad \text{(E.40c)}$$

Ainsi la transformée de la fonction $e^{j2\pi\nu_i t}$, échantillonnée par la distribution normée de la porte n'est plus la distribution de Dirac $\delta(\nu - \nu_i)$ mais la fonction continue périodique $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu - \nu_i) = \Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu - \nu_i + k\nu_e)$ de « période » $\nu_e = \mathrm{M}/\mathrm{T}$. Son spectre est celui de la distribution normée de la porte, translaté à toutes les fréquences $\nu = \nu_i + k\nu_e$ ($k \in \mathrm{Z}$) pour lesquelles la valeur du spectre est égale à l'unité.

Tous les axes $\nu = \nu_i + k\nu_e$ sont évidemment axes de symétrie du spectre. La fonction de départ $e^{j2\pi\nu_i t}$ étant complexe, la transformée de la fonction échantillonnée n'est donc pas hermitienne et les axes $\nu = k\nu_e$ ne sont pas axes de symétrie du spectre. Ceci entraîne que le spectre ne peut se « replier » à partir des axes $\nu = \nu_\mathrm{N} + k\nu_e$ (p.m. $\nu_\mathrm{N} = \nu_e/2 = \mathrm{M}/2\mathrm{T}$, fréquence de Nyquist). Pour une fonction complexe, seule la périodicité ν_e demeure pour la transformée. Dans le cas où la largeur de la porte T est un multiple de la période de la fonction cyclique, sa fréquence peut s'écrire $\nu_i = k_i\nu_\mathrm{T}$ avec $k_i \in \mathrm{Z}$ compris dans l'intervalle $(-\mathrm{M}/2, \mathrm{M}/2)$ bornes exclues. En échantillonnant $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu - k_i\nu_\mathrm{T})$, par la porte spectrale discrète

dans l'intervalle $(-\nu_N, \nu_N)$ avec un pas ν_T, nous obtenons un spectre discret formé par la seule distribution de Dirac $\delta(\nu - k_i\nu_T)$. Le calcul est similaire à celui qui a été effectué pour la porte (E.27).

Ainsi en opérant un double échantillonnage :

— temporel de pas t_e et de durée T sur la fonction continue de départ (ici l'exponentielle complexe $e^{j2\pi\nu_i t}$),

— fréquentiel de pas ν_T dans l'intervalle limité $(-\nu_N, \nu_N)$ sur la transformée continue du signal échantillonné,on établit une correspondance totale entre les deux séries comprenant chacune M termes et l'image du vrai spectre peut être obtenue sous réserve que la largeur T de la porte soit un multiple de la période de la fonction étudiée. Il est évident que si la fréquence ν_i est supérieure en valeur absolue à la fréquence de Nyquist ν_N, le problème ne peut être résolu (non-respect du théorème de Shannon). Le pic du spectre obtenu dans l'intervalle $(-\nu_N, \nu_N)$ correspond à une valeur particulière $k = k_n \in Z$ telle que : $-\nu_N < \nu_i + k_n\nu_e < \nu_N$.

Ainsi, en raison de la périodicité, l'échantillonnage d'un signal HF (haute fréquence : $|\nu_i| > \nu_N$) fera apparaître dans l'intervalle $(-\nu_N, \nu_N)$ de l'énergie BF inexistante dans le vrai spectre (effet stroboscopique).

4.2.2 • La fonction *cosinus*

Considérons la fonction cosinus suivante avec $\nu_i > 0$:

$$C_i(t) = 2\cos(2\pi\nu_i t) = e^{j2\pi\nu_i t} + e^{-j2\pi\nu_i t}. \tag{E.41}$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\mathrm{TF}\,[C_i(t)] = \delta(\nu - \nu_i) + \delta(\nu + \nu_i). \tag{E.42}$$

En tenant compte des résultats de la partie précédente, la transformée continue $\chi_{T,M,i}(\nu)$ de la fonction échantillonnée dans la porte de largeur $T = Mt_e$ s'écrit :

$$\chi_{T,M,i}(\nu) = [\delta(\nu - \nu_i) + \delta(\nu + \nu_i)] * \left[\Lambda_{T,M}(\nu)\right]$$

soit :

$$\chi_{T,M,i}(\nu) = \Lambda_{T,M}(\nu - \nu_i) + \Lambda_{T,M}(\nu + \nu_i), \tag{E.43}$$

ou encore en tenant compte de (E.40b) :

$$\chi_{T,M,i}(\nu) = \Lambda^*_{T,M}(\nu_i - \nu) + \Lambda_{T,M}(\nu_i + \nu)$$

Outre la « périodicité » $\nu_e = M/T$, propre à toutes les transformées des fonctions « peignées » par $t_e X_{t_e}$, la fonction *cosinus* étant réelle donc hermitienne, sa transformée conserve cette propriété, ainsi nous avons :

$$\chi_{T,M,i}(\nu) = \chi^*_{T,M,i}(-\nu). \tag{E.44}$$

$$\chi_{\mathrm{T,M},i}(\nu_{\mathrm{N}} - \Delta\nu) = \chi^*_{\mathrm{T,M},i}(\nu_{\mathrm{N}} + \Delta\nu + k\nu_e) \tag{E.45}$$

Il s'ensuit la propriété de symétrie du spectre d'amplitude $\left|\chi_{\mathrm{T,M},i}(\nu)\right|$ par rapport aux deux familles d'axes d'équations : $\nu = k\nu_e$ et $\nu = \nu_{\mathrm{N}} + k\nu_e$ avec $k \in \mathrm{Z}$.

Cette propriété déjà signalée à plusieurs reprises est propre à toute fonction réelle admettant une transformée, avec repliement du spectre par rapport à la fréquence de Nyquist (p.m. $\nu_{\mathrm{N}} = \nu_e/2 = 1/2t_e$). Si la durée T est un multiple de la période de la fonction considérée, en opérant le double échantillonnage, temporel t_e sur la durée $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$ et fréquentiel ν_{T} dans l'intervalle $(-\nu_{\mathrm{N}}, \nu_{\mathrm{N}})$, on obtient l'image du vrai spectre donné par (E.42).

En résumé, sous réserve de respecter le théorème sur l'échantillonnage, l'effet combiné de la périodicité (symétrie par rapport aux axes $\nu = k\nu_e$) et du repliement (symétrie par rapport à $\nu = \nu_{\mathrm{N}} + k\nu_e$) font que le spectre d'une fonction réelle est ici totalement défini dans le domaine des fréquences positives $(0, \nu_{\mathrm{N}})$. En revanche, pour les grandeurs complexes ont ne peut retenir que la périodicité et le spectre doit être défini dans le domaine des fréquences $(-\nu_{\mathrm{N}}, \nu_{\mathrm{N}})$.

La figure E.1 permet de se rendre compte des différentes symétries des spectres selon que l'on considère la transformée continue d'une fonction cyclique échantillonnée ou celle de la fonction cosinus, considérée comme la somme des deux fonctions cycliques de vitesses angulaires opposées.

5 • Application au cas de la marée

Le cas de la marée est bien particulier. Bien que ce phénomène soit perçu comme un mouvement régulier, la marée n'est pas périodique. Même le saros ne constitue pas une période pour elle (voir annexe A, 2.2). Cependant elle est la somme d'un certain nombre de composantes périodiques et sa transformée de Fourier est elle-même une somme de distributions de Dirac, pondérées par les amplitudes des ondes correspondantes. Son spectre est donc un spectre de raies dont l'échantillonnage fréquentiel par un plus grand commun diviseur n'est pas possible. Ainsi, l'absence de périodicité provient uniquement du fait que les fréquences des différentes composantes de marée sont incommensurables entre elles. Soit donc $h(t)$ la hauteur de la marée à l'instant t supposée réduite à ses composantes i : la valeur de i est considérée ici comme un numéro d'ordre ($i \in \mathrm{N}^*$) selon les fréquences (positives) croissantes. Chaque composante est définie par les trois éléments : l'amplitude a_i, la fréquence ν_i (≥ 0)) et la phase φ_i à l'instant origine $t = 0$. La fonction

$h(t)$ peut donc s'écrire (pour simplifier, on peut supposer dans un premier temps le niveau moyen nul) :

$$h(t) = \sum_{i \in \mathrm{N}^*} h_i(t) = \sum_{i \in \mathrm{N}^*} a_i \cos(2\pi\nu_i t - \varphi_i). \tag{E.46}$$

En désignant par $\eta_i = a_i e^{-j\varphi_i}/2$ et $\eta_i^* = a_i e^{j\varphi_i}/2$, les amplitudes complexes conjuguées, on peut encore s'écrire :

$$h_i(t) = \eta_i e^{j2\pi\nu_i t} + \eta_i^* e^{-j2\pi\nu_i t}. \tag{E.47}$$

La transformée de Fourier de $h_i(t)$ est ainsi la somme de deux distributions de Dirac aux fréquences opposées (ν_i et $-\nu_i$), et pondérées par des amplitudes complexes conjuguées (η_i et η_i^*) :

$$\mathrm{TF}\left[h_i(t)\right] = \eta_i \delta(\nu - \nu_i) + \eta_i^* \delta(\nu + \nu_i). \tag{E.48}$$

En désignant par $\mathrm{F}(\nu)$ la transformée de $h(t)$ sur tout son domaine d'existence, la marée présente un spectre de raies ayant une distribution particulière. En effet ces raies sont distribuées autour de chaque espèce ($\approx \pm 2{,}5°/\mathrm{h}$) et les espèces étant séparées de 14,492°/h. ($= 360°/\mathrm{T_L}$ où $\mathrm{T_L} = 24{,}841\,2\mathrm{h}$ est le jour lunaire) :

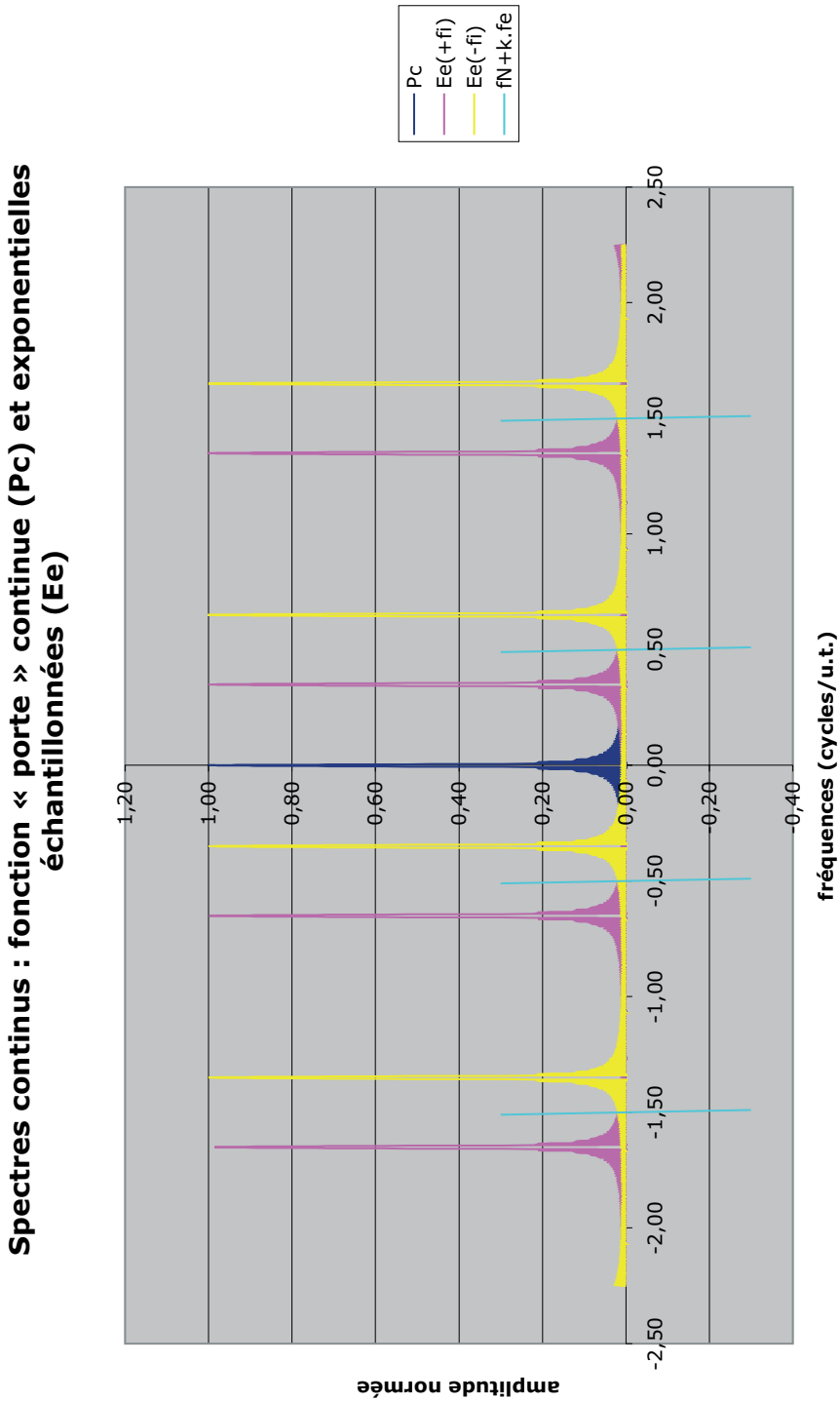
$$\mathrm{F}(\nu) = \mathrm{TF}\left[h(t)\right] = \sum_{i \in \mathrm{N}^*} \left[\eta_i \delta(\nu - \nu_i) + \eta_i^* \delta(\nu + \nu_i)\right]. \tag{E.49}$$

Figure E.1 (à droite) — La « porte » a une largeur T égale à 100 unités de temps (u.t.). Cette unité est choisie comme pas d'échantillonnage (*fe*=1 cycle/u.t. d'où la fréquence de Nyquist : $f\mathrm{N} = fe/2 = 0{,}5$ cycle/u.t.). Seules les deux fonctions cycliques sont échantillonnées (exponentielles complexes de vitesses angulaires opposées : $\pm fi = \pm 0{,}35$ cycle/u.t.). La « porte » a une largeur T égale à 100 unités de temps (u.t.). Cette unité est choisie comme pas d'échantillonnage (*fe*=1 cycle/u.t. d'où la fréquence de Nyquist : $f\mathrm{N} = fe/2 = 0{,}5$ cycle/u.t.). Seules les deux fonctions cycliques sont échantillonnées (exponentielles complexes de vitesses angulaires opposées : $\pm fi = \pm 0{,}35$ cycle/u.t.).

a. La courbe « Pc » (bleue) est le spectre continu de la fonction porte (normée par T et non échantillonnée) ; il n'y a qu'un seul maximum absolu pour la fréquence nulle.

b. Les courbes « Ee(+fi) » et « Ee(-fi) » représentent les spectres continus respectifs des exponentielles échantillonnées (violet pour la fréquence positive, jaune pour la négative). Noter la répétition des pics sur les fréquences $\pm fi + kfe$ où $k \in \mathrm{Z}$.

c. Le spectre de la fonction cosinus (au facteur 2 près) est la somme des deux derniers spectres ; il admet deux familles d'axes de symétrie : kfe et $f\mathrm{N} + kfe$. Cette deuxième famille entraîne le « repliement » du spectre ou *aliasing* en anglais.


Spectres continus : fonction « porte » continue (Pc) et exponentielles échantillonnées (Ee)
Pc
Ee(+fi)
Ee(-fi)
fN+k.fe
amplitude normée
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
-0,20
-0,40
-2,50
-2,00
-1,50
-1,00
-0,50
0,00
0,50
1,00
1,50
2,00
2,50
fréquences (cycles/u.t.)

Dans la pratique, l'échantillonnage de la marée (E.45) par la distribution porte normée nous donne la série $h_{\mathrm{T},t_e}(t)$ de M valeurs avec $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$. Sa transformée de Fourier $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu)$, fonction continue de ν, nous est ainsi donné par la série :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) &= \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)h(t)\right] \\ &= \mathrm{TF}\left[h_{\mathrm{T},t_e}(t)\right] = \frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} h(mt_e)e^{-j2\pi\nu m t_e} \qquad \text{(E.50a)}\end{aligned}$$

ou encore par la convolution :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\mathrm{T}}\Pi_{\mathrm{T},t_e}(t)h(t)\right] = \Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu) * \mathrm{F}(\nu)$$

En tenant compte des relations (E.40b) et (E.49) définissant respectivement $\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ et $\mathrm{F}(\nu)$, cette dernière forme de la transformée $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ peut aussi s'exprimer par :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \sum_{i\in\mathrm{N}^*}\left[\eta_i\Lambda^*_{\mathrm{T,M}}(\nu_i - \nu) + \eta_i^*\Lambda_{\mathrm{T,M}}(\nu_i + \nu)\right]. \qquad \text{(E.50b)}$$

Comme toute fonction réelle échantillonnée avec un pas de temps t_e et admettant une transformée, nous avons :

— la périodicité ν_e : $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu + k\nu_e)$ avec $k \in \mathrm{Z}$,

— le caractère hermitien : $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \mathrm{F}^*_{\mathrm{T,M}}(-\nu)$, qui entraîne la symétrie du spectre par rapport aux axes $\nu = k\nu_e$;

— la symétrie du spectre par rapport aux axes $\nu = \nu_{\mathrm{N}} + k\nu_e$ (repliement du spectre, conséquence des deux propriétés précédentes où $\nu_{\mathrm{N}} = \nu_e/2$ est la fréquence de Nyquist) avec la relation :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu_{\mathrm{N}} - \Delta\nu) = \mathrm{F}^*_{\mathrm{T,M}}(\nu_{\mathrm{N}} + \Delta\nu + k\nu_e).$$

Sous réserve d'appliquer le théorème de Shannon, la définition complète du spectre peut s'obtenir dans la fenêtre $(-\nu_{\mathrm{N}}, \nu_{\mathrm{N}})$. Rappelons que la transformée $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ est une fonction continue de la fréquence ν. Il est possible d'établir la transformée de Fourier discrète (TFD) correspondante (ou série de Fourier) en considérant la porte spectrale symétrique $[-\nu_{\mathrm{N}}, \nu_{\mathrm{N}}]$ de largeur ν_e. Elle est représentée par la partie du peigne $\mathrm{X}_{\nu_{\mathrm{T}}}(\nu)$, composée de la suite des M fréquences $\nu_k = k\nu_{\mathrm{T}}$ avec $\nu_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$ et k variant de $-\mathrm{M}/2$ à $(\mathrm{M}/2 - 1)$. Nous avons ainsi les relations entre les différents paramètres : $\mathrm{M} = \mathrm{T}/t_e = \nu_e/\nu_{\mathrm{T}}$ La transformée continue $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu)$ devient la série de

Fourier (ou TFD) : $\delta(\nu - k\nu_{\mathrm{T}}).\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(\nu) = \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(k\nu_{\mathrm{T}})$ qui s'exprime à partir de (E.50a) par :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} h(mt_e) e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{T}} m \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}}}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{m=0}^{m=\mathrm{M}-1} h(mt_e) e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{M}} m}, \quad \text{(E.51)}$$

À partir de (E.50b), il est aussi possible d'obtenir une autre forme de la série. La relation inverse de la TFD donnée par (E.51) donne la série des valeurs $h(mt_e)$; elle s'obtient par :

$$h(mt_e) = \sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) e^{j2\pi \frac{k}{\mathrm{T}} m \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}}}$$
$$= \sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) e^{j2\pi \frac{m}{\mathrm{M}} k}. \quad \text{(E.52a)}$$

En effet, la dernière série de (E.52a) peut s'écrire en tenant compte de (E.51) :

$$\sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) e^{j2\pi \frac{m}{\mathrm{M}} k}$$
$$= \sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \left(\frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\mathrm{M}-1} h(\mu t_e) e^{-j2\pi \frac{k}{\mathrm{M}} \mu} \right) e^{j2\pi \frac{m}{\mathrm{M}} k} \quad \text{(E.52b)}$$

soit encore :

$$\sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) e^{j2\pi \frac{m}{\mathrm{M}} k}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\mathrm{M}-1} h(\mu t_e) \left(\frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} e^{-j2\pi \frac{(\mu-m)}{\mathrm{M}} k} \right) \quad \text{(E.52c)}$$

or la partie entre parenthèses du deuxième membre donne :

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} e^{-j2\pi \frac{(\mu-m)}{\mathrm{M}} k} = \frac{\sin \pi(\mu - m)}{\mathrm{M} \sin\left[\pi(\mu - m)/\mathrm{M}\right]} e^{j\pi(\mu-m)} = \delta(\mu - m).$$

La relation (E.52c) devient alors :

$$\sum_{k=-\mathrm{M}/2}^{k=\mathrm{M}/2-1} \mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}\left(k\nu_{\mathrm{T}}\right) e^{j2\pi\frac{m}{\mathrm{M}}k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\mathrm{M}-1} h(\mu t_e)\delta(\mu - m) = h(mt_e). \quad \text{(E.52d)}$$

Ainsi les M valeurs de la série de Fourier discrète, définie par (E.51), permettent de reconstituer intégralement le signal échantillonné de départ. Il y a équivalence complète entre le signal $h(mt_e)$ avec m variant de 0 à $(\mathrm{M}-1)$ et sa transformée $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(k\nu_{\mathrm{T}})$ avec k variant de $-\mathrm{M}/2$ à $(\mathrm{M}/2-1)$.

En tenant compte du caractère hermitien de la TFD, posons :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(n\nu_{\mathrm{T}}) = \mathrm{F}^*_{\mathrm{T,M}}(-n\nu_{\mathrm{T}}) = \frac{c_n}{2}e^{-j\phi_n,}$$

avec $n \geq 0$ et $c_n \in \mathrm{R}^+$ (ϕ_0 est nul en supposant ici la moyenne du niveau $\mathrm{F}_{\mathrm{T,M}}(0) = c_0/2 \geq 0$). En respectant le théorème de Shannon, à la fréquence de Nyquist $\nu_{\mathrm{N}} = \mathrm{M}\nu_{\mathrm{T}}/2 > 2\nu_{\mathrm{M}}$, la composante correspondante est nulle. Alors la relation (E.52d) donnant $h(mt_e)$ peut encore s'écrire (p.m. $\mathrm{T} = \mathrm{M}t_e$) :

$$h(mt_e) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\mathrm{M}/2-1} c_n \cos(2\pi\frac{n}{\mathrm{T}}mt_e - \phi_n). \quad \text{(E.52e)}$$

Ce dernier résultat est à rapprocher de la fonction périodique (E.28d). Par ailleurs, sous réserve que plusieurs conditions soient satisfaites, en particulier :

— respect du théorème d'échantillonnage ;

— T, multiple d'une période d'une composante i du signal ($\nu_i = n_i/\mathrm{T}$) ;

— écarts des fréquences $(\nu_i - \nu_{i-1})$ et $(\nu_{i+1} - \nu_i)$ supérieurs à $\nu_{\mathrm{T}} = 1/\mathrm{T}$ (critère de Rayleigh ; alors, des relations (E.45) et (E.52e), on déduit les caractéristiques de la composante i :

$$\nu_i = n_i\nu_{\mathrm{T}} \Rightarrow a_i = c_{n_i}$$

et

$$\varphi_i = \phi_{n_i}.$$

Si les deux dernières conditions ne sont pas remplies, la valeur du terme c_n représente alors une combinaison linéaire de plusieurs composantes, chacune étant pondérée par un coefficient fonction de l'écart $|\nu_i - \nu_n|$.

Pour optimiser le temps de calcul des TFD, Cooley et Tuckey ont mis au point le premier algorithme perfectionné (dit FFT en anglais, pour « *Fast Fourier Transform* ») en exploitant les symétries existant dans les séries exponentielles complexes. Bien qu'elles soient appelées improprement « Transformées de Fourier Rapides (TFR) », la théorie des distributions démontre que

ce sont de vraies transformées. Les appellations TFR ou FFT sont devenues actuellement plus courantes que TFD ou série de Fourier discrètes. Les algorithmes de calcul sont d'autant plus efficaces que la puissance des facteurs premiers, issus de la valeur M (nombre d'échantillons), est grande. L'efficacité maximale est obtenue quand le nombre M est égal à une puissance de 2.

6 • Composantes séparées selon la durée

À titre d'exemple d'application de l'analyse harmonique, objet du chapitre VI, les deux listes ci-dessous ont été établies à partir d'observations de marée de type semi-diurne. Ces listes montrent l'influence de la durée des mesures (le mois et l'année) sur la finesse de l'analyse pour séparer les composantes voisines au sein de chaque espèce. Pour une durée d'observation déterminée, chaque ligne est relative à une composante de marée (qui peut être séparée sur cette durée) avec son nom et son argument littéral étendu (7 lettres), ainsi que les éléments nécessaires au calcul des perturbations dues aux composantes qui ne peuvent être séparées. Ces éléments sont, pour chacune de ces dernières composantes, l'argument littéral étendu et l'amplitude, exprimée en millième de l'amplitude de la composante principale. Pour d'autres types de marée, il convient de procéder à quelques modifications afin de tenir compte des interactions non linéaires qui font intervenir de manière plus importante certaines composantes diurnes. Il est utile alors de se reporter au développement du potentiel et à la liste des ondes composées, présentés dans l'annexe D. En prenant en compte toutes les espèces jusqu'aux douzièmes diurnes, l'examen des deux listes montre qu'avec une année d'observation, on peut séparer près de 350 composantes et qu'avec un mois, il n'est possible d'en identifier qu'une centaine.

6.1 • Période d'observation : le mois

```
Niv Moy   ZZZZZZZ
Mm        ZAZYZZZ ZAXAZZZ 191 ZAZYAZB  65 ZAZAZZB  53 ZAZAAZB  22 ZABYZZB 15
Mf        ZBZZZZZ ZBZZAZZ 414 ZBXZZZZ  88 ZBZXZZZ  43 ZBZZBZZ  38
Mfm       ZCZYZZZ ZCZYAZZ 416 ZCXAZZZ 188 ZCXAAZZ  74 ZCZYBZZ  40
MSqm      ZDXZZZZ ZDXZAZZ 417

         AVBAZZY AVZCZZY 393 AVDYZZY 179
SIGMA1    AWBZZZY AWZBZZY 826 AWBZYZY 191 AWZBYZY 157 AWCZZYY  70
Q1        AXZAZZY AXBYZZY 190 AXZAYZY 188 AXBYYZY  36 AXBAZZA  11 AXAAZYY  10
O1        AYZZZZY AYZZYZY 189 AYBZZZA  13 AYZBZZA   6 AYZZXZA   6 AYYZZAA   3
M1        AZZAZZA AZZYZZA 361 AZZAAZA 199 AZBYZZA 193 AZXAZZA  95 AZZYYZA  68
K1        AAZZZZA AAXZZZY 331 AAZZAZA 136 AAZZYZY  20 AAWZZAY  19 AABZZZA  14
J1        ABZYZZA ABZYAZA 199 ABXAZZA 193 ABXAAZA  37 ABZYYZY  30
OO1       ACZZZZA ACZZAZA 636 ACXZZZA 302 ACZXZZA 148 ACZZBZA 136 ACXZAZA  62
```

```
KQ1       ADZYZZA ADXYZZA 400 ADXAZZA 300

2MN2S2    BUDAZZZ
2NS2      BVBBZZZ BVDZZZZ 636 BVBZZZZ 545
MNS2      BWBAZZZ BWZAZZZ 537 BWZCZZZ 388 BWDYZZZ 194 BWBAYZZ 134 BWCAZYZ  75
MU2 2MS2  BXBZZZZ BXZBZZZ 830 BXZZZZZ 235 BXXZZZZ 108 BXCZZYZ  69 BXBZYZB  36
N2        BYZAZZZ BYBYZZZ 190 BYZAYZB  37 BYAAZYZ   9 BYCYZYZ   9 BYBYYZB   7
M2        BZZZZZZ BZZZYZB  37 BZXZZZZ   4 BZYZZAB   3 BZAZZYZ   3 BZXBZZB   3
L2 2MN2   BAZYZZB BAXAZZB 262 BAZAZZZ 250 BAZAAZZ 109 BABYZZZ  47 BAZYYZZ  35
S2        BBXZZZZ BBZZZZZ 272 BBZZAZZ  81 BBWZZAZ  58 BBYZZYB  10 BBZZBZZ   9
MSN2      BCXYZZZ BCZYZZZ 557 BCZYAZZ 243 BCXAZZZ 104
2SM2      BDVZZZZ BDXZZZZ 810 BDXZAZZ 246 BDZZZZZ 204 BDZZAZZ 141 BDUZZZA 120
SKN2      BEXYZZZ
3SK2M2    BFVZZZZ

          CVBAZZY CVZCZZY 545
          CWZBZZY CWBZZZY 853 CWZBYZY 147
 MQ3      CXZAZZY CXBYZZY 185 CXZAYZY 149
 2MK3     CYZZZZY CYZZYZY 149 CYBZZZA  56 CYZBZZA  51 CYZAZZB  18 CYXBZZY  15
 M3       CZZZZZZ CZZZYZB  56
 MK3      CAZZZZA CAXZZZY 725 CAZZAZA 119 CAZZYZY  81 CAWZZAY  40 CABZZZA  19
 2MQ3     CBZYZZA CBXAZZA 939 CBZAZZA 636 CBXYZZA 606 CBZZZZB 394 CBZAAZA 364
 SK3      CCXZZZA CCZZZZA 376 CCVZZZZ 331 CCZZAZA 170 CCXZAZA 121 CCWZZZB  62
          CDXYZZA CDZYZZA 741 CDZYAZA 407
2SO3      CEVZZZA

          DVBBZZZ DVDZZZZ 429
2MNS4     DWBAZZZ DWZCZZZ 536 DWDYZZZ 179
N4        DXZBZZZ DXBZZZZ 872
MN4       DYZAZZZ DYBYZZZ 186 DYZAYZB  73
M4        DZZZZZZ DZZZYZB  74 DZXBZZZ  15 DZBZZZZ  11 DZAZZYZ   8
SN4       DAXAZZZ DAZAZZZ 379 DAZYZZB 137 DAZAAZZ 124
MS4       DBXZZZZ DBZZZZZ 273 DBZZAZZ  81 DBWZZAZ  55 DBXZYZB  34 DBZZYZB  13
2MSN4     DCXYZZB DCZYZZB 308
S4        DDVZZZZ DDXZZZZ 555 DDXZAZZ 166 DDUZZAZ 118 DDZZZZZ  95 DDZZAZZ  62

          EVBAZZY EVZCZZY 633
          EWZBZZY EWBZZZY 708 EWZBYZY 117
 2MQ5     EXZAZZY EXBYZZY 181 EXZAYZY 114
 4MK5     EYZZZZY EYZBZZA 123 EYZZYZY 110 EYXBZZY  99 EYBZZZA  97 EYAZZYY  13
          EZXAZZY EZZAZZA 997
 2MP5     EAXZZZY EAZZZZA 848 EAZZYZY 124 EAZZAZA  84 EAWZZAY  53 EABZZZA  30
          EBXAZZA EBZAZZA 457 EBVAZZY 399 EBZAAZA 218 EBXYZZA 213 EBZYZZA 202
 2SK5     ECXZZZA ECVZZZY 601 ECZZZZA 369 ECZZAZA 161 ECXZAZA  98
          EEVZZZA EEXZZZA 790 EETZZZY 398 EDZYZZA 155 EDXYZZA 133 EDZYAZA  88

2(MN)S6   FVBBZZZ FVDZZZZ 438
3MNS6     FWBAZZZ FWZCZZZ 667 FWDYZZZ 188
2NM6      FXZBZZZ FXBZZZZ 703 FXBZYZB  80 FXCZZYZ  51
2MN6      FYZAZZZ FYBYZZZ 181 FYZAYZB 109 FYBAZZZ  23
M6        FZZZZZZ FZZZYZB 108 FZXBZZZ  98 FZBZZZZ  33 FZBZAZZ   7
MSN6      FAXAZZZ FAZAZZZ 326 FABYZZZ  63 FAWAZAZ  49 FAZYZZZ  30 FAZYYZZ   3
2MS6      FBXZZZZ FBZZZZZ 277 FBZZAZZ  83 FBXZYZB  72 FBWZZAZ  52 FBBZZZZ   4
2SN6      FCVAZZB FCXAZZZ 838 FCXYZZB 527 FCZYZZB 162 FCZYAZB  68 FCWYZAB  14
2SM6      FDVZZZZ FDXZZZZ 549 FDXZAZZ 166 FDUZZAZ 113 FDZZZZZ  85 FDZZAZZ  52
2(MS)N6   FEVYZZB FEXYZZZ 667 FEUYZAB 167

          GVBAZZY GVZCZZY 794 GVDYZZY 176
          GWZBZZY GWBZZZY 622 GWZBYZY  76 GWCZZYY  43
 3MQ7     GXZAZZY GXBYZZY 173 GXZAYZY  75 GXAAZYY  20
```

```
 5MK7      GYZZZZY GYXBZZY 272 GYZBZZA 202 GYBZZZA 139 GYZZYZY  72 GYAZZYY  22
           GZXAZZY GZZAZZA 641 GZZYZZY  80
           GAXZZZY GAZZZZA 591 GAZZYZY 128 GAWZZAY  51 GAZZAZA  45 GABZZZA  42
           GBXAZZA GBVAZZY 741 GBZAZZA 436 GBZYZZA 152 GBXYZZA 101 GBZYAZA  18
 3SK7      GCXZZZA GCVZZZY 894 GCZZZZA 388 GCZZAZA 162 GCXZAZA  77
           GDXYZZA GDZYAZA 737
           GEVZZZA GEXZZZA 775 GETZZZY 604

           HVBBZZZ
2MNS8      HWBAZZZ
2(MN)8     HXZBZZZ HXBZZZZ 610 HXBZYZB  86
3MN8       HYZAZZZ HYBYZZZ 172 HYZAYZB 142
M8         HZZZZZZ HZXBZZZ 272 HZZZYZB 141 HZBZZZZ  67 HZAZZYZ  22 HZBZAZZ  18
2MSN8      HAXAZZZ HAZAZZZ 314 HAZYZZZ  80 HABYZZZ  59
3MS8       HBXZZZZ HBZZZZZ 290 HBXZYZB 108 HBZZAZZ  86 HBWZZAZ  51 HBVBZZZ  43
2SMN8      HCVAZZZ HCXAZZZ 667 HCXYZZB 142 HCZYZZZ  96
2(MS)8     HDVZZZZ HDXZZZZ 551 HDXZAZZ 167 HDZZZZZ  86 HDUZZAZ  59
3M2SN8     HEXYZZZ
3SM8       HFTZZZZ HFVZZZZ 272 HFVZAZZ  80 HFTZYZB  38

           JVBBZZZ
5MNS10     JWBAZZZ
3M2N10     JXZBZZZ JXBZZZZ 531 JXZBYZB 177
4MN10      JYZAZZZ JYBYZZZ 169
M10        JZZZZZZ JZZZYZB 174 JZBZZZZ 110 JZAZZYZ  31 JZBZAZZ  29 JZXZZZB   7
3MSN10     JAXAZZZ JAZAZZZ 319 JAZYZZB 106 JABYZZZ  60
4MS10      JBXZZZZ JBZZZZZ 311 JBXZYZB 142 JBVBZZZ 136 JBZZYZB  47 JBBZZZZ  14
2(MS)N10   JCVAZZZ JCXAZZZ 624 JCZYZZZ  88 JCXYZZB  36
3M2S10     JDVZZZZ JDXZZZZ 560 JDXZAZZ 169 JDZZZZZ  90
           JEVAZZZ JETAZZZ 964 JEVYZZB 326 JEXYZZZ  94
3S2M10     JFTZZZZ JFVZZZZ 830 JFVZAZZ 250 JFTZYZB  67

           LVBBZZZ LVDZZZZ 323
 4MNS12    LWBAZZZ LWDYZZZ 149
 4M2N12    LXZBZZZ LXBZZZZ 493 LXZBYZX 208 LXBZYZX  97 LXCZZYZ  40
 5MN12     LYZAZZZ LYXCZZZ 293 LYZAYZX 209 LYBYZZZ 159 LYAAZYZ  40 LYBYYZX  34
 M12       LZZZZZZ LZXBZZZ 857 LZZZYZX 204 LZBZZZZ 166 LZZBAZZ  91 LZBZAZZ  46
 4MSN12    LAXAZZB LAZAZZZ 336 LAZYZZB 115 LAZAAZZ 101 LABYZZZ  59 LAWAZAZ  46
 5MS12     LBXZZZZ LBZZZZZ 344 LBVBZZZ 302 LBXZYZX 177 LBZZAZZ 103 LBZZYZX  64
 3M2SN12   LCVAZZZ LCXAZZZ 609 LCZYZZZ  87 LCZYAZZ  28
 4M2S12    LDVZZZZ LDXZZZZ 575 LDXZAZZ 174 LDVZYZX 142 LDUZZAZ 109 LDZZZZZ 100
```

6.2 • Période d'observation : l'année

```
Niv Moy    ZZZZZZZ
Sa         ZZAZZZY
Ssa        ZZBZZZZ ZZBZAZB  25
Sta        ZZCZZYY
MSm        ZAXAZZZ ZAXAYZB  76 ZAXAAZB  63
Mm         ZAZYZZZ ZAZYAZB  65 ZAZAZZB  53 ZAZAAZB  22
           ZABYZZB
Msf        ZBXZZZZ
Mf         ZBZZZZZ ZBZZAZZ 414 ZBZXZZZ  43 ZBZZBZZ  38
MStm       ZCXAZZZ ZCXAAZZ 393
Mfm        ZCZYZZZ ZCZYAZZ 416 ZCZYBZZ  40
MSqm       ZDXZZZZ ZDXZAZZ 417

           AVZCZZY
```

```
          AVBAZZY AVBAYZY 179
          AVDYZZY
2Q1       AWZBZZY AWZBYZY 189
SIGMA1    AWBZZZY AWBZYZY 191
          AWCZZYY
          AWDZZZY
          AXXAZZY
Q1        AXZAZZY AXZAYZY 188
RHO1      AXBYZZY AXBYYZY 190 AXBAZZA  58 AXAAZYY  51
          AXCYZYY
          AXDYZZY
          AYXBZZA
          AYYZZAA
O1        AYZZZZY AYZZYZY 189 AYZBZZA   6 AYZZXZA   6
          AYAZZYY
MP1       AYBZZZA AYBZAZY 224
          AYCZZZY
          AZXAZZA AZXAYZA 214
M1        AZZAZZA AZZYZZA 361 AZZAAZA 199 AZZYYZA  68 AZZAYZY  37
          AZBYZZA AZBYAZA 228
PI1       AAWZZAY
P1        AAXZZZY AAXZYZA  11
S1        AAYZZZA
K1        AAZZZZA AAZZAZA 136 AAZZYZY  20 AAZZBZY   3
PSI1      AAAZZYA
PHI1      AABZZZA
THETA1    ABXAZZA ABXAAZA 193
J1        ABZYZZA ABZYAZA 199 ABZYYZY  30
          ACWZZZA
SO1       ACXZZZA ACXZAZA 204
OO1       ACZZZZA ACZZAZA 636 ACZXZZA 148 ACZZBZA 136
          ADXYZZA ADXAZZA 750
KQ1       ADZYZZA

2MN2S2    BUDAZZZ
2NS2      BVBBZZZ BVBZZZZ 545
3M2S2     BVDZZZZ
OQ2       BWZAZZZ BWZCZZZ 722 BWZAYZZ 250
MNS2      BWBAZZZ BWBAYZZ 134
          BWCAZYZ
MNUS2     BWDYZZZ
2MS2K2    BXXZZZZ
2N2       BXZBZZZ BXZZZZZ 283 BXZBYZB  39
MU2 2MS2  BXBZZZZ BXBZYZB  36
          BXCZZYZ
          BYXCZZB
          BYYAZAB BYZYXZB 467
N2        BYZAZZZ BYZAYZB  37
          BYAAZYZ BYBYYZB 750 BYAZZZB 625
NU2       BYBYZZZ
          BYCYZYZ
2KN2S2    BYDAZZZ
MSK2      BZXZZZZ BZXBZZB 818
M(SK)2    BZYZZAB
M2        BZZZZZZ BZZZYZB  37
M(KS)2    BZAZZYZ
MKS2      BZBZZZZ
2SM2K2    BZDZZZZ
LAMBDA2   BAXAZZB
2SN(MK)2  BAVAZZZ
```

```
L2 2MN2   BAZYZZB BAZAZZZ 250 BAZAAZZ 109 BAZYYZZ  35
          BABYZZZ
2SK2      BBVZZZZ
T2        BBWZZAZ
S2        BBXZZZZ BBXZAZZ   7 BBXZYZZ   2
R2        BBYZZYB
K2        BBZZZZZ BBZZAZZ 298 BBZZBZZ  32 BBZZYZB  13
          BBAZZYZ
          BBBZZZZ
MSnu2     BCVAZZZ
MSN2      BCXYZZZ BCXAZZZ 104
KJ2       BCZYZZZ BCZYAZZ 438
2KM(SN)2  BCBYZZZ
          BDUZZZA
2SM2      BDVZZZZ
          BDWZZZA
SKM2      BDXZZZZ BDXZAZZ 304 BDXXZZZ 122
          BDZZZZZ BDZZAZZ 690 BDZZBZZ 276
2SNU2     BETAZZZ
2SN2      BEVYZZZ
SKN2      BEXYZZZ
3S2M2     BFTZZZZ
3SK2M2    BFVZZZZ

          CVZCZZY
          CVBAZZY
          CWZBZZY CWZBYZY 147
          CWBZZZY
 MQ3      CXZAZZY CXZAYZY 149
          CXBYZZY
          CYXBZZY
 2MK3     CYZZZZY CYZZYZY 149 CYZBZZA  51 CYZAZZB  18
 2MS3     CYAZZZB
 2MP3     CYBZZZA
          CZXAZZA
 M3       CZZZZZZ CZZZYZB  56
          CZBYZZZ
          CAWZZAY
 SO3      CAXZZZY
 MS3      CAYZZZB
 MK3      CAZZZZA CAZZAZA 119 CAZZYZY  81
          CAAZZYA
          CABZZZA
          CBXAZZA CBXYZZA 645
 2MQ3     CBZYZZA CBZAZZA 636 CBZZZZB 394 CBZAAZA 364
 SP3      CCVZZZZ
 S3       CCWZZZB
 SK3      CCXZZZA CCXZAZA 121
 K3       CCZZZZA CCZZAZA 452
          CDXYZZA
          CDZYZZA CDZYAZA 550
2SO3      CEVZZZA

          DVBBZZZ
4M2S4     DVDZZZZ
          DWZCZZZ
2MNS4     DWBAZZZ
2MnuS4    DWDYZZZ
N4        DXZBZZZ
3MS4      DXBZZZZ
```

```
MN4       DYZAZZZ DYZAYZB  73
Mnu4      DYBYZZZ
          DZXBZZZ
MA4       DZYZZZZ
M4        DZZZZZZ DZZZYZB  74
2MRS4     DZAZZYZ
2MKS4     DZBZZZZ
SN4       DAXAZZZ
NK4       DAZAZZZ DAZYZZB 361 DAZAAZZ 328
MT4       DBWZZAZ
MS4       DBXZZZZ DBXZYZB  34
MK4       DBZZZZZ DBZZAZZ 295 DBZZYZB  48
2SNM4     DCVAZZB
2MSN4     DCXYZZB
2MKN4     DCZYZZB
ST4       DDUZZAZ
S4        DDVZZZZ
SK4       DDXZZZZ DDXZAZZ 299
          DDZZZZZ DDZZAZZ 650

          EVZCZZY
          EVBAZZY
          EWZBZZY EWZBYZY 117
          EWBZZZY
 2MQ5     EXZAZZY EXZAYZY 114
          EXBYZZY
          EYXBZZY
 4MK5     EYZZZZY EYZBZZA 123 EYZZYZY 110
          EYAZZYY
 4MP5     EYBZZZA
          EZXAZZY
          EZZAZZA
          EAWZZAY
 2MP5     EAXZZZY
 2MK5     EAZZZZA EAZZYZY 146 EAZZAZA  99
          EAAZZYA
          EABZZZA
          EBVAZZY
          EBXAZZA EBXYZZA 213
          EBZAZZA EBZAAZA 477 EBZYZZA 442
          ECVZZZY
 2SK5     ECXZZZA ECXZAZA  98
          ECZZZZA ECZZAZA 435
          EDXYZZA
          EDZYZZA EDZYAZA 571
          EETZZZY
          EEVZZZA
          EEXZZZA

2(MN)K6   FVZBZZZ
2(MN)S6   FVBBZZZ
          FVDZZZZ
          FWZCZZZ
3MNS6     FWBAZZZ
3MnuS6    FWDYZZZ
2NM6      FXZBZZZ
4MS6      FXBZZZZ FXBZYZB 113
          FXCZZYZ
2MSNK6    FYXAZZA
2MN6      FYZAZZZ FYZAYZB 109
```

```
2Mnu6     FYBYZZZ FYBAZZZ 128
          FZXBZZZ
MA6       FZYZZZZ
M6        FZZZZZZ FZZZYZB 108
3MKS6     FZBZZZZ FZBZAZZ 200
MTN6      FAWAZAZ
MSN6      FAXAZZZ
MNK6      FAZAZZZ FAZYZZZ  92 FAZYYZZ   8
MKnu6     FABYZZZ
          FBVBZZB
2MT6      FBWZZAZ
2MS6      FBXZZZZ FBXZYZB  72
2MK6      FBZZZZZ FBZZAZZ 300
          FBBZZZZ
2SN6      FCVAZZB
3MTN6     FCWYZAB
SNK6      FCXAZZZ FCXYZZB 629
3MKN6     FCZYZZB FCZYAZB 417
MST6      FDUZZAZ
2SM6      FDVZZZZ
          FDWZZZA
MSK6      FDXZZZZ FDXZAZZ 302
          FDZZZZZ FDZZAZZ 615
2MSTN6    FEUYZAB
2(MS)N6   FEVYZZB
2MSKN6    FEXYZZZ

          GVZCZZY
          GVBAZZY
          GVDYZZY
          GWZBZZY GWZBYZY  76
          GWBZZZY
          GWCZZYY
 3MQ7     GXZAZZY GXZAYZY  75
          GXAAZYY
          GXBYZZY
          GYXBZZY
 5MK7     GYZZZZY GYZBZZA 202 GYZZYZY  72
          GYAZZYY
          GYBZZZA
          GZXAZZY
          GZZAZZA GZZYZZY 125
          GAWZZAY
          GAXZZZY
 3MS7     GAYZZZB
 3MK7     GAZZZZA GAZZYZY 217 GAZZAZA  76
          GAAZZYA
          GABZZZA
          GBVAZZY
          GBXAZZA GBXYZZA 101
          GBZAZZA GBZYZZA 350 GBZYAZA  42
          GCVZZZY
 3SK7     GCXZZZA GCXZAZA  77
          GCZZZZA GCZZAZA 418
          GDXYZZA
          GDZYAZA
          GETZZZY
          GEVZZZA
          GEXZZZA
```

```
          HVBBZZZ
2MNS8     HWBAZZZ
5MK8      HXZZZZZ
          HXBZYZB
2(MN)8    HXZBZZZ
5MS8      HXBZZZZ
3MSNK8    HYXAZZB
3MN8      HYZAZZZ HYZAYZB 142
3Mnu8     HYBYZZZ
          HZXBZZZ
M8        HZZZZZZ HZZZYZB 141
          HZAZZYZ
4MKS8     HZBZZZZ HZBZAZZ 262
2MSN8     HAXAZZZ
2MNK8     HAZAZZZ HAZYZZZ 256
          HABYZZZ
          HBVBZZZ
3MT8      HBWZZAZ
3MS8      HBXZZZZ HBXZYZB 108
3MK8      HBZZZZZ HBZZAZZ 297 HBZZYZB 121
          HBBZZZZ
2SMN8     HCVAZZZ
          HCXAZZZ HCXYZZB 213
4MSN8     HCZYZZZ
2MST8     HDUZZAZ
2(MS)8    HDVZZZZ
2MSK8     HDXZZZZ HDXZAZZ 303
          HDZZZZZ
3SN8      HETAZZZ
          HEVAZZZ
3M2SN8    HEXYZZZ
3SM8      HFTZZZZ HFTZYZB  38
2SMK8     HFVZZZZ HFVZAZZ 296

          JVBBZZZ
5MNS10    JWBAZZZ
3M2N10    JXZBZZZ JXZBYZB 177
6MS10     JXBZZZZ
4MN10     JYZAZZZ
4Mnu10    JYBYZZZ
5MSK10    JZXZZZB
M10       JZZZZZZ JZZZYZB 174
          JZAZZYZ
          JZBZZZZ JZBZAZZ 262
3MSN10    JAXAZZZ
3MNK10    JAZAZZZ JAZYZZB 332
          JABYZZZ
          JBVBZZZ
4MS10     JBXZZZZ JBXZYZB 142
4MK10     JBZZZZZ JBZZYZB 151
          JBBZZZZ
2(MS)N10  JCVAZZZ
          JCXAZZZ JCXYZZB  57
5MSN10    JCZYZZZ
3M2S10    JDVZZZZ
3MSK10    JDXZZZZ JDXZAZZ 302
          JDZZZZZ
3SMN10    JETAZZZ
          JEVAZZZ JEVYZZB 326
4M2SN10   JEXYZZZ
```

```
3S2M10    JFTZZZZ JFTZYZB  67
2(MS)K10  JFVZZZZ JFVZAZZ 301

          LVBBZZZ
          LVDZZZZ
          LWZCZZZ
 4MNS12   LWBAZZZ
          LWDYZZZ
 4M2N12   LXZBZZZ LXZBYZX 208
 4M2N12   LXBZZZZ LXBZYZX 197
          LXCZZYZ
          LYXCZZZ
 5MN12    LYZAZZZ LYZAYZX 209
          LYAAZYZ LYBYYZX 857
 5Mnu12   LYBYZZZ
          LZXBZZZ
 M12      LZZZZZZ LZZZYZX 204 LZZBAZZ  91 LZZZXZZ  17
          LZAZZYZ
          LZBZZZZ LZBZAZZ 279
          LAWAZAZ
 4MSN12   LAXAZZB
          LAYYZAZ
 4MNK12   LAZAZZZ LAZYZZB 342 LAZAAZZ 302 LAZYYZX  50
          LABYZZZ
          LBVBZZZ
 5MT12    LBWZZAZ
 5MS12    LBXZZZZ LBXZYZX 177
 5MK12    LBZZZZZ LBZZAZZ 300 LBZZYZX 186 LBZZBZZ  36
          LBAZZYZ
          LBBZZZZ
 3M2SN12  LCVAZZZ
          LCXAZZZ LCXYZZZ  46
 5MSN12   LCZYZZZ LCZYAZZ 323
          LDTBZZZ
 4MST12   LDUZZAZ
 4M2S12   LDVZZZZ LDVZYZX 142
 4MSK12   LDXZZZZ LDXZAZZ 303 LDXZYZX 158 LDXZBZZ  31
          LDYZZYZ
          LDZZZZZ
3(MS)12   LFTZZZZ LFTZYZX 105
```

Bibliographie

Accad Y. & Pekeris C.L. — The K_2 tide in ocean bounded by meridians and parallels. *Proc. R. Soc.* London, A, 278, 110-128, 1964.

Accad Y. & Pekeris C.L. — Solution of Laplace's equations for M_2 and S_2 in the World Ocean from a knowledge of the tidal potential alone. *Phil. Trans. R. Soc.* London, 290, 235-266, 1978.

Andersen O.B. Woodworth P.L. and Flather R.A. — Intercomparison of recent ocean tide models. *J. Geophys. Res.,* 100, (C12), 25, 261-282, 1995.

Association d'océanographie physique (IAPO-IUGG). — Pub. Scientifique n° 15 : bibliographie sur les marées, 1665-1939, Bergen, 1955.

Brown E.W. — *An Introductory Treatise on Lunar Theory*. Cambridge Univ. Press, XVI, 1896.

Cartwright D.E. — Tides, A Scientific History, Cambridge University Press, 1999.

Cassini J. — Articles sur le flux et le reflux dans différents ports, *Mém. Acad. Roy. des Sciences,* 1710-1714 et 1720.

Chabert-d'Hières G. & Le Provost C. — Détermination des caractéristiques d'ondes de marée dans la Manche sur modèle réduit hydraulique. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 270, 1703-1706, 1970.

Chandler S.C. — On the variation of latitude. *Astron. J.,* 277, 97-101, 1892,

Courtier M.A. — *Données numériques concernant les marées des côtes de France,* Service Hydrographique de la Marine, Paris, imprimerie nationale, 1934.

Chazallon. — *Annuaire des marées des côtes de France.* Dépôt des Cartes et Plans, Paris 1839.

Darwin G.H. — On the dynamic theory of tides of long period, *Proc. R. Soc.* London, 41, 337-342, 1886.

Darwin G.H. — *The harmonic analysis of tidal observations*, Scientific papers, 1, 1-70, Cambridge Univ. Press, 463 pp., 1907.

Darwin G.H. — *The tides and Kindered Phenomena in the Solar System,* 3rd edition, Murray, London, 437 pp.,1911.

Descartes, R. — *Pincipes de la philosophie,* (1647) œuvres, ed. V. Cousin, 3, 371-377, 1824.

Desnoës Y. — Le bruit dans l'analyse de marée *Annales hydrographiques* 5e série, vol. 5, fasc. 2 - 1977 no 747 Service hydrographique et océanographique de la Marine, Paris.

Doodson A.T. — Harmonic development of the tide-generating potential. *Proc.R. Soc.* London A, 100, 305-329, 1921, republié en 1954 (avec quelques corrections) dans la *Revue hydrographique internationale*.

Doodson A.T. — The analysis of high and low water. *Revue hydrographique internationale,* 28, 13-77, 1951.

Dronkers J.J. — *Tidal computations in rivers and costal waters,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964.

Duhem Pierre. — *Le Système du Monde - (Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic).* Paris 1913-1917, vol. 2, ch.13 sec. 14 : La théorie des marées selon les Arabes-Abou Masar ; vol. 3, ch.3, sec.10/ La théorie es marées au xiie siècle …, Giraud de Barri.

Franco A.S. & Harari J. — Tidal analysis of long series, *International Hydrographic review,* Monaco LXV (1), 1988.

Georges K. et Simon B. — La méthode de concordances par espèce de prédiction de la marée dans les estuaires. *Revue hydrographique internationale*, 61(1), Monaco, janvier 1984.

Godin G. — The analysis of tides and currents (review). *Tidal Hydrodynamics,* Parker ed. Washington D.D., 1991.

Gonella J. — A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series. *Deep-Sea Research,* Vol. 19, pp 833-846, 1972.

Halley, E. — The true theory of tides, extracted from that admired treatise of Mr Isaac Newton ,*Phil. Trans. R. Soc.* London 19, 445-457, 1696.

Hansen W. — *The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical numerical methods.* Mitteilung Inst. Meereskünde, Univ. Hamburg, Pub. N° 5 1-57, 1966.

Harris, R.A. — *Manual of Tides*, Book 1, Gov. Printing Office, Washington D.C, 1897.

Intergovernmental Oceanographic Commission. — Manuals and guides 14 – *Manual on sea-level measurements and interpretation,* Volumes I, II and III – Unesco, 2002.

Intergovernmental Oceanographic Commission. — Global Sea Level Observing System (GLOSS) Implementation Plan 1997, *Intergovernmental Oceanographic Commission Technical Series* N° 50, 1997.

Kepler, Johanes. — *De fundamentalis astrologiae certioribus*, Prague, Boemorum 1602.

Lalande. — *Astronomie*, (4 volumes) *Traité du flux et du reflux de la mer* dans le volume 4, 1-348, 1781.

Lambeck K., Cazenave A. & Balmino G. — Solid earth and ocean tides estimates from satellite orbit analyses. *Rev. Geophys. and Space Phys.,* 12, (3), 421-434, 1974.

Landau et Lifchitz. — *Mécanique*, Ed. Mir, Moscou 1966.

Laplace, P.S. — Mémoire sur le flux et le reflux de la mer, *Mém. de l'Acad. des Sciences*, 45-181, 1790.

Laplace, P.S. — *Traité de mécanique céleste*, 2, Livre 4, 1799 et 5 Livre 13, 1825.

Lennon G.W. — A critical examination of the conventional tide gauge, Actes du symposium sur les marées organise par le Bureau Hydrographique International, Monaco 28-29 avril 1967.

Le Provost C., Genco M.L., Lyard F. & Canceil P. — Spectroscopy of the world ocean tides from a finite element hydrodynamic model. *J. Geophys Res.,* 99, (C12), 24, 777-797, 1994.

Lubbock J.W. — On the tides. *Phil. Trans. R. Soc.* London, 127, 97-104, 1837.

Mazzega P. — The M_2 Ocean tide recovered from Seasat altimetry in the Indian Ocean. *Nature*, 302, 514-516, 1983.

Munk W.H. & MacDonald G.J.F. — *The rotation of the earth - a geophisical discussion.* Cambridge Univ. Press, 323 pp., 1960.

Newton, Sir I. — *Principia,* (1687), Univ. California Press, Berkeley, 1962.

Parke M.E. and Hendershott M.C. — M_2, S_2, K_1 models of the global ocean tide on an elastic earth. *Marine Geodesy*, 3, 379-408, 1981.

Parker B.B. — The relative importance of the various nonlinear mechanisms in a wide range of tidal interactions (review). *Tidal Hydrodynamics*, Parker ed. Washington D.D., 1991.

Patullo J.G., Munk W., Revelle R. & Strong E. — The seasonal oscillation in sea level. *J. Marine Res.,* 14, 88-156, 1955.

Pekeris C.L. & Accad Y. — Solution of the Laplace's equation for the M_2 tide in the world ocean. *Phil. Trans. R. Soc.* London, A, 265, 413-426, 1969.

Marchuk, GI and Kagan. — *Dynamics of Ocean Tides.* Kluwer Acad. Pub. Dordrecht, 327 pp., 1989.

Mink W.H. and Cartwright D.E. — Tidal spectroscopy and prediction. *Phil. Trans. R. Soc.* London, A, 259, 533-581, 1966.

Poincaré, H. — *Leçons de mécanique céleste*, Tome III *Théorie des marées*, Gauthier-Villar, Paris, pp. 469, 1910.

Proudman J. — On the dynamic equations of the tides, Parts 1-3, *Proc. London Math. Soc.,* 18, 1-68, 1917.

Rossiter J.R. — On the application of relaxation method to oceanic tides. *Proc. R. Soc.* London, A, 348, 482-498, 1958.

Schuremann P. — *Manual of harmonic analysis and prediction of tides* USCGS Special Pub. N° 98, Washington D.C. 1940.

Schwiderski E.W. — Ocean tides; 1- Global ocean tide equations; 2- A hydrodynamic interpolation model. *Marine Geodesy*, 3, 161-217 and 219-255, 1980.

Schwiderski E.W. — *Atlas of ocean tidal charts and maps;* Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia 1983.

Simon B. — Calcul de la marée au large pour la correction des sondages, *Revue hydrographique internationale* 51(2), juillet 1990.

Simon B. — The species concordance method of tide prediction. *Tidal Hydrodynamics*, Parker ed. Washington D.C. 1991.

Thomson, W. — On gravitational oscillations of rotating water, *Proc. R. Soc.* Edimburgh, 10, 92-100, 1879.

Thomson, Sir W. — The tide gauge, tidal harmonic analyser and tide predictor, *Proc. Civil Engineers,* London, 65, 4-74, 1881.

Wallis J. — Hypoyhesis on the fux and refux of the sea, *Phil. Trans. R. Soc.* London,1 263-289, 297-298, 1966.

Woodworth P.L. & Cartwright D. — Extraction of the M_2 ocean tide from Seasat altimeter data. *Geophys. J. Res. Astr. Soc.*, 84, 227-255, 1986.

Wunsch C. — The long-period tides. *Rev. Geophys.*, 5, (4), 447-475, 1967.

Zetler B., Cartwright D. and Berkman S. — Some comparisons of Response and Harmonic tide predictions. *Revue hydrographique internationale*, 56, (2), 105-115, 1979.

Glossaire

Admittance : réponse, fonction de la fréquence, de l'océan à l'action de la force génératrice.

Âge de la marée : Intervalle de temps entre la syzygie et le maximum de marnage qui suit.

Altimérie : mesure de la hauteur d'eau à l'aide de techniques spatiales.

Amplitude : Différence entre la hauteur d'une pleine mer ou d'une basse mer et le niveau moyen. Ce terme est souvent utilisé à tort pour désigner le marnage.

Amplitude du courant : vitesse maximum au cours d'un cycle de marée.

Analyse spectrale : localisation dans l'échelle des fréquences des signaux relatifs aux variations temporelles d'une grandeur observée.

Analyse harmonique : calcul des constantes harmoniques de la marée.

Angle horaire : angle que fait le demi-plan méridien du lieu avec le demi-plan méridien de l'astre, compté vers l'astre dans le sens trigonométrique rétrograde.

Année tropique : période de révolution du soleil sur son orbite de point vernal à point vernal.

Anomalie vraie : angle que fait la direction du Soleil vrai avec celle du périhélie.

Anomalie moyenne : angle que fait la direction du Soleil moyen avec celle du périhélie.

Argument littéral : nombre argument dans lequel les chiffres ont été remplacés par des lettres.

Ascension droite : angle que fait le plan méridien de l'astre avec le point vernal, compté positivement vers l'astre dans le sens trigonométrique direct.

Atlas de courant : représentation cartographique des champs de courant de marée à différentes heures.

Axe des pôles : axe de rotation de la terre.

Basse mer Niveau le plus bas atteint par la mer au cours d'un cycle de marée.

Bruit : composante de la grandeur observée inaccessible à l'analyse harmonique.

Célérité : vitesse de propagation de l'onde de marée.

Circulation littorale : résultante du courant de pente et du courant de dérive à proximité de la côte.

Coefficient : Mesure de l'amplitude de la marée rapportée à l'unité de hauteur.

Coefficient géodésique : élément de l'expression du potentiel générateur ne dépendant que de la latitude.

Composante d'interaction : composante harmonique générée par les effets non linéaires de la réponse de l'océan à la force génératrice.

Composante harmonique : onde élémentaire de marée, définie par sa fréquence, son amplitude et sa phase.

Composante radiationnelle : (anglicisme) par opposition aux composantes gravitationnelles, composantes issues de l'action radiationnelle du Soleil.

Concordances ; Concordance par espèce : technique d'analyse et de prédiction de la marée faisant intervenir les relations entre les éléments d'un port de référence et d'un port secondaire.

Constante harmonique : l'amplitude et la situation d'une composante harmonique sont les constantes harmoniques de cette composante.

Coordonnées géographiques : latitude et longitude terrestre.

Correction nodale : correction à appliquer aux constantes harmoniques pour tenir compte des variations des éléments de l'orbite lunaire.

Courant de dérive : courant généré par le vent.

Courant de marée : composante horizontale de l'action gravitationnelle de la Lune et du Soleil.

Courant de flot ou flot : courant accompagnant la marée montante.

Courant de jusant ou jusant : courant accompagnant la marée descendante.

Courant de pente : courant généré par la pente de la surface libre, hors de l'action de la marée.

Courbe de marée : représentation graphique des variations de hauteurs d'eau.

Déchet : période de diminution d'amplitude.

Déclinaison : angle que fait la direction de l'astre avec le plan de l'équateur.

Distance polaire : complément à 90° de la déclinaison.

Distance zénithale : angle que fait la direction du zénith avec la direction de l'astre.

Distance zénithale géocentrique : distance zénithale ramenée au centre de la Terre.

Échelle de marée : Planche graduée servant à lire directement la hauteur de la marée par rapport au « zéro de l'échelle », situé de préférence au zéro hydrographique.

Écliptique : orbite de la Terre autour du Soleil, ou orbite apparente du Soleil vue de la Terre.

Ellipsoïde : surface mathématique définissant un système géodésique à partir des positions relatives de points situés à la surface de la terre.

Équateur : Grand cercle terrestre contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe des pôles.

Équation du temps : différence entre le temps moyen et le temps vrai.

Estran : Bande côtière comprise entre les niveaux atteints par les plus hautes mers et les plus basses mers.

Établissement du port : heure (temps vrai) de la pleine mer un jour de syzygie qui aurait lieu à midi vrai.

Établissement moyen : retard moyen de l'instant de la pleine mer par rapport au passage de la Lune au méridien.

Étale : Intervalle de temps pendant lequel le niveau de la mer reste sensiblement stationnaire, on parle, selon le cas, d'étale de basse mer et d'étale de pleine mer.

Espèce : ensemble des composantes dont les fréquences sont voisines d'un nombre donné de cycles par jour lunaire. On distingue les espèces longue période, diurne, semi-diurne, etc.

Flux : synonyme de montant.

Force génératrice : résultante de la force d'attraction gravitationnelle exercée par les astres sur un point de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement d'un référentiel lié à la Terre.

Géoïde : surface équipotentielle de la pesanteur terrestre.

Hauteurs réduites : grandeurs périodiques, résultats d'une interpolation de hauteurs observées pour le calcul des vecteurs réduits.

International Terrestrial Reference System (ITRS) : Système de coordonnées géodésiques.

Jour sidéral : période de rotation terrestre de point vernal à point vernal.

jour solaire : période de passage au centre du Soleil d'un demi-plan méridien lié à la Terre.

Latitude : angle que fait la direction de la verticale du lieu avec le plan de l'équateur.

Latitude écliptique : angle que fait la direction de l'astre avec le plan de l'écliptique.

Ligne cotidale : courbe tracée sur une carte, passant par tous les points où la pleine mer a lieu à la même heure.

Longitude : angle que fait le demi-plan méridien du lieu avec le méridien origine (méridien de Greenwich).

Longitude écliptique : angle que fait la projection orthogonale sur l'écliptique de la direction de l'astre, avec la direction du point vernal.

Longitude moyenne : longitude écliptique d'un astre ou d'un élément de son orbite. Cette appellation est impropre (il ne s'agit pas de la moyenne des longitudes), mais est consacrée par l'usage.

Maillage : découpage d'une zone en éléments géométriques simples en vue d'une modélisation mathématique.

Marée : Mouvement à allure périodique du niveau de la mer, dû aux effets de l'action gravitationnelle la Lune et le Soleil.

Marégraphe : appareil servant à enregistrer les mouvements verticaux de la mer.

Marégramme : Graphique représentant les variations du niveau de la mer, en un lieu, en fonction du temps.

Marnage : Différence de hauteur entre une basse mer et une pleine mer successives.

Mascaret : vague accompagnant le flot, observé dans certains estuaires.

Méthode de la réponse : technique d'analyse et de prédiction de la marée à partir des admittances.

mois lunaire : appelé également révolution synodique intervalle de temps entre deux Pleines Lunes et deux Nouvelles Lunes.

Morte-eau : minimum de marnage.

Moindres carrés : méthode de calcul permettant d'obtenir une estimation optimale d'un signal déterministe en présence de bruit.

Montant : Intervalle de temps entre une basse mer et la pleine mer suivante. Synonymes : marée montante, montée, flux.

Nadir : Direction de la verticale vers le bas ; opposé au zénith.

Niveau moyen : Résultat d'un filtrage numérique des hauteurs observées tendant à éliminer les composantes sinusoïdales.

Niveau de mi-marée : moyenne des pleines mers et des basses mers.

Nœud ascendant : Point d'intersection de l'orbite lunaire et de l'écliptique dans le sens du mouvement de la Lune de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord.

Nombre argument : méthode de désignation des composantes de marée, à l'aide d'un nombre de 6 chiffres permettant d'identifier les paramètres astronomiques dont elles sont issues et d'en déduire leur période.

Nombre argument étendu : Nombre de Doodson auquel a été adjoint un 7e chiffre précisant si l'argument angulaire est associé à un sinus ou un cosinus positif ou négatif.

Nombre de Doodson : autre appellation du nombre argument.

Observatoire de marée : site d'observation de la marée incluant l'appareil enregistreur appelé marégraphe, l'échelle de marée et les repères de nivellement placés à proximité.

Perdant : période pendant laquelle le niveau d'eau diminue.

pieds de pilote : marge de sécurité pour tenir compte des variations aléatoires du niveau d'eau.

Plan méridien : plan contenant l'axe des pôles.

Pleines et basses mers : extremums de la courbe de marée.

Pleine mer : maximum de la courbe de marée.

Points amphidromiques : Point situé en mer autour duquel semble tourner l'onde de marée.

Puits de tranquillisation : dispositif d'un observatoire de marée destiné à aplanir le plan d'eau et à atténuer les mouvements rapides dus aux vagues et à la houle.

Reflux : synonyme de perdant et de marée descendante.

Repère absolu : repère galiléen (sans accélération).

Point équinoxial : intersection du plan de l'écliptique et de l'équateur.

Point vernal : point équinoxial de printemps.

Polynômes de Legendre : polynômes orthogonaux. Le potentiel générateur s'exprime sous la forme d'une série de polynômes de Legendre.

Potentiel générateur : grandeur scalaire dont dérive la force génératrice.

Potentiel luni-solaire : potentiel dont dérive la somme des forces génératrices dues à la Lune et au Soleil.

Périgée : point de l'orbite le plus proche d'un foyer.

Quadrature : position de la Lune et du Soleil quand leurs directions par rapport à la Terre forment un angle droit (terme général pour Premier Quartier et Dernier Quartier).

Règle de Proctor : construction géométrique de la force génératrice de la marée.

Règle des sixièmes : méthode expéditive de calcul du courant connaissant son amplitude et l'heure du maximum.

Revif : période durant laquelle l'amplitude de la marée augmente entre une morte-eau et une vive-eau.

Révolution sidérale : temps nécessaire pour que la longitude moyenne de la Lune, comptée à partir d'un équinoxe fixe, augmente de 360°. Elle est égale à 27 j 7 h 43 min.

Révolution synodique : appelée également mois lunaire intervalle de temps entre deux Pleines Lunes et deux Nouvelles Lunes.

Saros : période de 6 585,321 1 jours correspondant à 223 lunaisons. Au terme de cette période, la Lune, le Soleil, le nœud de l'orbite lunaire et le périgée lunaire se trouvent à peu près dans la même situation relative.

Situation : retard, mesuré en angle entre le maximum de la composante et le maximum d'action de l'élément correspondant du potentiel générateur. Cette notion a été généralisée pour les composantes d'interaction.

Soleil moyen : astre fictif ayant même période de révolution apparente que le soleil vrai, mais animé d'un mouvement uniforme. Le temps moyen varie de 0 à 24 heures depuis le passage du Soleil moyen au méridien supérieur.

Solstices : maximums de déclinaison des astres.

Sonde lumineuse : ruban gradué généralement métallique, équipé d'un dispositif indiquant par un signal lumineux le contact de son extrémité avec la surface de l'eau.

Spectre : représentation graphique des modules des composantes spectrales.

Sphère des fixes : système de représentation dans lequel les astres sont repérés par leur direction sur une sphère fixe par rapport aux étoiles.

Surface moyenne océanique : surface des océans déterminée par altimétrie spatiale.

Syzygie : moment où les plans méridiens de la Lune et du Soleil sont confondus. Il correspond à une Pleine Lune ou une Nouvelle Lune.

Temps civil : temps moyen augmenté de 12 heures.

Temps moyen : échelle de temps uniforme définie par le Soleil moyen. Un jour de temps moyen a par définition une durée égale à 24 heures.

Temps universel : temps civil de Greenwich. Son sigle est TU.

Temps vrai : angle horaire du Soleil vrai.

TFR : Transformée de Fourier Rapide. Technique de représentation d'un signal temporel dans le domaine spectral.

Types de marée :

— marée semi-diurne : deux pleines mers et deux basses mers par jour ; les composantes diurnes sont négligeables ;

— marée semi-diurne à inégalités diurnes : deux pleines mers et deux basses mers par jour ; les composantes semi-diurnes sont dominantes ;

— marée mixte : tantôt deux pleines mers et deux basses mers par jour, tantôt une seule pleine mer et basse mer par jour ; les composantes diurnes sont dominantes ;

— marée diurne : une pleine mer et une basse mer par jour ; les composantes semi-diurnes sont négligeables.

Unité de hauteur : demi-marnage de la marée de vive-eau moyenne d'équinoxe (marée semi-diurne) ou de solstice (marée diurne).

Vecteurs réduits : nombres complexes représentatifs des éléments constitutifs d'une espèce (module et phase) à un instant donné.

Verticale : direction du fil à plomb. On suppose, avec un degré d'approximation suffisant pour les problèmes relatifs à la marée, que la verticale coupe l'axe des pôles au centre de la Terre.

Vive eau : maximum de marnage.

Vive eau d'équinoxe : maximum d'amplitude de la marée semi-diurne, voisine des équinoxes.

Vive eau de périgée : maximum d'amplitude de la marée, voisine du passage de la Lune à son périgée.

Vive eau exceptionnelle : vive-eau semi-diurne équinoxiale de périgée.

Zénith : direction de la verticale vers le haut (opposé au nadir).

Zéro hydrographique : encore appelé zéro des cartes, référence commune aux cartes marines et aux annuaires de marée à l'usage des navigateurs.

Zéro des cartes : synonyme de zéro hydrographique.

Index

admittance, 91, 94, 95, 179, 427
âge de la marée, 16, 18, 24, 172, 192, 194, 195, 201, 208
altimétrie, 10, 23, 40, 67, 68, 134, 237, 244, 250, 266, 429
amplitude, 23, 43, 100, 126, 192, 208–210, 217, 259, 281, 289
amplitude du courant, 283
analyse harmonique, 21, 89, 103, 107, 123, 132, 139, 141, 142, 148, 153, 162
analyse spectrale, 131, 132, 172, 185
angle horaire, 83–87, 92, 93, 100, 111, 112, 115, 120, 161, 162, 192
année tropique, 98, 114
argument littéral, 166
ascension droite, 92
atlas de courants, 217
axe des pôles, 70, 89, 114

basse mer, 13, 23, 26, 124, 126, 194, 200, 205, 209, 210, 212–217, 256, 264, 275, 281, 282, 287, 288, 425
bruit, 109, 131, 132, 137, 141, 147, 148, 150–155, 159, 174, 180, 272, 289

célérité, 19, 27, 64–66, 124, 281
coefficient, 89, 97, 100, 102, 103, 217, 283, 424
composantes d'interaction, 126, 128, 142, 169, 172, 180, 203, 208, 213, 214, 216
composantes harmoniques, 21, 31, 37, 107, 141, 148, 150, 151, 154, 160, 171, 186, 188, 191, 203, 213, 259, 289, 293, 295
composantes radiationnelles, 109, 151
concordance par espèce, 180, 181, 184, 249, 259, 289
concordances, 172–178
constantes harmoniques, 129, 157, 165, 171, 173, 178, 187–189, 191, 209, 239, 243, 246, 253, 254, 256, 257, 259, 260, 263, 265, 289, 290
coordonnées géographiques, 89
corrections nodales, 129, 132, 167, 169
courant de flot, 281, 288
courant de jusant, 281, 288
courants de marée, 10, 33, 271, 273, 275, 277, 281, 288
courbe de marée, 23, 24, 126, 127, 149, 178

déchet, 24

déclinaison, 16, 25, 26, 77, 78, 83, 85–87, 92, 96, 101, 112, 113, 197, 200, 201, 208, 210, 215
distance polaire, 113
distance zénithale géocentrique, 73, 81, 83, 110

échelle de marée, 35–37, 45–48, 51, 53
écliptique, 21, 110, 114, 200
ellipsoïde, 244, 250, 255, 256
équateur, 57, 67, 77, 87, 105, 106, 192, 194, 198, 200, 201, 208, 210
espèces, 20, 31, 69, 83–87, 91–97, 103, 112, 113, 118, 120, 123–125, 127, 129, 131, 137, 139, 141–144, 146, 148, 153, 154, 157–160, 164, 165, 180, 182–184, 203, 209, 218
établissement du port, 195
établissement moyen, 192, 194
étale, 23, 274, 281–283, 288

flot, 17, 281, 282, 287, 288
flux, 23
force génératrice, 11, 18, 19, 26, 69, 73, 75, 76, 78–80, 82, 89, 90, 118, 124, 127, 180, 205, 239, 271, 273, 284

géoïde, 233, 241, 243, 245, 256, 257

hauteurs réduites, 142–145, 154, 181, 188, 228, 289

ITRS, 66, 233, 244, 250, 255, 266

jour sidéral, 109, 198, 200
jour solaire, 99, 144
jusant, 17, 281, 282, 287, 288

latitude, 21, 57, 67, 77, 78, 85, 86, 90, 93, 94, 110, 113, 118, 147, 235, 241, 272, 285
lignes cotidales, 13, 22
longitude, 21, 92, 110, 127
longitude écliptique, 106, 114
longitude moyenne, 115, 162, 163, 192, 194, 197, 198, 202, 203, 210, 211, 214, 216, 218

maillage, 257, 262, 263, 277
marée diurne, 212
marée semi-diurne, 212
marégramme, 49, 51, 53, 173, 205
marégraphe, 36, 37, 39, 41, 42, 44–48, 51, 53, 56, 58, 61, 62, 65, 67, 149, 152, 175, 232, 233, 238, 241, 244, 246, 247, 249, 250, 253–256, 265, 266
marnage, 23–26, 36, 42, 44, 47, 57, 100–102, 216, 259, 272, 283, 423
mascaret, 29, 126, 127
méthode de la réponse, 179, 180, 183
mi-marée, 288
moindres carrés, 141, 153, 154, 157, 161, 162, 184, 289
montant, 23, 126, 280–282
morte-eau, 24, 173, 176, 177, 195, 201, 202, 212, 213, 215, 217, 259, 275, 282, 283

nadir, 18
niveau moyen, 39, 62, 66, 132, 152, 175, 206, 221, 225–228, 231, 239–241, 243, 244, 246–250, 253–257, 259, 264–266, 423
nœud ascendant, 106, 114, 115, 123, 163, 166, 200, 208, 210, 217, 309, 310
nombre-argument, 120, 122, 123, 162, 166
nombre de Doodson, 120–122, 427
nombre de Doodson étendu, 121

observatoire de marée, 231, 427

perdant, 23, 126, 280–282
périgée, 114, 196, 197, 202, 208–211
périgée lunaire, 163, 192, 203, 211, 217
périgée solaire, 151, 163
périhélie, 423
pieds de pilote, 36
plan méridien, 13, 86, 194, 196, 423, 424, 426
plan méridien supérieur, 192
pleine mer, 13, 23, 26, 97–102, 124, 126, 194–196, 200, 201, 204–206, 209, 210, 212–217, 221, 223,

224, 258, 274, 275, 281, 282, 287, 288, 423, 425, 427
pleines et basses mers, 11, 16, 20, 21, 46, 87, 89, 97, 103, 172, 176, 178, 205, 212–217, 240, 282
point amphidromique, 13, 187
point équinoxial, 210
point vernal, 92, 114, 200, 208, 423, 424, 426
polynômes de Legendre, 69, 76, 79, 81, 82, 111, 113, 118
potentiel générateur, 13, 19, 21, 76, 79, 80, 83, 89, 92, 105, 106, 110, 111, 119, 122, 123, 125, 128, 142, 149–151, 161, 165, 166, 168, 179, 180, 191, 206, 208, 271, 285, 424
puits de tranquillisation, 35, 41, 43, 45, 49, 58, 64, 139, 148

quadrature, 216, 288

reflux, 23
règle de Proctor, 69, 75, 76
règle des sixièmes, 283
renverse, 288
renverse de flot, 288
renverse de jusant, 288
repère absolu, 70, 232
revif, 24
révolution synodique, 427

saros, 11, 217
semi-diurnes, 212
situation, 128, 129, 132, 142, 165, 189, 201, 206, 289, 290, 292, 293
Soleil moyen, 100, 114, 194
solstice, 202, 429
sonde lumineuse, 43, 51, 53
spectre, 29, 31, 38, 68, 105, 131, 132, 134–136, 139, 143, 144, 147, 153, 158, 173, 178, 180, 182
surface moyenne océanique, 239, 241, 250, 253, 266
syzygie, 101, 195, 196, 216, 423, 425

temps civil, 106, 115, 127, 128, 132, 167, 192, 198, 201, 206
temps moyen, 92, 114, 115, 127, 139, 428
temps universel, 127–129, 263
temps vrai, 195, 425
TFR, 132, 135–137, 139, 141, 145, 147, 152, 153, 156, 159–161, 188
types de marée, 11, 13, 24, 26, 205, 217

unité de hauteur, 100, 216

vecteurs réduits, 141–148, 152–154, 156, 157, 159, 160, 167, 182–188, 219
verticale, 241
vive-eau, 24, 101, 173, 176, 177, 195–198, 201–203, 210–213, 215, 217, 221, 259, 275, 282, 283, 428
vive-eau exceptionnelle, 198

zéro des cartes, 24
zéro hydrographique, 46, 221, 243, 246, 249, 251, 253–258, 264–266

• ANALYSE HARMONIQUE • CIRCULATION LITTORALE • COURANTS DE MARÉE • DÉCLINAISON • ESTRAN • GÉOÏDE • LIGNES COTIDALES • LONGITUDE ÉCLIPTIQUE •

Synthèses

• NOMBRE DE DOODSON • POINTS AMPHIDROMIQUES • PUITS DE TRANQUILLISATION • POLYNÔMES DE LEGENDRE • RÉVOLUTION SIDÉRALE • TEMPS UNIVERSEL •

Bernard Simon

Avec la collaboration de Joseph Gonella,
professeur au Muséum national d'histoire naturelle

La marée océanique côtière

Cet ouvrage présente les fondements de l'étude des marées océaniques et ses applications en zone côtière.
Après les quelques généralités destinées à rappeler les notions de base, l'auteur décrit, dans le chapitre II, les diverses techniques d'observation, en insistant sur les problèmes liés à la qualité de la mesure. Il aborde en détail dans les chapitres suivants la force génératrice de la marée, ses effets en termes de variations de niveau ainsi que les diverses techniques d'analyse utilisées en vue des prédictions et du calcul des niveaux caractéristiques. Les chapitres IX et X traitent des niveaux de référence et des courants de marée. À la fin de l'ouvrage, des annexes très complètes donnent les outils nécessaires pour approfondir les notions théoriques et les points techniques spécifiques abordés dans le texte.
Ce livre s'adresse aux personnes intéressées par l'observation, l'analyse et la prédiction des variations du niveau marin pour les besoins de la navigation maritime, de l'hydrographie et des aménagements côtiers. L'aspect plus académique de la propagation des ondes longues océaniques et de leur modélisation fait l'objet d'une autre publication.

Bernard Simon est ingénieur au Service hydrographique et océanographique de la Marine, où il est chargé, au sein du Centre d'hydrographie, des études en hydrodynamique côtière. Il a enseigné la marée à l'École nationale supérieure des techniques avancées, à l'École nationale d'ingénieurs des études et techniques de l'armement ainsi qu'à l'École navale.

Publié avec le concours financier
du Gouvernement de la principauté de Monaco

50 €
ISSN : 1272-0763
ISBN : 978-2-903581-32-9

9 782903 581329

Institut océanographique éditeur
195, rue Saint-Jacques F-75005 Paris
Tél. : +33 1 44 32 10 70
Fax : +33 1 40 51 73 16
www.oceano.org